Appendice :

Introduction à la théorie des fonctions automorphes et au principe de fonctorialité de Langlands

A. Corps globaux et anneaux d'adèles

On peut introduire les "corps globaux" de la manière axiomatique suivante :

Définition A.1. –

Un "corps global" F est le corps des fractions d'un anneau commutatif (unitaire) A qui possède les propriétés suivantes :

- *A est intègre ($\forall\, a,b \in A$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$), autrement dit il est plongé dans son corps des fractions F*
$$A \hookrightarrow F\,,$$
- *A est normal, ce qui signifie*
$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,, \quad \forall\, a_0, a_1, \ldots, a_k \in A, \quad \forall\, \gamma \in F\,,$$
$$\gamma^{k+1} + a_k \cdot \gamma^k + \ldots + a_1 \cdot \gamma + a_0 = 0 \Rightarrow \gamma \in A\,,$$
- *A est engendré (sur $\mathbb{Z}$) par un nombre fini d'éléments,*
- *A est infini,*
- *pour tout $a \in A - \{0\}$, le quotient $A/(a)$ est fini.*

□

On peut préciser la nature des "corps globaux" :

Proposition A.2. –

Un corps global F est nécessairement de l'un des deux types suivants :

(i) *Si F est de caractéristique 0, c'est un "corps de nombres", c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$: autrement dit, F contient $\mathbb{Q}$ comme sous-corps, et il est de dimension finie comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.*

(ii) *Si F est de caractéristique $p \neq 0$, c'est un "corps de fonctions", c'est-à-dire le corps des fonctions rationnelles d'une courbe projective, lisse et connexe X_F sur le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$. Cette courbe X_F est uniquement déterminée par F.*

L'anneau $\Gamma(X_F, O_{X_F})$ des fonctions partout définies sur X_F est un corps fini $\mathbb{F}_q$ qui contient $\mathbb{F}_p$. Son nombre d'éléments q est une puissance de p. C'est le plus grand corps fini contenu dans F.

Remarques :

(i) Si F est un corps de nombres, il existe, parmi tous les sous-anneaux A de F qui vérifient les propriétés de la définition A.1, un sous-anneau A_F qui est contenu dans tous les autres. C'est le sous-anneau des éléments entiers de F, défini comme

$$A_F = \{\gamma \in F \mid \exists\, n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}\,,\ \gamma^{k+1} + n_k \cdot \gamma^k + \ldots + n_1 \cdot \gamma_1 + n_0 = 0\}\,.$$

Les sous-anneaux A de F vérifiant les propriétés de la définition A.1 correspondent aux ouverts de Zariski $\mathrm{Spec}\,(A)$ de $\mathrm{Spec}\,(A_F)$. Comme le schéma affine $\mathrm{Spec}\,(A_F)$ est de dimension 1, la différence $\mathrm{Spec}\,(A_F) - \mathrm{Spec}\,(A)$ consiste toujours en un ensemble fini de points fermés.

(ii) Si F est le corps des fonctions d'une courbe projective, lisse et connexe X_F sur $\mathbb{F}_p$, les sous-anneaux A de F qui vérifient les propriétés de la définition A.1 correspondent aux ouverts de Zariski affines $\mathrm{Spec}\,(A)$ de la courbe X_F. La différence $X_F - \mathrm{Spec}\,(A)$ consiste toujours en un ensemble fini non vide de points fermés.

La famille de ces ouverts affines $\mathrm{Spec}\,(A)$ recouvre la courbe projective X_F tout entière, ce qui implique que l'intersection de tous ces sous-anneaux A de F est égale au corps fini $\mathbb{F}_q = \Gamma(X_F, O_{X_F})$ des "constantes" de F.

$\square$

Nous allons maintenant introduite les "places finies" d'un corps global F et les complétions de F qui leur sont associées.

Si (A, F) est un couple vérifiant les propriétés de la définition A.1, on note

$$|F|_A$$

l'ensemble infini dénombrable des points fermés de $\mathrm{Spec}\,(A)$, c'est-à-dire des idéaux maximaux de A.

Pour tout point $x \in |F|_A$, on note

- A_x l'anneau local de $\mathrm{Spec}\,(A)$ au point x,
- (x) l'idéal maximal de cet anneau local,
- $O_x = \varprojlim\limits_{n \geq 1} A_x/(x)^n$ la complétion profinie de l'anneau local A_x, qui est un anneau local topologique compact,
- m_x l'idéal maximal de O_x, engendré par (x),
- $\mathbb{F}_x = O_x/m_x = A_x/(x)$ le corps résiduel en x, qui est un corps fini,
- q_x le nombre d'éléments du corps résiduel $\mathbb{F}_x$,
- F_x le corps des fractions de l'anneau local complété O_x (qui est nécessairement intègre).

Pour tout point $x \in |F|_A$, F_x est un corps topologique localement compact. Il possède une mesure da_x invariante par l'addition ; cette mesure est uniquement déterminée à multiplication près par un scalaire réel positif.

Pour tout élément $\gamma_x \in F_x^\times = F_x - \{0\}$, la multiplication par γ_x transforme la mesure additive da_x en une autre mesure additive qui est nécessairement le produit de da_x et d'un scalaire réel positif noté

$$|\gamma_x|_x\,.$$

On complète la définition de cette application

$$|\bullet|_x : F_x \to \mathbb{R}_+$$

en décidant que
$$|0|_x = 0\,.$$
Il est clair que l'on a
$$|1|_x = 1$$
et
$$|\gamma_x \cdot \gamma'_x|_x = |\gamma_x|_x \cdot |\gamma'_x|_x\,, \quad \forall\, \gamma_x, \gamma'_x \in F_x\,.$$
On démontre d'autre part :

Lemme A.3. –

Pour tout $x \in |F|_A$ comme ci-dessus, on a :

(i)
$$\forall\, \gamma_x \in O_x - m_x\,, \quad |\gamma_x|_x = 1\,,$$
$$\forall\, \gamma_x \in m_x - m_x^2\,, \quad |\gamma_x|_x = q_x^{-1}\,,$$
et plus généralement
$$\forall\, n \geq 1\,, \quad \forall\, \gamma_x \in m_x^n - m_x^{n+1}\,, \quad |\gamma_x|_x = q_x^{-n}\,.$$

(ii) *L'application*
$$|\bullet|_x : F_x \to \mathbb{R}_+$$
prend ses valeurs dans
$$\{0\} \cup q_x^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}\,.$$

(iii) *Cette application vérifie l'inégalité "ultramétrique"*
$$\forall\, \gamma_x, \gamma'_x \in F_x\,, \quad |\gamma_x + \gamma'_x|_x \leq \max\{|\gamma_x|_x, |\gamma'_x|_x\}\,.$$

Remarque :

- Les parties (ii) et (iii) de ce lemme résultent de (i).
- La partie (i) s'exprime aussi en disant que
$$O_x = \{\gamma_x \in F_x \mid |\gamma_x|_x \leq 1\}$$
et, pour tout $n \geq 1$,
$$m_x^n = \{\gamma_x \in F_x \mid |\gamma_x|_x \leq q_x^{-n}\}\,.$$

□

On déduit de ce lemme :

Corollaire A.4. –

Pour tout $x \in |F|_A$ comme ci-dessus, l'application
$$|\bullet|_x : F_x \to \mathbb{Q}_+$$
définit une norme (et même une norme "ultramétrique") sur F_x.

Le corps topologique F_x s'identifie à la complétion du corps global F pour la norme $|\bullet|_x$.

□

On pose :

Définition A.5. –

Étant donné un "corps global" F, on note

$$|F|_f$$

et on appelle "ensemble des places finies de F" la réunion des ensembles

$$|F|_A$$

lorsque A décrit la famille des sous-anneaux de F qui vérifient les propriétés de la définition A.1.

Remarque :

- Si F est un "corps de nombres",
$$|F|_f = |F|_{A_F}\,,$$
est l'ensemble des points fermés du schéma affine maximal $\mathrm{Spec}\,(A_F)$ de point générique $\mathrm{Spec}\,(F)$.
- Si F est le corps des fonctions rationnelles de la courbe projective, lisse et connexe X_F sur un corps fini,
$$|F|_f$$
s'identifie à l'ensemble des points fermés de X_F.

□

Après les places finies, introduisons maintenant l'ensemble des places "infinies" ou "archimédiennes" d'un corps global :

Définition A.6. –

Si F est un corps global, on note :

- *$|F|_r$ l'ensemble des "places réelles" de F, c'est-à-dire des homomorphismes (nécessairement injectifs et d'image dense)*
$$F \to \mathbb{R}\,,$$
- *$|F|_c$ l'ensemble des "places complexes" de F, c'est-à-dire des homomorphismes (nécessairement injectifs) d'image dense*
$$F \to \mathbb{C}\,,$$
modulo la conjugaison complexe,
- *$|F|_\infty = |F|_r \coprod |F|_c$ la réunion disjointe des ensembles des places réelles et des places complexes, appelée ensemble des places "infinies" ou "archimédiennes".*

Remarque :

- Si F est un corps de fonctions, on a
$$|F|_\infty = \emptyset\,.$$
- Si F est un corps de nombres, on a
$$F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \left(\bigoplus_{x \in |F|_r} \mathbb{R} \right) \oplus \left(\bigoplus_{x \in |F|_c} \mathbb{C} \right)$$
ce qui signifie en particulier que l'ensemble $|F|_\infty$ est fini, avec
$$\#\,|F|_r + 2 \cdot \#\,|F|_c = \dim_{\mathbb{Q}} F\,.$$

□

Le corps complet localement compact $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] est muni de la mesure additive de Lebesgue da_∞.

Pour tout élément $\gamma_\infty \in \mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] non nul, la multiplication par γ_∞ transforme da_∞ en une autre mesure additive qui est le produit de da_∞ et de la valeur absolue [resp. du module]

$$|\gamma_\infty|$$

au sens habituel de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $x \in |F|_\infty = |F|_r \coprod |F|_c$, on note $|\bullet|_x : F \to \mathbb{R}_+$ la norme de F qui se déduit de la valeur absolue de $\mathbb{R}$ [resp. du module de $\mathbb{C}$] par le plongement

$$\begin{array}{rccl} & F & \hookrightarrow & \mathbb{R} \\ \text{[resp.} & F & \hookrightarrow & \mathbb{C}\,,\ \text{à conjugaison près].} \end{array}$$

On notera F_x la complétion de F pour la norme $|\bullet|_x$ associée à une place archimédienne $x \in |F|_\infty$. C'est un corps topologique isomorphe à $\mathbb{R}$ si $x \in |F|_r$ et à $\mathbb{C}$ si $x \in |F|_c$.

On peut maintenant introduire l'ensemble de toutes les places d'un corps global :

Définition A.7. –

Si F est un corps global, on appelle ensemble des places de F la réunion disjointe

$$|F| = |F|_f \coprod |F|_\infty = |F|_f \coprod |F|_r \coprod |F|_c\,.$$

Remarque :

- Si F est un corps de fonctions,
$$|F| = |F|_f$$
s'identifie à l'ensemble des points fermés de la courbe projective X_F.
- Si F est un corps de nombres,
$$\begin{aligned} |F| &= |F|_f \coprod |F|_\infty \\ &= |F|_f \coprod |F|_r \coprod |F|_c \end{aligned}$$
s'identifie à la réunion disjointe de
  - l'ensemble infini dénombrable des points fermés du schéma affine maximal $\mathrm{Spec}\,(A_F)$,
  - l'ensemble fini des complétions de F isomorphes à $\mathbb{R}$,
  - l'ensemble fini des complétions de F isomorphes à $\mathbb{C}$.

$\square$

L'expression "pour presque toutes les places de F" – que nous emploierons souvent dans la suite – signifiera toujours : "pour toutes les places de F sauf un nombre fini".

Ayant défini toutes les normes $|\bullet|_x$ associées aux places $x \in |F|$ d'un corps global F, nous pouvons énoncer la "formule du produit" :

Proposition A.8. –

Pour tout corps global F, et pour tout élément

$$\gamma \in F^\times = F - \{0\}\,,$$

on a :

(i) *Pour presque toute place* $x \in |F|$,

$$|\gamma|_x = 1\,.$$

(ii) *Le produit essentiellement fini*

$$\prod_{x\in|F|} |\gamma|_x$$

est égal à 1.

Remarque :

La formule n'est évidemment plus vérifiée si l'on oublie au moins une des places $x \in |F|$.

$\square$

Nous allons maintenant introduire "l'anneau des adèles" d'un corps global F comme sous-anneau topologique de l'anneau topologique localement compact produit

$$\prod_{x\in|F|} F_x\,.$$

Définition A.9. –

Étant donné un corps global F*, son "anneau des adèles"* $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ *est le sous-anneau*

$$\mathbb{A}_F \subset \prod_{x\in|F|} F_x$$

constitué des familles

$$(a_x)_{x\in|F|}$$

d'éléments $a_x \in F_x$*,* $x \in |F|$*, telles que*

$$|a_x|_x \leq 1 \quad \text{en presque toute place} \quad x \in |F|$$

ou, ce qui revient au même,

$$\gamma_x \in O_x \quad \text{en presque toute place finie} \quad x \in |F|_f\,.$$

$\square$

L'anneau des adèles $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ est un anneau topologique localement compact : il est muni de la topologie induite par celle du produit $\prod\limits_{x\in|F|} F_x$ dans lequel il est plongé.

Supposons que, en presque toute place finie $x \in |F|_f$, la mesure additive choisie da_x de F_x attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact O_x. Alors $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ est muni de la mesure additive

$$da = \bigotimes_{x\in|F|} da_x$$

produit des mesures additives da_x des facteurs F_x, $x \in |F|$.

On note d'autre part que, d'après la proposition A.8(i), le plongement diagonal

$$F \hookrightarrow \prod_{x\in|F|} F_x$$

se factorise à travers le sous-anneau des adèles en un plongement

$$F \hookrightarrow \mathbb{A}_F \, .$$

Voici les premières propriétés importantes de ce plongement :

Proposition A.10. –

Pour tout corps global F, on a :

(i) *Le plongement*

$$F \hookrightarrow \mathbb{A}_F$$

identifie F à un sous-groupe discret du groupe topologique additif $\mathbb{A}_F$.

(ii) *Le quotient*

$$\mathbb{A}_F/F$$

du groupe topologique localement compact $\mathbb{A}_F$ par son sous-groupe discret F est compact.

Remarque :

(i) résulte de la formule du produit.

En sens inverse, considérons la mesure invariante

$$da = \bigotimes_{x\in|F|} da_x$$

sur $\mathbb{A}_F$ et sur son quotient $\mathbb{A}_F/F$.

La multiplication par n'importe quel élément

$$\gamma \in F^\times$$

transforme cette mesure invariante par le facteur

$$\prod_{x\in|F|} |\gamma|_x \, .$$

Or cette mesure invariante attribue nécessairement au quotient compact $\mathbb{A}_F/F$ un volume fini strictement positif.

Comme la multiplication par $\gamma \in F^\times$ définit un automorphisme de $\mathbb{A}_F/F$, on retrouve la formule du produit

$$\prod_{x\in|F|} |\gamma|_x = 1 \, .$$

□

Nous voulons enfin définir une transformation de Fourier sur chaque facteur F_x, $x \in |F|$, et sur $\mathbb{A}$.

Pour cela, on choisit une fois pour toutes un caractère additif continu non trivial

$$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times \, ,$$

c'est-à-dire un caractère additif non trivial de $\mathbb{A}$ qui est invariant par le sous-groupe discret F.

Comme le quotient $\mathbb{A}/F$ est compact, ce caractère ψ est nécessairement unitaire.

En tant que caractère continu de $\mathbb{A}$, il est de la forme

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x$$

où chaque

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}$$

est un caractère continu unitaire non trivial du groupe additif F_x.

Définissons d'abord la ψ_x-transformation de Fourier locale sur F_x, en chaque place $x \in |F|$:

Définition A.11. –

Soit F un corps global.

Pour toute place $x \in |F|_f$ [resp. $x \in |F|_\infty$], et pour toute fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide]

$$f_x : F_x \to \mathbb{C}\,,$$

on appelle "ψ_x-transformée de Fourier" de f_x, et on note

$$\widehat{f_x} : F_x \to \mathbb{C}\,,$$

la fonction définie par la formule intégrale

$$\widehat{f_x}(b_x) = \int_{F_x} da_x \cdot \psi_x(a_x\, b_x) \cdot f_x(a_x)\,.$$

Voici la première propriété essentielle des transformations de Fourier locales ainsi définies :

Proposition A.12. –

Pour toute place $x \in |F|_f$ [resp. $x \in |F|_\infty$], la ψ_x-transformation de Fourier définit un automorphisme de l'espace des fonctions localement constantes à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide] sur F_x.

De plus, il existe une unique façon de choisir la mesure invariante da_x en fonction de ψ_x, de sorte que l'automorphisme réciproque de la ψ_x-transformation de Fourier soit la $\overline{\psi}_x$-transformation de Fourier associée au caractère conjugué $\overline{\psi}_x = \psi_x^{-1}$.

Remarque :

L'unique mesure additive da_x qui vérifie cette propriété est appelée la "mesure autoduale" de F_x muni du caractère ψ_x.

□

Supposons désormais que, en toute place $x \in |F|$, F_x est muni de la mesure autoduale da_x, et munissons $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ de la mesure produit

$$da = \bigotimes_{x \in |F|} da_x\,.$$

Considérons l'espace des fonctions

$$h : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

combinaisons linéaires de fonctions produits

$$\bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

dont les facteurs $h_x : F_x \to \mathbb{C}$ vérifient les conditions suivantes :

- les h_x, $x \in |F|_f$, sont des fonctions localement constantes à support compact sur F_x, et presque toutes se confondent avec la fonction caractéristique du sous-groupe ouvert compact O_x,
- les h_x, $x \in |F|_\infty$, sont des fonctions de classes C^∞ à décroissance rapide sur $F_x = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On déduit de la proposition précédente :

Corollaire A.13. –

(i) *Dans l'espace de fonctions*

$$\mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

défini ci-dessus, le produit sur toutes les places

$$\bigotimes_{x \in |F|} h_x \mapsto \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{h}_x$$

des ψ_x-transformations de Fourier locales s'étend par linéarité en un automorphisme de cet espace, appelé "ψ-transformation de Fourier globale".

(ii) *La ψ-transformation de Fourier globale*

$$h \mapsto \widehat{h}$$

dans cet espace est aussi définie par la formule intégrale

$$\widehat{h}(b) = \int_{\mathbb{A}} da \cdot \psi(ab) \cdot h(a)\,.$$

(iii) *Dans cet espace, la ψ-transformation de Fourier admet pour automorphisme réciproque la $\overline{\psi}$-transformation de Fourier.*

Remarque :

Dans le cas où F est un corps de fonctions, notre espace de fonctions

$$h : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

n'est autre que celui des fonctions localement constantes à support compact sur $\mathbb{A}$.

□

Voici enfin la propriété globale essentielle de la ψ-transformation de Fourier sur $\mathbb{A}$, la formule de Poisson :

Proposition A.14 (Tate). –

Pour toute fonction

$$h : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

comme dans le corollaire A.13 *ci-dessus, et si $\widehat{h}$ désigne sa ψ-transformée de Fourier, on a*

$$\sum_{\gamma \in F} h(\gamma) = \sum_{\gamma \in F} \widehat{h}(\gamma)\,.$$

□

B. Groupes réductifs et groupes duaux de Langlands

Nous voulons d'abord rappeler la théorie des groupes réductifs sur un corps de base k. On notera k_s la clôture séparable de k et $\Gamma_k = \mathrm{Aut}_k(k_s)$ son groupe de Galois.

Définition B.1. –

Parmi les schémas en groupes affines, lisses et géométriquement connexes sur k, on distingue :

(i) *Le "groupe multiplicatif" $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,(k\,[X, X^{-1}])$ qui associe à toute k-algèbre A le groupe $A^\times$ des éléments inversibles de A.*

(ii) *Les "tores" T, définis par la condition qu'ils deviennent isomorphes sur k_s à une puissance finie de $\mathbb{G}_m$.*

(iii) *Le "groupe additif" $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,(k\,[X])$ qui associe à toute k-algèbre A l'ensemble A muni de l'addition.*

(iv) *Les "groupes unipotents" N, définis par la condition d'admettre sur k_s une suite emboîtée de sous-groupes algébriques distingués*

$$\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{n_0} = N$$

telle que chaque sous-quotient

$$N_{n-1}\backslash N_n\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,,$$

soit isomorphe au groupe additif $\mathbb{A}^1$.

(v) *Les "groupes réductifs" G, définis par la condition de n'admettre, sur k ou k_s, aucun sous-groupe algébrique distingué unipotent non trivial.*

Remarques :

(i) Au fondement de la théorie des groupes réductifs, il y a le fait que n'existe aucun homomorphisme algébrique non trivial $\mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^1$ ou $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{G}_m$. Il en résulte que les tores T sont des groupes réductifs.

(ii) Pour tout $r \geq 1$, les groupes

$$N_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad N_r^{\mathrm{op}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de matrices triangulaires unipotentes supérieures [resp. inférieures] sont unipotents.

(iii) Les premiers exemples de groupes réductifs – et les plus importants – sont : GL_r, PGL_r, SL_r, Sp_{2r}, SO_{2r+1}, SO_{2r}.

$\square$

On a :

Lemme B.2. –

Tout groupe algébrique P affine, lisse et géométriquement connexe sur un corps k contient un plus grand sous-groupe algébrique unipotent distingué, noté N_P et appelé le radical unipotent de P.

De plus, le groupe algébrique quotient P/N_P est réductif. Tout comme N_P, il est défini sur k.

$\square$

On remarque que les homomorphismes $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ sont exactement les $\lambda \mapsto \lambda^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, pour tout tore T sur k, le groupe X_T des caractères définis sur k_s

$$\chi : T \to \mathbb{G}_m$$

et le groupe $X_T^\vee$ des cocaractères définis sur k_s

$$\mu : \mathbb{G}_m \to T$$

sont des réseaux de rang $\dim T$. Ils sont munis d'une action naturelle de Γ_k. De plus, ils sont duaux l'un de l'autre via la forme bilinéaire Γ_k-équivariante

$$\begin{array}{rcl} \langle \bullet, \bullet \rangle : X_T \times X_T^\vee & \to & \mathbb{Z} \\ (\chi, \mu) & \mapsto & \langle \chi, \mu \rangle \end{array}$$

où $\langle \chi, \mu \rangle$ désigne l'exposant de l'homomorphisme composé $\chi \circ \mu : \mathbb{G}_m \to T \to \mathbb{G}_m$.

On a :

Lemme B.3. –

Le foncteur covariant [resp. contravariant]

$$T \mapsto X_T^\vee \quad \textit{[resp. } T \mapsto X_T\textit{]}$$

définit une équivalence de la catégorie des tores algébriques sur k dans la catégorie des réseaux de rang fini munis d'une action continue de Γ_k.

□

Afin d'étudier les groupes réductifs, on pose :

Définition B.4. –

Soit G un groupe réductif sur k.

(i) *Un sous-groupe fermé géométriquement connexe $P \subsetneq G$ est dit "parabolique" si la variété quotient G/P est projective.*

(ii) *Un sous-groupe de Borel $B \subsetneq G$ est un sous-groupe parabolique minimal sur k_s.*

(iii) *Une paire de Borel (T, B) est constituée d'un sous-tore T de G maximal sur k_s et d'un sous-groupe de Borel B de G qui contient T.*

D'après le lemme B.2, tout sous-groupe parabolique P d'un groupe réductif G possède un radical unipotent N_P ; le quotient P/N_P est réductif.

On montre :

Proposition B.5. –

Soit G un groupe réductif sur k.

(i) *Sur k_s, G possède des sous-tores maximaux. Ils sont conjugués les uns des autres par les éléments de $G(k_s)$. Si T est l'un d'eux, le quotient par T de son normalisateur $N_G(T)$ est un groupe fini.*

(ii) *Sur k_s, G possède des sous-groupes de Borel. Ils sont conjugués les uns des autres par les éléments de $G(k_s)$. Chacun est son propre normalisateur.*

(iii) *Sur k_s, G possède des paires de Borel. Elles sont conjuguées les unes des autres par les éléments de $G(k_s)$. Si (T, B) est l'une d'elles, son normalisateur est T.*

(iv) *Un sous-groupe parabolique P est minimal, donc un sous-groupe de Borel, si et seulement si P/N_P est un tore.*

(v) *Le centralisateur $C_G(T)$ de tout sous-tore T de G est un groupe réductif. C'est un tore, nécessairement égal à T, si et seulement si T est maximal.*

(vi) *Pour toute paire de Borel (T, B), l'homomorphisme*

$$T \to B/N_B$$

est un isomorphisme.

Plus généralement, si P est un sous-groupe parabolique et T un sous-tore maximal contenu dans P, il existe un unique sous-tore T' de T tel que l'homomorphisme

$$C_G(T') = M_P \to P/N_P$$

soit un isomorphisme de groupes réductifs.

□

Si (T_1, B_1) et (T_2, B_2) sont deux paires de Borel d'un groupe réductif G sur k_s, il existe donc un élément $g \in G(k_s)$, uniquement déterminé à multiplication près par les éléments de $T(k_s)$, tel que

$$g^{-1} \cdot (T_1, B_1) \cdot g = (T_2, B_2)\,.$$

Il en résulte que la définition suivante est indépendante du choix d'une paire de Borel :

Définition B.6. –

Étant donné un groupe réductif G sur k_s, on note, pour n'importe quelle paire de Borel (T, B) de G :

- $X_G = X_T$ *le réseau des caractères de T,*
- $X_G^\vee = X_T^\vee$ *le réseau dual des cocaractères de T,*
- $\mathfrak{S}_G = N_G(T)/T$ *le groupe fini, appelé groupe de Weyl de G, défini comme le quotient par T de son normalisateur,*
- $\Phi_G = \Phi_T \subset X_T - \{0\}$ *l'ensemble fini des caractères non triviaux de T qui apparaissent dans l'action par conjugaison de T sur* $\mathrm{Lie}\,(G)$,
- $\Phi_G^+ = \Phi_B \subset \Phi_G = \Phi_T$ *le sous-ensemble fini des caractères non triviaux qui apparaissent dans l'action par conjugaison de T sur* $\mathrm{Lie}\,(B)$ *ou* $\mathrm{Lie}\,(N_B)$,
- $\Delta_G = \Delta_B \subset \Phi_G^+ = \Phi_B$ *le sous-ensemble de Φ_B constitué des éléments qui ne peuvent s'écrire comme la somme de deux éléments de Φ_B.*

Remarques :

- Les éléments des sous-ensembles finis Φ_G, Φ_G^+ et Δ_G du réseau X_G s'appellent respectivement les racines, les racines positives et les racines simples. On montre de Φ_G est la réunion disjointe de Φ_G^+ et $-\Phi_G^+$.
- Le groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$ agit sur X_G et $X_G^\vee$. Cette action préserve l'ensemble Φ_G des racines de G.

□

Considérons toujours une paire de Borel (T, B) du groupe réductif G sur k_s.

Soit $\alpha : T \to \mathbb{G}_m$ une racine, élément de $\Phi_G = \Phi_T$. Soit T_α la composante neutre du noyau de α, qui est un sous-tore de T de codimension 1. Le centralisateur G_α de T_α dans G est un sous-groupe réductif de G qui admet T comme sous-tore maximal.

Le groupe fini $N_{G_\alpha}(T)/T$ agit non trivialement sur $T/T_\alpha \cong \mathbb{G}_m$, donc il compte exactement 2 éléments. On note w_α l'image dans $N_G(T)/T = \mathfrak{S}_G$ de son unique élément non trivial.

Le groupe dérivé $G_\alpha^{\rm der} = [G,G]$ de G_α (c'est-à-dire l'intersection des noyaux de tous les caractères de G_α) a ses sous-tores maximaux isomorphes à $\mathbb{G}_m$. Donc il est isomorphe à SL_2 ou PGL_2, et il existe un unique homomorphisme

$$\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \to G_\alpha^{\rm der}$$

tel que

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\,\alpha^\vee \subset T\,, \\ T = T_\alpha \cdot (\mathrm{Im}\,\alpha^\vee)\,, \\ \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2\,. \end{cases}$$

On montre :

Lemme B.7. –

Dans la situation ci-dessus, les élément $w_\alpha \in \mathfrak{S}_G$ et $\alpha^\vee \in X_T^\vee$ associés à toute racine $\alpha \in \Phi_G$ vérifient

$$w_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \cdot \alpha\,, \quad \forall\, \chi \in X_T\,,$$

$$w_\alpha(\mu) = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \cdot \alpha^\vee\,, \quad \forall\, \mu \in X_T^\vee\,.$$

□

L'application $\Phi_G \ni \alpha \mapsto \alpha^\vee$ ne dépend pas du choix de la paire de Borel (T,B). On peut donc compléter la définition B.6 par :

Définition B.8. –

Si G est un groupe réductif sur k_s, on appelle coracines [resp. coracines positives, resp. coracines simples] les éléments du sous-ensemble $\Phi_G^\vee$ [resp. $\Phi_G^{+\vee}$, resp. $\Delta_B^\vee$] de $X_G^\vee - \{0\}$, image de Φ_G [resp. Φ_G^+, resp. Δ_B] par l'application

$$\alpha \mapsto \alpha^\vee\,.$$

□

La construction des racines et des coracines d'un groupe réductif amène à poser la définition suivante :

Définition B.9. –

(i) *On appelle "donnée radicielle" tout quadruplet $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ constitué de*

- *un réseau X de rang fini,*
- *son réseau dual $X^\vee$,*
- *deux sous-ensembles finis Φ et $\Phi^\vee$ de X et $X^\vee$ reliés par une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{\sim} & \Phi^\vee \\ \alpha & \mapsto & \alpha^\vee\,, \end{array}$$

et tel que tout élément $\alpha \in \Phi$ satisfait les 2 axiomes suivants :

- $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$,
- *les involutions de X et $X^\vee$ définies par*

$$\begin{array}{ccl} \chi & \mapsto & w_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \cdot \alpha\,, \\ \mu & \mapsto & w_\alpha(\mu) = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \cdot \alpha^\vee\,, \end{array}$$

stabilisent les ensembles finis Φ et $\Phi^\vee$.

(ii) *Une donnée radicielle $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ est dite "réduite" si, pour tout élément $\alpha \in \Phi$, les seuls multiples de α [resp. $\alpha^\vee$] contenus dans Φ [resp. $\Phi^\vee$] sont $\pm\,\alpha$ [resp. $\pm\,\alpha^\vee$].*

Remarque :

Si $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ est une donnée radicielle (réduite), $(X^\vee, \Phi^\vee, X, \Phi)$ est aussi une donnée radicielle (réduite), appelée sa duale.

□

Cette définition étant posée, on a :

Théorème B.10. –

(i) *Pour tout groupe réductif G sur un corps séparablement clos k_s, le quadruplet associé $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ est une donnée radicielle réduite.*

(ii) *Réciproquement, pour toute donnée radicielle réduite $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$, et pour tout corps séparablement clos k_s, il existe un groupe réductif G sur k_s, unique à isomorphisme près, tel que $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ soit isomorphe à $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$.*

(iii) *Pour tout groupe réductif G sur k_s, on a un homomorphisme canonique entre groupes d'automorphismes*

$$\mathrm{Aut}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)\,.$$

Il s'inscrit dans une suite exacte

$$1 \to \mathrm{Int}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee) \to 1$$

où $\mathrm{Int}\,(G)$ désigne le sous-groupe des automorphismes intérieurs de G.

Remarque :

Il résulte de ce théorème que les classes d'isomorphie de groupes réductifs sur un corps séparablement clos k_s sont indexées par des données combinatoires indépendantes de k_s, et même de la caractéristique de k_s.

□

Les automorphismes d'un groupe réductif G sur k_s muni d'une paire de Borel (T, B) sont les automorphismes de conjugaison par les éléments de $T(k_s)$. Afin de les fixer tous, on note que, pour toute racine $\alpha \in \Phi_G = \Phi_T$, le sous-espace $\mathrm{Lie}\,(G)_\alpha$ de $\mathrm{Lie}\,(G)$ sur lequel T agit par le caractère α est de dimension 1, et on pose :

Définition B.11. –

On appelle "épinglage" d'un groupe réductif G sur k_s tout triplet $(T, B, (u_\alpha)_{\alpha \in \Delta_G})$ constitué d'une paire de Borel (T, B) et d'une famille de vecteurs directeurs $u_\alpha \in \mathrm{Lie}\,(G)_\alpha$, $\alpha \in \Delta_G = \Delta_B$.

Avec cette définition, on a :

Proposition B.12. –

Soit G un groupe réductif sur k_s. Alors :

(i) *Deux épinglages de G sont transformés l'un dans l'autre par un unique automorphisme intérieur de G.*

(ii) *Tout épinglage définit un scindage de la suite exacte*

$$1 \to \mathrm{Int}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee) \to 1\,.$$

Revenons maintenant au corps arbitraire k de clôture séparable k_s et de groupe de Galois $\Gamma_k = \mathrm{Aut}_k(k_s)$.

Ayant classifié les groupes réductifs sur k_s et fixé leurs automorphismes, on peut chercher à classifier les groupes réductifs sur k. Un groupe algébrique affine, lisse et géométriquement connexe G sur k est réductif si et seulement $G_{k_s} = G \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k_s)$ est réductif sur k_s.

Deux groupes réductifs connexes G et G' sur k sont appelés des "k-formes" l'un de l'autre s'il existe un isomorphisme $c : G_{k_s} \xrightarrow{\sim} G'_{k_s}$.

Dans ce cas, l'application

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_k & \rightarrow & \mathrm{Aut}\,(G_{k_s}) \\ \sigma & \mapsto & c^{-1} \circ \sigma(c) = c_\sigma \end{array}$$

est continue, et elle satisfait la condition

$$c_{\sigma\sigma'} = c_\sigma \circ \sigma(c_{\sigma'})\,, \quad \forall\, \sigma, \sigma' \in \Gamma_k\,.$$

Réciproquement, si G est un groupe réductif sur k, toute application continue

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_k & \rightarrow & \mathrm{Aut}\,(G_{k_s})\,, \\ \sigma & \mapsto & c_\sigma\,, \end{array}$$

qui satisfait la relation ci-dessus définit une "k-forme" de G. Cette k-forme est k-isomorphe à G si et seulement s'il existe un automorphisme $c \in \mathrm{Aut}\,(G_{k_s})$ tel que

$$c_\sigma = c^{-1} \circ \sigma(c)\,, \quad \forall\, \sigma \in \Gamma_k\,.$$

Les "k-formes" de G associées à des applications continues $\Gamma_k \ni \sigma \mapsto c_\sigma$ qui prennent leurs valeurs dans le sous-groupe $\mathrm{Int}\,(G_{k_s}) \subset \mathrm{Aut}\,(G_{k_s})$ des automorphismes intérieurs de G_{k_s}, sont appelées les "k-formes intérieures" de G.

Pour tout groupe réductif G sur k, on note encore $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$, $\mathfrak{S}_G$ et $(\Phi_G^+, \Delta_G, \Phi_G^{+\vee}, \Delta_G^\vee)$ la donnée radicielle, le groupe de Weyl et les ensembles de racines et coracines positives ou simples qui sont associés à G_{k_s}.

Si (T, B) est une paire de Borel de G_{k_s} et σ est un élément de Γ_k, la transformée $(\sigma(T), \sigma(B))$ de (T, B) par σ est une autre paire de Borel de G_{k_s}, et on a un isomorphisme induit par σ

$$(X_T, \Delta_B, X_T^\vee, \Delta_B^\vee) \xrightarrow{\sim} (X_{\sigma(T)}, \Delta_{\sigma(B)}, X_{\sigma(T)}^\vee, \Delta_{\sigma(B)}^\vee)\,.$$

Cet isomorphisme induit par σ peut-être vu comme un automorphisme de $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$; comme tel, il ne dépend pas du choix de la paire de Borel (T, B). On a donc une application canonique

$$\Gamma_k \rightarrow \mathrm{Aut}\,(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)\,.$$

C'est un homomorphisme de groupes. Son noyau est un sous-groupe ouvert de Γ_k, ce qui signifie qu'il est continu.

Ainsi, le réseau X_G et son dual $X_G^\vee$ sont canoniquement munis d'une action du groupe de Galois Γ_k qui préserve les ensembles finis $\Delta_G, \Delta_G^\vee, \Phi_G, \Phi_G^\vee, \Phi_G^+, \Phi_G^{+\vee}$ et induit une action sur le groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$.

On pose :

Définition B.13. –

(i) *Un groupe réductif G sur k est dit "quasi-déployé" s'il possède un épinglage $(T, B, (u_\alpha)_{\alpha \in \Delta_G})$ défini sur k.*

(ii) *Il est dit "déployé" si, de plus, le tore T d'un tel épinglage est déployé, c'est-à-dire isomorphe sur k à une puissance de $\mathbb{G}_m$.*

On déduit du théorème B.10 et de la proposition B.11 :

Corollaire B.14. –

(i) *Deux groupes réductifs G et G' sur k sont des "k-formes" l'un de l'autre si et seulement si leurs données radicielles $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ et $(X_{G'}, \Phi_{G'}, X_{G'}^\vee, \Phi_{G'}^\vee)$ sont isomorphes.*

De plus, ce sont des "k-formes intérieures" l'un de l'autre si et seulement si leurs données radicielles munies des actions naturelles du groupe de Galois Γ_k sont isomorphes.

(ii) *Toute donnée radicielle $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ munie d'une action continue de Γ_k préservant une base $(\Delta, \Delta^\vee)$ définit un groupe réductif quasi-déployé sur k. Celui-ci est unique à unique k-isomorphisme près préservant les épinglages.*

(iii) *Tout groupe réductif sur k possède une forme intérieure quasi-déployée. Celle-ci est unique à unique k-isomorphisme près préservant les épinglages.*

(iv) *Un groupe réductif G, supposé quasi-déployé sur k, est déployé sur k si et seulement si l'action induite de Γ_k sur $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$ est triviale.*

□

À la suite de Langlands, on peut poser la définition suivante :

Définition B.15. –

Soit G un groupe réductif sur k.

On appelle "groupe dual (de Langlands)" de G, et on note $\widehat{G}$, le groupe réductif sur $\mathbb{C}$, muni d'un épinglage $(\widehat{T}, \widehat{B}, (u_\alpha)_{\alpha \in \Delta_{\widehat{G}}})$, qui est associé à la donnée radicielle $(X_G^\vee, \Phi_G^\vee, X_G, \Phi_G)$ duale de la donnée radicielle $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ de G.

Il est unique à unique isomorphisme près et muni de l'action continue de Γ_k qui relève celle sur $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ et sa duale.

Remarque :

Si (T, B) est une paire de Borel de G sur k_s, $\widehat{T}$ est dual de T au sens que l'on peut identifier

$$X_{\widehat{T}} = X_G^\vee = X_T^\vee\,, \quad X_{\widehat{T}}^\vee = X_G = X_T\,.$$

Si (T, B) est défini sur k, les identifications $X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$ et $X_{\widehat{T}}^\vee = X_T$ sont même compatibles avec les actions de Γ_k.

□

La partie (i) du corollaire B.14 ci-dessus se reformule de la manière suivante :

Corollaire B.16. –

Deux groupes réductifs G et G' sur k sont des "k-formes" l'un de l'autre si et seulement si leurs groupes réductifs duaux $\widehat{G}$ et $\widehat{G}'$ sur $\mathbb{C}$ sont isomorphes.

De plus, ce sont des "k-formes intérieures" l'un de l'autre si et seulement si $\widehat{G}$ et $\widehat{G}'$ munis des actions naturelles de Γ_k sont isomorphes.

□

Considérons enfin le cas où le corps de base k est égal à un corps global F : les groupes réductifs G sur un corps global F sont les objets de base de la théorie des représentations automorphes.

Soit donc F un corps global, et soit G un groupe réductif sur F.

Pour toute place $x \in |F|$, G induit un groupe réductif sur F_x. Si $x \in |F|_f$ est une place finie, $G(F_x)$ est un groupe topologique "totalement discontinu" au sens que sa topologie est engendrée par une famille filtrante de sous-groupes ouverts compacts. Si $x \in |F|_r$ est une place réelle, $G(F_x)$ est un groupe de Lie réel et si $x \in |F|_c$ est une place complexe, $G(F_x)$ et un groupe de Lie complexe.

Choisissons des clôtures séparables F_s et $F_{x,s}$, $x \in |F|$, de F et des F_x, ainsi que des plongements $F_s \hookrightarrow F_{x,s}$ de F_s dans chaque $F_{x,s}$, $x \in |F|$, qui prolongent les plongements $F \hookrightarrow F_x$. Chaque plongement $F_s \hookrightarrow F_{x,s}$ induit un plongement entre groupes de Galois

$$\Gamma_{F_x} \hookrightarrow \Gamma_F \, .$$

Si $x \in |F|_f$, notons $F_{x,s}^{\mathrm{nr}}$ le sous-corps de $F_{x,s}$ qui est la réunion filtrante des extensions finies de F_x contenues dans $F_{x,s}$ qui sont "non ramifiées" au sens qu'elle se prolongent en une extension finie étale de l'anneau O_x des entiers de F_x. Le groupe $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Aut}_{F_x}(F_{x,s}^{\mathrm{nr}})$ est appelé "groupe de Galois non ramifié de F_x" ; c'est un quotient du groupe profini Γ_{F_x}. On montre qu'il est isomorphe au groupe de Galois

$$\Gamma_{\mathbb{F}_x} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$$

du corps résiduel $\mathbb{F}_x$ de l'anneau local O_x. Il admet pour générateur topologique "l'élément de Frobenius" $\sigma_x \in \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ qui correspond à l'automorphisme de Frobenius

$$a \mapsto a^{q_x} \qquad (\text{où } q_x = \# \, \mathbb{F}_x)$$

de n'importe quelle clôture séparable de $\mathbb{F}_x$.

On pose :

Définition B.17. –

Soit G un groupe réductif sur un corps global F.

On dit que G est non ramifié en une place finie $x \in |F|_f$ si :

- *G est quasi-déployé sur F_x,*
- *l'action du groupe de Galois local Γ_{F_x} sur la donnée radicielle $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ ou, ce qui revient au même, sur le groupe dual $\widehat{G}$, se factorise à travers son quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$.*

Remarque :

Si G est non ramifié en $x \in |F|_f$, on peut parler de l'action sur $\widehat{G}$ de l'élément de Frobenius σ_x.

□

On montre :

Lemme B.18. –

Soient G un groupe réductif sur un corps global F et $x \in |F|_f$ une place finie en laquelle G est non ramifié.

Alors G considéré comme un groupe réductif sur F_x se prolonge de manière unique en un schéma en groupes affine lisse sur O_x dont la fibre résiduelle est un groupe réductif sur $\mathbb{F}_x$, de même donnée radicielle que G.

□

On déduit de ce lemme :

Corollaire B.19. –

Sous les hypothèses du lemme B.18 *ci-dessus, on peut parler du sous-groupe* $G(O_x)$ *des points entiers de* $G(F_x)$.

C'est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F_x)$.

$\square$

Enfin, on a :

Proposition B.20. –

Soit G *un groupe réductif sur un corps global* F.

Alors :

(i) *Pour presque toute place* $x \in |F|$, *le groupe réductif* G *est quasi-déployé sur* F_x.

(ii) *Mieux encore,* G *est non ramifié en presque toute place* $x \in |F|_f$.

$\square$

C. Fonctions automorphes, représentations automorphes et principe de fonctorialité

Dans tout ce paragraphe, on fixe un corps global F et son anneau des adèles $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ qui a la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbb{A}_f \times \left(\prod_{x \in |F|_\infty} F_x \right) \\ &= \mathbb{A}_f \times \left(\prod_{x \in |F|_r} \mathbb{R} \right) \times \left(\prod_{x \in |F|_c} \mathbb{C} \right). \end{aligned}$$

On s'intéresse aux groupes réductifs G sur F et aux groupes de points

$$G(F) \hookrightarrow G(\mathbb{A}).$$

Le groupe topologique $G(\mathbb{A})$ est le produit des groupes de Lie réels

$$G(F_x), \quad x \in |F|_r,$$

des groupes de Lie complexes

$$G(F_x), \quad x \in |F|_c,$$

et du sous-groupe topologique

$$G(\mathbb{A}_f) \subset \prod_{x \in |F|_f} G(F_x)$$

constitué des familles $(g_x \in G(F_x))_{x \in |F|_f}$ telles que $g_x \in G(O_x)$ en presque toute place $x \in |F|_f$ en laquelle G est non ramifié.

Le groupe $G(\mathbb{A}_f)$ est totalement discontinu : sa topologie est engendrée par ses sous-groupes ouverts compacts produits

$$K_f = \prod_{x \in |F|_f} K_x$$

dont les facteurs K_x sont des sous-groupes ouverts compacts de $G(F_x)$, presque tous égaux à $G(O_x)$.

Le groupe réductif G sur F se plonge comme sous-schéma fermé d'un schéma affine $\mathrm{Spec}\,(F\,[X_1, \ldots, X_d])$. La proposition A.10(i) implique donc :

Lemme C.1. –

Pour tout groupe réductif G sur F, le plongement

$$G(F) \hookrightarrow G(\mathbb{A})$$

identifie $G(F)$ à un sous-groupe discret du groupe topologique $G(\mathbb{A})$.

□

La théorie automorphe consiste à étudier l'espace topologique quotient

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$$

muni de l'action à droite du groupe topologique $G(\mathbb{A})$ ou, ce qui revient au même, les espaces de fonctions

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sur lesquels $G(\mathbb{A})$ opère par translation à droite.

On introduit en particulier :

- l'espace $\mathcal{C}_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ des fonctions continues à support compact
$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$
- son sous-espace $\mathcal{C}_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ réunion filtrante des sous-espaces $\mathcal{C}_{K_f,\infty}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ de fonctions à support compact
$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$
invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact K_f de $G(\mathbb{A}_f)$ et de classe C^∞ en la variable $g_\infty \in \prod\limits_{x\in|F|_\infty} G(F_x)$,
- l'espace $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ des fonctions de carré intégrable
$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$
pour n'importe quelle mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$
$$dg = \bigotimes_{x\in|F|} dg_x$$
produit de mesures de Haar dg_x sur les groupes topologiques localement compacts $G(F_x)$,
- son sous-espace $L^2_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ réunion filtrante des sous-espaces $L^2_{K_f,\infty}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ de fonctions de carré intégrable
$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$
invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact K_f de $G(\mathbb{A}_f)$ et de classe C^∞ en la variable $g_\infty \in \prod\limits_{x\in|F|_\infty} G(F_x)$.

Ces différents espaces sont munis de l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite ou, ce qui revient au même, de l'action par convolution à droite
$$(h,\varphi) \mapsto h * \varphi = \left(g' \mapsto \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot h(g'g^{-1}) \cdot \varphi(g)\right)$$
des fonctions $\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ éléments de "l'algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A})$"
$$\mathcal{H}^G$$
définie de la manière suivante :

Définition C.2. –

Ayant choisi une mesure de Haar $dg = \bigotimes\limits_{x\in|F|} dg_x$ sur $G(\mathbb{A})$, produit de mesures de Haar dg_x sur les $G(F_x)$, on pose :

(i) *Pour toute place $x \in |F|_f$, on appelle "algèbre de Hecke locale sur $G(F_x)$", et on note $\mathcal{H}^G_x$, l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact*
$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$
C'est la réunion filtrante, sur les sous-groupes ouverts compacts K_x de $G(F_x)$, des sous-algèbres $\mathcal{H}^G_{x,K_x}$ de fonctions à support compact
$$K_x\backslash G(F_x)/K_x \to \mathbb{C}\,.$$

(ii) *Pour toute place $x \in |F|_\infty$, on appelle "algèbre de Hecke locale sur $G(F_x)$", et on note $\mathcal{H}_x^G$, l'algèbre de convolution des fonctions de classe C^∞ à support compact*

$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

(iii) *On appelle "algèbre de Hecke globale" sur $G(\mathbb{A})$, et on note $\mathcal{H}^G$, le produit tensoriel*

$$\mathcal{H}^G = \bigotimes_{x \in |F|} \mathcal{H}_x^G\,.$$

C'est une algèbre de convolution de fonctions à support compact

$$\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui sont invariantes à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$, et de classe C^∞ en la variable $g_\infty \in \prod\limits_{x \in |F|_\infty} G(F_x)$.

Remarque :

En toute place $x \in |F|_f$, chaque algèbre $\mathcal{H}_{x,K_x}^G$ admet un élément unité qui est le quotient

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(K_x)} \cdot \mathbb{I}_{K_x}(\bullet)$$

de la fonction caractéristique de K_x par son volume.

Si G est non ramifié en x, on normalise la mesure de Haar dg_x sur $G(F_x)$ en demandant qu'elle attribue le volume 1 à $G(O_x)$.

La sous-algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \mathcal{H}_{x,G(O_x)}^G$ des fonctions à support compact

$$G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

est appelée "l'algèbre de Hecke sphérique sur $G(F_x)$". Elle admet pour élément unité la fonction caractéristique de $G(O_x)$.

$\square$

La théorie automorphe consiste d'abord à décomposer spectralement la représentation

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \quad \text{ou} \quad L^2_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$$

de $G(\mathbb{A})$ ou $\mathcal{H}^G$ comme une somme hilbertienne (discrète et continue) de représentations irréductibles qui sont "lisses admissibles" au sens suivant :

Définition C.3. –

(i) *En toute place $x \in |F|_f$, une représentation "lisse admissible" de $G(F_x)$ ou $\mathcal{H}_x^G$ consiste en un espace vectoriel V_{π_x} sur $\mathbb{C}$ muni d'une action π_x de $G(F_x)$ et tel que*

- *pour tout sous-groupe ouvert compact K_x de V_{π_x}, le sous-espace*

$$V_{\pi_x}^{K_x} = \{v \in V_{\pi_x} \mid g_x \cdot v = v\,, \quad \forall\, g_x \in K_x\}$$

  est de dimension finie,

- *l'espace V_{π_x} est la réunion filtrante de ses sous-espaces $V_{\pi_x}^{K_x}$.*

(ii) *Dans les conditions de* (i)*, la représentation "lisse admissible" (π_x, V_{π_x}) est dite "non ramifiée" si*

- *G est non ramifié en x,*
- *le sous-espace $V_{\pi_x}^{G(O_x)}$ est de dimension 1 et muni d'un vecteur directeur.*

(iii) *En toute place $x \in |F|_\infty$, une représentation "lisse admissible" de $G(F_x)$ et $\mathcal{H}_x^G$ consiste en deux espaces vectoriels V_{π_x} et $V_{\pi_x}^*$ sur $\mathbb{C}$, munis d'actions de $G(F_x)$ et $\mathcal{H}_x^G$ et d'un produit scalaire équivariant non dégénéré*

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V_{\pi_x}^* \otimes V_{\pi_x} \to \mathbb{C}$$

tels que, pour tous vecteurs $v^* \in V_{\pi_x}^*$, $v \in V_{\pi_x}$,

- *la fonction*
$$G(F_x) \ni g \mapsto \langle v^*, g \cdot v \rangle = \langle g^{-1} \cdot v^*, v \rangle$$
est de classe C^∞,
- *le produit scalaire*
$$\langle v^*, \varphi \cdot v \rangle \qquad [\text{resp. } \langle \varphi \cdot v^*, v \rangle]$$
est égal à l'intégrale
$$\int_{G(F_x)} dg \cdot \varphi(g) \cdot \langle v^*, g \cdot v \rangle \quad [\text{resp. } \int_{G(F_x)} dg \cdot \varphi(g) \cdot \langle g \cdot v^*, v \rangle]$$
pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{H}_x^G$.

(iv) *Une représentation "lisse admissible" de $G(\mathbb{A})$ ou $\mathcal{H}^G$ est un produit tensoriel*

$$(\pi, V_\pi) = \bigotimes_{x \in |F|} (\pi_x, V_{\pi_x})$$

de représentations lisses admissibles locales qui sont non ramifiées en presque toute place $x \in |F|_f$.

□

Citons tout de suite :

Lemme C.4. –

Soit $x \in |F|_f$ une place finie de F. Alors :

(i) *Pour tout sous-groupe ouvert compact K_x de $G(F_x)$, le foncteur*

$$V_{\pi_x} \mapsto V_{\pi_x}^{K_x}$$

induit une équivalence de la catégorie des représentations lisses admissibles irréductibles (π_x, V_{π_x}) de $G(F_x)$ telles que $V_{\pi_x}^{K_x} \neq 0$ sur la catégorie des représentations irréductibles de dimension finie de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K_x}^G$.

(ii) *Si G est non ramifié en x, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \mathcal{H}_{x,G(O_x)}^G$ est commutative.*
Par conséquent, ses représentations irréductibles sont de dimension 1, ce sont les caractères.

Remarque :

Il résulte de (i) et (ii) que, si G est non ramifié en x, les représentations non ramifiées irréductibles de $G(F_x)$ correspondent bijectivement aux caractères de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$.

□

Il est possible de préciser la structure de l'algèbre commutative $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x \in |F|_f$ où G est non ramifié. C'est un résultat fondamental de Satake, que nous citons dans sa reformulation par Langlands :

Théorème C.5. –

Soit x une place finie de F en laquelle le groupe réductif G sur F est non ramifié.

Considérons le groupe dual $\widehat{G}$ de G, muni de sa paire de Borel $(\widehat{T},\widehat{B})$ et de l'action du groupe de Galois local non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ induite par celle de Γ_F.

Soit

$$\widehat{G}_x$$

la fibre du produit semi-direct $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ au-dessus de l'élément de Frobenius $\sigma_x \in \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$, munie de l'action de $\widehat{G}$ par conjugaison.

Alors on a un isomorphisme canonique, dit isomorphisme de Satake,

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

de l'algèbre de Hecke sphérique de G en x vers l'algèbre des polynômes sur $\widehat{G}_x$ qui sont invariants par conjugaison par $\widehat{G}$.

Remarques :

(i) Si $G = \mathrm{GL}_r$, l'isomorphisme de Satake s'écrit encore

$$S_x^r : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r = \mathcal{H}_{x,\emptyset}^{\mathrm{GL}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} = \mathbb{C}\,[X_1^{\pm 1},\ldots,X_r^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}$$

où $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ désigne le tore maximal de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{S}_r$ le groupe des permutations de $\{1,2,\ldots,r\}$.

Les représentations non ramifiées de $\mathrm{GL}_r(F_x)$, ou les caractères de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, correspondent aux familles $(z_1,\ldots,z_r) \in (\mathbb{C}^\times)^r$, modulo permutation. On appelle les éléments de ces familles les “valeurs propres de Hecke” des représentations non ramifiées.

(ii) Plus généralement, si G est déployé sur F_x, l'isomorphisme de Satake s'écrit encore

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{\mathfrak{S}_G}$$

où $\mathfrak{S}_G$ désigne le groupe de Weyl de G ou $\widehat{G}$.

Les représentations non ramifiées de $G(F)$, ou les caractères de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, correspondent aux éléments $\lambda \in \widehat{T}$, modulo l'action de $\mathfrak{S}_G$.

(iii) Dans le cas général, considérons un sous-tore T_x^d du groupe réductif quasi-déployé G sur F_x, qui est déployé sur F_x et maximal pour cette propriété. Il est muni, ainsi que son tore complexe dual $\widehat{T}_x^d$, d'une action du groupe de Weyl F_x-rationnel

$$\mathfrak{S}_G^x = \{w \in \mathfrak{S}_G \mid \sigma_x(w) = w\}\,.$$

Alors l'isomorphisme de Satake s'écrit encore

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}\,.$$

Les représentations non ramifiées de $G(F)$, ou les caractères de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, correspondent aux éléments $\lambda \in \widehat{T}_x^d$, modulo l'action de $\mathfrak{S}_G^x$. □

Revenons au problème de la décomposition spectrale des fonctions

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sous l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite.

Voyons d'abord le cas d'un tore T algébrique sur F.

Comme T est commutatif, les représentations lisses admissibles irréductibles de $T(\mathbb{A})$ sont les caractères continus presque partout non ramifiés

$$\chi : T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times .$$

Ceux de ces caractères qui apparaissent dans la décomposition spectrale des fonctions

$$h : T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sont les caractères "automorphes" au sens de triviaux sur $T(F)$.

Parmi les caractères automorphes, on distingue en particulier ceux de la forme

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\chi_1(t)|^{s_1} \dots |\chi_k(t)|^{s_k}$$

pour des caractères algébriques définis sur F

$$\chi_1, \dots, \chi_k : T \to \mathbb{G}_m$$

et des exposants complexes $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{C}$.

Les caractères $T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ de cette forme sont effectivement automorphes d'après la "formule du produit" de la proposition A.8.

Notons $\widehat{\Lambda}_T$ le groupe abélien des caractères automorphes de cette forme, $T(\mathbb{A})^0 \subset T(\mathbb{A})$ le sous-groupe fermé intersection des noyaux des éléments de $\widehat{\Lambda}_T$, et Λ_T le groupe quotient de $T(\mathbb{A})$ par $T(\mathbb{A})^0$.

On a :

Lemme C.6. –

Pour tout tore T algébrique sur F, on a :

(i) *Le groupe abélien $\widehat{\Lambda}_T$ a naturellement la structure d'un groupe de Lie complexe. Sa dimension sur $\mathbb{C}$ est égale au rang du plus grand sous-tore de T déployé sur F.*

(ii) *Si F est un corps de fonctions [resp. un corps de nombres], le groupe topologique quotient $\Lambda_T = T(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})^0$ est isomorphe à une puissance de $\mathbb{Z}$ [resp. de $\mathbb{R}$], si bien que son dual $\widehat{\Lambda}_T$ est isomorphe à une puissance du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ [resp. du groupe additif $\mathbb{C}$].*

(iii) *Le quotient*

$$T(F)\backslash T(\mathbb{A})^0$$

du noyau commun $T(\mathbb{A})^0$ par le sous-groupe discret $T(F)$ est compact.

Remarque :

La partie (iii) implique que, dans le groupe des caractères automorphes de $T(\mathbb{A})$, les orbites sous l'action du sous-groupe $\widehat{\Lambda}_T$ forment une famille discrète.

□

Décrire un caractère automorphe

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

n'est pas facile.

Cependant, un tel caractère est non ramifié en presque toute place finie $x \in |F|_f$ et, d'après la remarque (iii) du théorème C.5, ses composantes non ramifiées χ_x correspondent à des "valeurs propres de Hecke"

$$z_{\chi_x} \in \widehat{T}_x^d = \widehat{T}/\{\sigma_x(\lambda) \cdot \lambda^{-1}, \lambda \in \widehat{T}\}\,.$$

Or on a :

Proposition C.7. –

Deux caractères automorphes

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x\,, \quad \chi' = \bigotimes_{x \in |F|} \chi'_x : T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui ont les mêmes "valeurs propres de Hecke" $z_{\chi_x} = z_{\chi'_x}$ *en presque toutes les places* $x \in |F|_f$*, sont nécessairement égaux.*

□

Ayant examiné le cas des tores, considérons maintenant le problème de décomposition spectrale des fonctions

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dans le cas général d'un groupe réductif arbitraire G sur F.

Pour cela, on a besoin de considérer les sous-groupes paraboliques P de G définis sur F. On rappelle que, à conjugaison près par les élément de $G(F)$, il n'y en a qu'un nombre fini. À chaque tel sous-groupe parabolique P sont associés son radical unipotent N_P, qui est un groupe algébrique unipotent sur F, et le quotient $M_P = P/N_P$ qui est un groupe réductif sur F. Les $N_P(F)$ sont des sous-groupes discrets des groupes topologiques $N_P(\mathbb{A})$, et les quotients $N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})$ sont compacts puisque le quotient $F\backslash\mathbb{A}$ est compact (proposition A.10(ii)).

Le choix d'une mesure de Haar $da = \bigotimes_{x \in |F|} da_x$ du groupe additif $\mathbb{A}$ détermine une mesure de Haar $du = \bigotimes_{x \in |F|} du_x$ de chaque radical unipotent $N_P(\mathbb{A})$. Comme une mesure de Haar $dg = \bigotimes_{x \in |F|} dg_x$ de $G(\mathbb{A})$ est fixée, on peut montrer – en utilisant les décompositions d'Iwasawa ou de Bruhat – que cela détermine aussi une mesure de Haar $dm = \bigotimes_{x \in |F|} dm_x$ de chaque quotient réductif $M_P(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})/N_P(\mathbb{A})$.

Pour tout sous-groupe parabolique P de G sur F, et pour toute fonction localement intégrable

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \quad \text{(ou, plus généralement, } h : P(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C})\,,$$

on notera

$$h_P : M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

la fonction localement intégrable définie par

$$h_P(g) = \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} du \cdot h(ug)\,, \quad \forall\, g \in G(\mathbb{A})\,.$$

Nous pouvons maintenant introduire les notions de fonction automorphe sur $G(\mathbb{A})$ et de représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$:

Définition C.8. –

Soit un groupe réductif G *sur* F*.*

(i) *Une fonction "automorphe" sur $G(\mathbb{A})$ est une fonction localement intégrable*

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telle que, pour tout sous-groupe parabolique P de G et tout tore $T \subset P$ définis sur F, il existe des caractères

$$N_1, \ldots, N_k \in \mathrm{Re}\,\widehat{\Lambda}_T$$

tels que les fonctions quotients

$$T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto \frac{|h_P(tg)|}{\max\{N_1(t), \ldots, N_k(t)\}}\,, \quad g \in G(\mathbb{A})\,,$$

soient bornées par une constante (qui dépend continûment de g).

(ii) *Une représentation lisse admissible irréductible*

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $G(\mathbb{A})$ est dite "automorphe" s'il est possible de la réaliser dans un espace de fonctions automorphes sur $G(\mathbb{A})$, muni de l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite.

□

On remarque que le sous-espace des fonctions automorphes

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telles que

$$h_P = 0\,, \quad \forall\, P \subsetneq G\,,$$

est stable par translation à droite par les éléments de $G(\mathbb{A})$.

Cela conduit à compléter la définition précédente par :

Définition C.9. –

Soit toujours un groupe réductif G sur F.

(i) *Une fonction automorphe*

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est dite "cuspidale" si, pour tout sous-groupe parabolique non trivial $P \subsetneq G$ défini sur F, on a $h_P = 0$.

(ii) *Une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ est dite "cuspidale" s'il est possible de la réaliser dans un espace de fonctions automorphes cuspidales sur $G(\mathbb{A})$, muni de l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite.*

□

Le quotient G^{ab} de G par son sous-groupe des commutateurs est un tore défini sur F. On note $\widehat{\Lambda}_G = \widehat{\Lambda}_{G^{ab}}$ le groupe de Lie complexe associé à G^{ab} au sens du lemme C.6. Les éléments de $\widehat{\Lambda}_G$ définissent des caractères de $G(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $G(F)$; ils agissent donc par produit tensoriel $(\pi, \lambda) \mapsto \pi \otimes \lambda = \pi_\lambda$ sur l'ensemble des représentations automorphes π de $G(\mathbb{A})$.

L'intersection $G(\mathbb{A})^0$ des noyaux des caractères $z \in \widehat{\Lambda}_G$ est un sous-groupe topologique de $G(\mathbb{A})$ qui contient $G(F)$ comme sous-groupe discret. Il est muni d'une mesure de Haar induite par celle de $G(\mathbb{A})$. On montre que le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^0$ est toujours de volume fini mais, contrairement au cas des tores, il n'est pas compact en général. On a toutefois :

Lemme C.10. –

Soit une fonction automorphe cuspidale

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante à droite par un sous-groupe ouvert compact $K_f = \prod_{x \in |F|_f} K_x$ *de* $G(\mathbb{A}_f)$*, et de classe* C^∞ *en la variable* $g_\infty \in \prod_{x \in |F|_\infty} G(F_x)$*.*

Alors la restriction de h *à*

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})^0$$

est à support compact [resp. à décroissance rapide] si F *est un corps de fonctions [resp. un corps de nombres].*

□

La composante neutre Z_G^0 du centre Z_G de G est aussi un tore algébrique sur F, et l'homomorphisme composé

$$Z_G^0 \hookrightarrow G \to G^{ab}$$

est un épimorphisme de tore dont le noyau est fini.

Toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $G(\mathbb{A})$ possède un caractère central

$$\chi_\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_{\pi_x} : Z_G^0(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

presque partout non ramifié. Si la représentation π est automorphe, son caractère central est automorphe, c'est-à-dire invariant par $Z_G^0(F)$. Si de plus π est réalisée dans un espace de fonctions automorphes $h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, celles-ci vérifient nécessairement

$$h(zg) = \chi_\pi(z)\, h(g)\,, \quad \forall\, z \in Z_G^0(\mathbb{A})\,, \quad \forall\, g \in G(\mathbb{A})\,.$$

Contrôler la croissance de ces fonctions automorphes h équivaut donc à contrôler la croissance de leurs restrictions à $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^0$.

C'est pourquoi on pose :

Définition C.11. –

Une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ *est dite "discrète" s'il est possible de la réaliser dans un espace de fonctions automorphes*

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont la restriction à $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^0$ *est de carré intégrable.*

Remarque :

Une représentation automorphe discrète de $G(\mathbb{A})$ est unitaire si et seulement si son caractère central χ_π est unitaire. Elle le devient après tensorisation par un caractère convenable $\lambda \in \widehat{\Lambda}_G$.

□

Le lemme C.10 implique :

Corollaire C.12. –

Toute représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A})$ est discrète.

□

Le lemme suivant fait comprendre que l'étude des représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ peut être ramenée à celle des représentations automorphes cuspidales des groupes $M_P(\mathbb{A})$ associés aux sous-groupes paraboliques P de G.

Lemme C.13. –

Considérons une fonction automorphe à support compact

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Supposons que pour tout sous-groupe parabolique $P \subseteq G$ défini sur F, pour toute fonction automorphe cuspidale

$$\varphi : M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, on ait

$$\int_{M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})} dm \cdot \overline{\varphi(m)} \cdot h_P(m \cdot g) = 0\,.$$

Alors on a

$$h = 0\,.$$

Si π est une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$, notons $\mathrm{Aut}_G(\pi)$ la somme des sous-espaces de fonctions automorphes $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ dans lesquels la représentation π se réalise.

Puis, si P est un sous-groupe parabolique de G défini sur F, que

$$\delta_P : P \to P/N_P = M_P \to \mathbb{G}_m$$

désigne le caractère modulaire par lequel P ou M_P agissent sur $\mathrm{Lie}\,(N_P)$, et que π est une représentation automorphe de $M_P(\mathbb{A})$, notons

$$\mathrm{Aut}_{G,P}(\pi)$$

le sous-espace des fonctions localement intégrables

$$h : M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telles que, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, la fonction

$$M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}) \ni m \mapsto |\delta_P(m)|^{-\frac{1}{2}} \cdot h(mg)$$

soit élément du sous-espace $\mathrm{Aut}_{M_P}(\pi)$.

Langlands a démontré grâce à la théorie des séries d'Eisenstein :

Théorème C.14. –

Soit un groupe réductif G sur F.

(i) *Pour tout sous-groupe parabolique P de G et toute représentation automorphe π de $M_P(\mathbb{A})$, la représentation $\mathrm{Aut}_{G,P}(\pi)$ de $G(\mathbb{A})$ est munie d'un homomorphisme équivariant canonique non nul*

$$\text{“}\sum_{G(F)/P(F)}\text{”} : \mathrm{Aut}_{G,P}(\pi) \to \mathrm{Aut}_G$$

vers l'espace Aut_G des fonctions automorphes $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$.

Si π est unitaire, la représentation $\mathrm{Aut}_{G,P}(\pi)$ est unitaire ainsi donc que son image dans Aut_G.

(ii) *Pour toute représentation automorphe [resp. et unitaire] π de $G(\mathbb{A})$, il existe un sous-groupe parabolique $P \subseteq G$ et une représentation automorphe cuspidale [resp. discrète unitaire] π_P de $M_P(\mathbb{A})$ telle que $\mathrm{Aut}_G(\pi)$ soit contenu dans l'image de l'homomorphisme*

$$\text{“}\sum_{G(F)/P(F)}\text{”} : \mathrm{Aut}_{G,P}(\pi_P) \to \mathrm{Aut}_G\,.$$

Remarque :

Ce théorème fait comprendre que la décomposition spectrale des fonctions automorphes de carré intégrable

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

doit faire apparaître

- une somme finie sur des représentants des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques P de G,
- une somme discrète sur des représentants des orbites sous l'action de $\mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_{M_P}$ des représentations automorphes discrètes unitaires π_P des $M_P(\mathbb{A})$,
- une somme continue sur les $\pi_P \otimes \lambda_P$, $\lambda_P \in \mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_P$.

$\square$

Ayant exploré la théorie spectrale des fonctions automorphes sur les groupes réductifs, nous allons terminer ce paragraphe par l'énoncé du principe de fonctorialité de Langlands.

Commençons par la définition suivante :

Définition C.15. –

Étant donnés deux groupes réductifs G et H sur le corps global F, on appelle “homomorphisme de transfert” tout automorphisme continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

qui fait commuter le triangle :

$$\begin{tikzcd} \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{H} \rtimes \Gamma_F \arrow[dl] \\ & \Gamma_F & \end{tikzcd}$$

On dit qu'un tel homomorphisme ρ est non ramifié en une place $x \in |F|_f$ si G et H sont non ramifiés en x et que la restriction de ρ à $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}$ se factorise en

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}\,.$$

On note S_ρ le lieu de ramification de ρ : c'est le plus petit sous-ensemble de $|F|$ contenant $|F|_\infty$ tel que ρ est non ramifié en toute place $x \in |F| - S_\rho$. C'est toujours un ensemble fini.

Remarque :

Lorsque $H = \mathrm{GL}_r$ et donc $\widehat{H} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, ρ consiste en un homomorphisme continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

On parle alors de "représentation de transfert" de G.

□

L'isomorphisme de Satake du théorème C.5 implique :

Corollaire C.16. –

Soit un homomorphisme de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

entre deux groupes réductifs G et H sur F.

Alors ρ induit en toute place non ramifiée $x \in |F| - S_\rho$ un homomorphisme d'algèbres

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

et, par conséquent, une application $(\rho_x)_*$ de l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ dans celui de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ ou, si l'on préfère, de l'ensemble des représentations lisses admissibles irréductibles non ramifiées de $G(F_x)$ dans celui de $H(F_x)$.

Démonstration :

En effet, ρ induit un homomorphisme

$$\widehat{G} \to \widehat{H}$$

et, en toute place $x \in |F| - S_\rho$, un morphisme

$$\widehat{G}_x \to \widehat{H}_x$$

compatible avec les actions par conjugaison de $\widehat{G}$ et $\widehat{H}$.

La conclusion résulte donc de l'existence des isomorphismes de Satake

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}} \quad \text{et} \quad S_x^H : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{H}_x]^{\widehat{H}}\,.$$

□

Nous pouvons énoncer maintenant le principe de fonctorialité de Langlands :

Conjecture C.17. –

Soient F un corps global, G un groupe réductif sur F, H un groupe réductif quasi-déployé sur F et

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

un homomorphisme de transfert.

Alors, pour toute représentation automorphe [resp. et unitaire] de $G(\mathbb{A})$,

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x \, ,$$

il existe une représentation automorphe [resp. et unitaire] de $H(\mathbb{A})$,

$$\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x \, ,$$

telle que, en toute place $x \in |F| - S_\rho$ *où* π_x *est non ramifiée,* π'_x *est non ramifiée et*

$$\pi'_x = (\rho_x)_* \, (\pi_x) \, .$$

Remarques :

(i) Le principe de fonctorialité est évident dans le cas où H est un tore algébrique T sur F.

En effet, l'homomorphisme de transfert ρ est alors dual d'un homomorphisme

$$T \to G$$

qui se factorise à travers la composante neutre Z_G^0 du centre Z_G de G.

Le transfert de Langlands de G vers $H = T$ consiste alors à associer à toute représentation automorphe π de $G(\mathbb{A})$ la restriction à $T(\mathbb{A})$ de son caractère central $\chi_\pi : Z_G^0(F) \backslash Z_G^0(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$.

(ii) Pour notre part, nous nous intéressons au cas où $G = \mathrm{GL}_r$. Il n'est pas inutile de connaître la généralisation suivante de la proposition C.7 aux groupes linéaires $H = \mathrm{GL}_r$:

Une représentation automorphe cuspidale $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ est entièrement caractérisée par la donnée de ses facteurs locaux π_x en presque toute place $x \in |F|$.

De plus, une telle représentation automorphe cuspidale π apparaît avec la multiplicité 1 dans l'espace des fonctions automorphes sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. Autrement dit, la sous-représentation $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}_r}(\pi)$ est irréductible.

$\square$

Bibliographie

• A. Braverman et D. Kazhdan, 2000, "γ-functions of representations and lifting" (avec un appendice par V. Vologodsky), in "Visions in Mathematics", GAFA 2000 Special Volume, Part I, p. 237-278.

• J.W. Cogdell et I.I. Piatetski-Shapiro, 1994, "Converse theorems for GL_n", Publications mathématiques de l'IHES, numéro 79, p. 157-214.

• R. Godement et H. Jacquet, 1972, "Zeta functions of simple algebras", LNM 260, Springer-Verlag.

• H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro et J.A. Shalika, 1983, "Rankin-Selberg convolutions", American journal of mathematics 105, p. 367-464.

• H. Jacquet et J.A. Shalika, 1985, "A lemma on highly ramified ϵ-factors", Mathematische Annalen 271, p. 319-332.

• L. Lafforgue, 2012, "Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires", prépublication de l'IHÉS numéro M/12/28.

• C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, 1993, "Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein", Progress in mathematics, volume 113, Birkhäuser.

• J. Tate, 1950, "Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions", thèse de doctorat (Princeton) reproduite dans : J.W.S. Cassels et A. Fröhlich (éditeurs), "Algebraic number theory", Academic Press (1967), p. 305-347.