L'indépendance de ℓ de la cohomologie ℓ-adique et la correspondance de Langlands sont-elles des équivalences de Morita entre topos classifiants ?

(notes d'un exposé donné au séminaire de logique catégorique de l'Université de Paris VII, le mercredi 27 février 2013)*

par Laurent Lafforgue

* Cet exposé fait suite à un autre, "La théorie de Caramello : un cadre en construction pour des correspondances du type de celle de Langlands ?", donné à l'IHES le jeudi 14 février 2013. Les notes de cet autre exposé sont également disponibles sur le site de l'auteur.

Cet exposé est inspiré par le récent cours de recherche d'Olivia Caramello (donné à l'Université de Paris VII en janvier 2013) sur le rôle des "topos de Grothendieck comme ponts unifiants en mathématiques".

Il est d'abord destiné à des mathématiciens qui seraient prêts à travailler comme elle sur les équivalences de Morita entre théories mathématiques, c'est-à-dire sur les équivalences entre "topos classifiants" de théories.

Le but de l'exposé est de présenter le plus rapidement et le plus concrètement possible un double problème fondamental de la géométrie algébrique et du programme de Langlands qui ressemble beaucoup à un problème d'existence d'équivalences de Morita ou de morphismes géométriques entre topos classifiants. Comme la théorie de Caramello développe un cadre pour la recherche et l'étude de relations entre théories mathématiques différentes dont les objets se correspondent, il est naturel de se demander si les problèmes de la géométrie algébrique et du programme de Langlands que nous présentons ici entrent dans ce cadre.

Pour travailler dans cette perspective, il serait sans doute moins nécessaire d'être spécialiste de la géométrie algébrique et du programme de Langlands que d'avoir appris à travailler avec les topos et les équivalences de Morita tels qu'étudiés par Caramello et présentés dans son cours. Au contraire, peut-être serait-il préférable de ne pas trop bien connaître les méthodes classiques, de façon à pouvoir adopter plus facilement la manière originale de voir les choses que permet la théorie des topos classifiants.

Je remercie Olivia Caramello pour ses explications sur le contenu de son cours et de ses articles. Le paragraphe 11 et dernier est entièrement le fruit de conversations avec elle.

Je remercie Hélène Esnault dont une question au cours de l'exposé oral – sur la compatibilité des équivalences de Morita ou des morphismes géométriques entre topos classifiants recherchés avec la formation des invariants numériques – a amené à préciser le contenu de ce paragraphe de conclusion.

Enfin, je remercie Cécile Gourgues qui a réalisé la frappe de ce texte avec sa perfection et sa célérité coutumières.

Sommaire

1 Rappels du cours de Caramello

Nous renvoyons pour une présentation plus détaillée aux notes de notre précédent exposé : "La théorie de Caramello : un cadre en construction pour des correspondances du type de celle de Langlands ?" Ici, contentons-nous de rappeler que cette théorie est fondée sur les définitions et les faits suivants :

- Par définition, un topos est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site (au sens de Grothendieck).
- Il existe une notion de "morphisme géométrique" de topos qui fait des topos une 2-catégorie.
- Pour toute théorie géométrique (du premier ordre) $\mathbb{T}$, associer à tout topos $\mathcal{E}$ la catégorie $\mathbb{T}$-mod $(\mathcal{E})$ des modèles de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ définit un 2-foncteur sur la 2-catégorie des topos. D'après Joyal et Reyes ($\sim$ 1975), ce 2-foncteur est toujours représentable par un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, bien défini à équivalence près, appelé le "topos classifiant" de la théorie $\mathbb{T}$. Les modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$ correspondent aux "points" de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ mais $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ a une structure beaucoup plus riche que la classe de ses points puisque sa connaissance équivaut à celle des modèles de $\mathbb{T}$ dans n'importe quel topos. C'est une différence analogue à celle entre un schéma et l'ensemble de ses points.
- Le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ est associé à un site construit explicitement à partir de $\mathbb{T}$, son "site syntactique".
- Deux théories géométriques complètement différentes, ou plus généralement deux sites complètement différents, peuvent avoir des topos associés équivalents. On parle alors d'équivalence de Morita de ces théories géométriques ou de ces sites. De manière imagée, deux théories géométriques (qui sont des objets syntactiques, appartenant à la logique) sont équivalentes au sens de Morita si et seulement si elles expriment (sémantiquement) des contenus mathématiques équivalents.
- Les théories d'ordre supérieur devraient être classifiées par les topos supérieurs (introduits par Toën et Vezzosi, et étudiés par Lurie). Cependant il n'est pas rare de pouvoir associer naturellement à une théorie d'ordre supérieur un site (qui est un objet d'ordre 2) et donc un topos. Cela induit une notion d'équivalence de Morita élargie, mais moins systématique et plus faible que celle des théories géométriques du premier ordre.

2 Variétés algébriques et schémas

En géométrie algébrique arithmétique, on s'intéresse aux variétés algébriques X_F sur les corps F qui sont de type fini (c'est-à-dire engendrés par un nombre fini d'éléments) sur leur corps premier $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$.

Ces corps F sont les corps de fonctions rationnelles

$$F = F(S)$$

sur les schémas S intègres et de type fini sur $\mathbb{Z}$.

Particulièrement importants sont les cas où F est un "corps global" c'est-à-dire

– un "corps de nombres" : $\mathbb{Q}$ ou une extension finie de $\mathbb{Q}$,
– un "corps de fonctions", c'est-à-dire le corps des fonctions rationnelles $F = F(S)$ sur une courbe S lisse (projective) et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.

Si $F = F(S)$ comme ci-dessus, et si X est un schéma (réduit) quasi-projectif sur S, la fibre générique X_F de X sur F est une variété algébrique sur F. Réciproquement, on a :

Lemme –

Pour toute variété quasi-projective [resp. lisse, resp. projective] X_F sur $F = F(S)$, et quitte à remplacer S par un ouvert de Zariski, il existe un schéma réduit plat quasi-projectif [resp. lisse, resp. projectif] X sur S dont la fibre générique s'identifie à X_F.

$\square$

À la suite de Weil, les géomètres algébristes ont cherché à associer à toute telle variété algébrique X_F sur F des groupes de cohomologie H^i tels que :

- les H^i soient des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps de caractéristique 0,
- les H^i soient munis d'une action naturelle du groupe de Galois $\Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\bar{F})$ de F,
- si F se plonge dans $\mathbb{C}$, les H^i aient même dimension que les espaces de cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de la variété complexe $X_F(\mathbb{C})$ et, en particulier, soient nuls en dehors de $0 \leq i \leq 2 \dim X_F$.

Grothendieck a apporté une première réponse à cette question, avec les espaces de cohomologie ℓ-adique

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

de $X_{\overline{F}} = X_F \otimes_F \overline{F}$, pour tout nombre premier $\ell \neq \mathrm{car}(F)$.

La cohomologie ℓ-adique

$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

d'un schéma X est une famille d'invariants du "topos étale" associé au "site étale" de ce schéma.

3 Site étale et groupe fondamental

Pour tout homomorphisme d'anneaux commutatifs $A \to B$, le B-module $\Omega_{B/A}$ des différentielles de B sur A est défini comme le quotient du B-module libre sur les éléments notés formellement

$$\mathrm{d}b\,, \quad b \in B\,,$$

par le sous-module engendré par les relations

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(b+b') = \mathrm{d}b + \mathrm{d}b'\,, \quad \forall\, b, b' \in B\,,\\
&\mathrm{d}(bb') = b \cdot \mathrm{d}b' + b' \cdot \mathrm{d}b\,, \quad \forall\, b, b' \in B\,,\\
&\mathrm{d}a = 0\,, \quad \forall\, a \in A\,.
\end{aligned}$$

Définition –

Un homomorphisme $A \to B$ est dit

– *non ramifié si $\Omega_{B/A} = 0$,*

– *étale s'il est de présentation finie, plat et non ramifié.*

Ces notions sont locales pour la topologie de Zariski. Pour tout morphisme de schémas $Y \to X$, on peut définir le O_Y-Module quasi-cohérent $\Omega_{Y/X}$ des différentielles de Y sur X et poser :

Définition –

Un morphisme de schémas $Y \to X$ est dit

– *non ramifié si $\Omega_{Y/X} = 0$,*

– *étale s'il est localement de présentation finie, plat et non ramifié.*

On en déduit la définition du site étale d'un schéma :

Définition –

Le site étale d'un schéma X est défini comme suit :

- *Ses objets sont les morphismes étales $Y \to X$.*
- *Ses flèches $(Y \to X) \to (Y' \to X)$ sont les morphismes $Y \to Y'$ compatibles avec les projections sur X. Ils sont nécessairement étales.*
- *Ses cribles couvrants $(Y_i \to Y)_{i \in I}$ sont les familles universellement épimorphiques.*

Le topos étale d'un schéma X est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le site étale.

Tout morphisme de schémas $X \xrightarrow{b} Y$ induit un morphisme géométrique (f^*, f_*) entre les topos étales associés, et donc aussi entre les catégories de faisceaux étales abéliens. Entre ces dernières, le foncteur f^* est exact, tandis que le foncteur f_* est exact à gauche et admet des foncteurs dérivés à droite $R^i f_*$.

Donnons maintenant la définition du groupe fondamental étale. On rappelle qu'un morphisme de schémas $Y \to X$ est dit "fini" si l'image réciproque de tout ouvert affine $\mathrm{Spec}(A)$ de X est un ouvert affine $\mathrm{Spec}(B)$ tel que B soit un A-module de présentation finie.

Théorème –

Soit X un schéma nœthérien connexe. Alors :

(i) *La catégorie des morphismes finis étales $Y \to X$ est galoisienne.*

(ii) *De plus, pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, le foncteur*

$$(Y \to X) \mapsto Y(\overline{x})$$

est un "foncteur fibre" de cette catégorie galoisienne : le groupe $\pi_1(X, \overline{x})$ de ses automorphismes est un groupe topologique profini, et il induit une équivalence avec la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de $\pi_1(X, \overline{x})$.

4 Faisceaux ℓ-adiques et cohomologie ℓ-adique

Soit X un schéma nœthérien, et soit ℓ un nombre premier.

Définition –

Un faisceau ℓ-adique sur X est un système projectif de faisceaux étales de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-modules $(L_n)_{n \geq 1}$ reliés par des homomorphismes $L_{n+1} \to L_n$ induisant des isomorphismes

$$L_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} L_n \, .$$

La catégorie des faisceaux ℓ-adiques sur X est une catégorie abélienne linéaire sur $\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim_n \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$. On la rend linéaire sur $\mathbb{Q}_\ell$ en conservant les mêmes objets et en transformant les $\mathbb{Z}_\ell$-modules d'homomorphismes par $\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

Définition –

Soit $(L_n)_{n \geq 1}$ un faisceau ℓ-adique sur X.

(i) *Il est dit "lisse" de rang r si chaque L_n, $n \geq 1$, est localement libre de rang r comme faisceau étale de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-modules.*

(ii) *Il est dit "constructible" si X peut être recouvert par des sous-schémas localement fermés $Y \hookrightarrow X$ tels que sa restriction à chaque Y soit un faisceau ℓ-adique lisse.*

On a :

Théorème –

Si X est un schéma nœthérien normal connexe, et $\overline{x}$ un point géométrique de X, la catégorie des faisceaux ℓ-adiques lisses sur X est équivalente à la catégorie des représentations continues de $\pi_1(X,\overline{x})$ dans des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie.

Remarques :

- Si F est un corps, un faisceau ℓ-adique lisse (= constructible) sur $\mathrm{Spec}(F)$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de $\Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\overline{F})$.
- Si X est normal et connexe, et que $F = F(X)$ est son corps des fonctions, un faisceau ℓ-adique lisse sur X est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de $\Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\overline{F})$ qui se factorise, de manière nécessairement unique, à travers $\pi_1(X,\overline{K})$.
- Si x est un point fermé de X dont le corps résiduel κ_x est fini, la fibre en x d'un faisceau ℓ-adique constructible sur X est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace de dimension finie muni d'une action du générateur topologique σ_x (l'élément de Frobenius) de $\Gamma_{\kappa_x} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$.

$\square$

Passons maintenant à la cohomologie ℓ-adique :

Théorème –

Considérons un schéma intègre de type fini S sur $\mathbb{Z}$, un nombre premier ℓ inversible sur S, et un schéma X quasi-projectif et plat sur S. Alors :

(i) *Les faisceaux de cohomologie ℓ-adique de $X \xrightarrow{p} S$*

$$R^i p_* \mathbb{Q}_\ell = \varprojlim_n R^i p_* (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

sont des faisceaux ℓ-adiques constructibles sur S. Ils sont nuls en degrés $i > 2\dim(X/S)$.

(ii) *Leur formation, qui commute par définition avec les changements de base étales $S' \to S$, commute même avec les changements de base lisses.*

(iii) *Leur formation commute avec les changements de base arbitraires si $X \xrightarrow{p} S$ est projectif.*

(iv) *Pour tout point fermé s de S de corps résiduel $\kappa_s \cong \mathbb{F}_{q_s}$, et pour toute extension finie $\mathbb{F}_{q_s^n}$ de $\mathbb{F}_{q_s} \cong \kappa_s$, on a*

$$\sum_i (-1)^i \ \mathrm{Tr}(\sigma_x^n, H^i(\overline{X}_s, \mathbb{Q}_\ell)) = \# X_s(\mathbb{F}_{q_s^n})$$

qui, remarquons-le, est un entier indépendant de ℓ.

(v) *Si la projection $X \xrightarrow{p} S$ est projective et lisse, les faisceaux de cohomologie ℓ-adique*

$$R^i p_* \mathbb{Q}_\ell$$

sont lisses sur S. $\square$

Pour S et ℓ comme dans le théorème, tout morphisme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

entre deux schémas X' et X quasi-projectifs et plats sur S induit des homomorphismes entre faisceaux ℓ-adiques de cohomologie

$$R^i f^* : R^i p_* \mathbb{Q}_\ell \to R^i p'_* \mathbb{Q}_\ell \, .$$

Par conséquent, tout morphisme

$$X'_F \xrightarrow{f} X_F$$

entre deux variétés quasi-projectives X'_F et X_F sur $F = F(S)$ induit des homomorphismes entre représentations ℓ-adiques de $\Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\overline{F})$

$$R^i f^* : H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X'_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \, .$$

Si X_F et X'_F sont projectives et lisses sur F, on a même que tout sous-schéma fermé de même dimension que X'_F

$$Z \hookrightarrow X_F \times X'_F$$

induit des homomorphismes de représentations ℓ-adiques

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X'_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \, .$$

Définition –

Soit F un corps de type fini sur son corps premier, c'est-à-dire le corps des fonctions rationnelles $F = F(S)$ d'un schéma S normal, connexe et de type fini sur $\mathbb{Z}$.

Soit ℓ un nombre premier inversible dans F.

Appelons "catégorie des représentations ℓ-adiques géométriques" la plus petite sous-catégorie abélienne et $\mathbb{Q}$-linéaire de la catégorie $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire des représentations ℓ-adiques (de rang fini) qui

- *est stable par les foncteurs de produit tensoriel et de passage aux représentations duales $V \to V^*$, et contient les homomorphismes canoniques de traces $V \otimes V^* \to \mathbb{Q}_\ell$,*

- *contient comme objets les espaces de cohomologie $H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ des variétés X_F quasi-projectives sur F,*
- *contient comme morphismes les homomorphismes*

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X'_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

induits par des morphismes de variétés $X'_F \to X_F$.

Remarques :

(i) On peut appeler "représentations ℓ-adiques géométriques" les objets de cette catégorie et "homomorphismes géométriques" ses morphismes.

D'autre part, fixant un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on peut appeler "représentations ℓ-adiques géométriques absolues" les objets de la catégorie abélienne et $\overline{\mathbb{Q}}$-linéaire engendrée sur $\overline{\mathbb{Q}}$ par la catégorie abélienne et $\mathbb{Q}$-linéaire des représentations ℓ-adiques géométriques.

(ii) La catégorie des "représentations ℓ-adiques géométriques" ainsi définie comprend les morphismes $H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X'_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ entre espaces de cohomologie ℓ-adique de variétés projectives lisses X_F, X'_F sur F induits par les correspondances $Z \hookrightarrow X_F \times X'_F$.

(iii) Il résulte du théorème ci-dessus que toute représentation ℓ-adique géométrique de Γ_F est de dimension finie et se factorise à travers le groupe fondamental $\pi_1(S', \overline{F})$ d'un ouvert de Zariski S' de S.

□

5 La question de l'indépendance de ℓ

On a la conjecture générale suivante :

Conjecture –

Soient S un schéma normal, connexe et de type fini sur $\mathbb{Z}$, et $F = F(S)$ son corps des fractions.

Soient ℓ et ℓ' deux nombres premiers différents de la caractéristique de F.

Alors il devrait exister une équivalence naturelle, compatible avec la structure $\mathbb{Q}$-linéaire, le produit tensoriel et le passage au dual, entre la catégorie des "représentations ℓ-adiques géométriques" et celle des "représentations ℓ'-adiques géométriques".

Dans cette équivalence, les espaces de cohomologie

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \quad et \quad H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_{\ell'})$$

des variétés X_F sur F devraient se correspondre, et les homomorphismes

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X'_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \quad et \quad H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_{\ell'}) \to H^i(X'_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_{\ell'})$$

induits par un même morphisme de variétés $X'_F \to X_F$ devraient se correspondre.

$\square$

Une telle conjecture pose les questions suivantes :

(1) Pour $\ell \neq \mathrm{car}(F)$, est-il possible de caractériser intrinsèquement celles des représentations ℓ-adiques de Γ_F qui sont géométriques ?

(2) Pour $\ell, \ell' \neq \mathrm{car}(F)$, est-il possible de caractériser intrinsèquement la correspondance entre "représentations ℓ-adiques géométriques" et "représentations ℓ'-adiques géométriques" de Γ_F ?

(3) Pour $\ell \neq \mathrm{car}(F)$, est-il possible de caractériser intrinsèquement les homomorphismes entre représentations ℓ-adiques de Γ_F qui sont géométriques ?

(4) Pour $\ell, \ell' \neq \mathrm{car}(F)$, est-il possible de caractériser intrinsèquement la correspondance entre homomorphismes géométriques de représentations ℓ-adiques et ℓ'-adiques de Γ_F ?

Faute de disposer d'aucune structure $\mathbb{Q}$-rationnelle intrinsèque naturelle dans la catégorie des représentations ℓ-adiques de Γ_F, on ne peut rien dire pour (4), et pour (3) on peut seulement conjecturer :

Conjecture (Tate) –

Si $\ell \neq \mathrm{car}(F)$ et V, V' sont deux représentations ℓ-adiques géométriques, le $\mathbb{Q}_\ell$-espace des homomorphismes Γ_F-équivariants

$$V \to V'$$

est engendré sur $\mathbb{Q}_\ell$ par le $\mathbb{Q}$-sous-espace des homomorphismes géométriques.

En ce qui concerne (1) et (2), il faut distinguer entre les représentations semi-simples (sommes directes de représentations irréductibles) et les autres. Toute représentation ℓ-adique de dimension finie V de Γ_F admet une filtration équivariante dont les sous-quotients successifs sont irréductibles ; la somme directe V^{ss} de ces sous-quotients ne dépend pas de la filtration choisie, à isomorphisme près, et s'appelle la semi-simplifiée de V.

On s'attend certainement à ce que :

– Si V est une représentation ℓ-adique géométrique de Γ_F, sa semi-simplifiée V^{ss} est géométrique, et tous ses facteurs directs sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sont des représentations ℓ-adiques géométriques absolues.

– Si V est une représentation ℓ-adique géométrique, et V' une représentation ℓ'-adique géométrique qui lui correspond, alors V^{ss} et V'^{ss} se correspondent.

On ne sait rien dire de plus, même conjecturalement, pour les représentations qui ne sont pas semi-simples.

Pour les représentations ℓ-adiques irréductibles et semi-simples, on conjecture d'abord :

Conjecture –

On suppose toujours que ℓ est un nombre premier différent de la caractéristique du corps F.

(i) *Pour toute variété projective et lisse X_F sur F, les espaces de cohomologie ℓ-adique*

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)\,, \quad i \geq 0\,,$$

sont semi-simples comme représentations ℓ-adiques de dimension finie du groupe profini $\Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\overline{F})$.

(ii) *Réciproquement, tout objet irréductible de la catégorie des représentations ℓ-adiques géométriques peut s'écrire, après tensorisation par une puissance tensorielle assez grande de la représentation géométrique de dimension 1*

$$H^2(\mathbb{P}^1_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)\,,$$

comme facteur direct d'un espace de cohomologie

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

d'une variété X_F projective et lisse sur F.

Si S est un schéma normal, connexe et de type fini sur $\mathbb{Z}$, $F = F(S)$ son corps des fonctions rationnelles, et ℓ un nombre premier inversible sur S, on a vu que toute repésentation ℓ-adique géométrique de Γ_F provient d'un faisceau ℓ-adique lisse sur un ouvert de Zariski S' de S, c'est-à-dire se factorise à travers $\pi_1(S', \overline{F})$.

Or, pour tout faisceau ℓ-adique lisse V de rang r sur un tel ouvert S', sa fibre en tout point fermé $s = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s})$ peut être vue comme un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel V_s de dimension r muni d'une action de l'élément de Frobenius σ_s et on peut considérer les traces

$$\mathrm{Tr}(\sigma_s^n, V_s)\,, \quad n \geq 1\,.$$

Il en va de même pour tout faisceau ℓ-adique lisse absolu sur S', c'est-à-dire pour tout objet de la catégorie abélienne et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaire engendrée sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par la catégorie abélienne et $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire des faisceaux ℓ-adiques lisses sur S'.

On a :

Proposition –

Considérons comme ci-dessus un ouvert de Zariski S' de S.

Considérons tous les faisceaux ℓ-adiques lisses absolus irréductibles V sur S'.

Alors la famille des fonctions associées

$$s = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s}) \mapsto \mathrm{Tr}(\sigma_s, V_s)$$

$$\textit{[resp.} \qquad (s,n) \mapsto \mathrm{Tr}(\sigma_s^n, V_s)\,\textit{]}$$

sur l'ensemble des points fermés $s = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s})$ *de* S' *[resp. et des entiers* $n \geq 1$*] est linéairement libre.*

Remarque :

Cela implique que les représentations semi-simples de $\pi_1(S', \overline{F})$ (ou, plus généralement, les sommes formelles à coefficients scalaires arbitraires de représentations irréductibles) sont entièrement déterminées par leurs fonctions traces des éléments de Frobenius des points fermés de S'.

□

À propos de l'action des éléments de Frobenius, Deligne a démontré le théorème fondamental suivant :

Théorème –

Soit X_F *une variété projective et lisse sur* $F = F(S)$*, écrite comme la fibre générique d'un schéma* X *projectif et lisse sur un ouvert de Zariski* S' *de* S*.*

Alors les représentations ℓ*-adiques de* $\pi_1(S', \overline{F})$

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

sont "pures de poids i*" au sens que, pour tout point fermé* $s = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s})$ *de* S'*, les valeurs propres de* σ_s *dans* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ *sont algébriques sur* $\mathbb{Q}$ *et ont pour module*

$$q_s^{i/2}$$

pour n'importe quel plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$*.*

Remarque :

Ce théorème, combiné avec la proposition précédente, implique que les représentations ℓ-adiques semi-simplifiées

$$H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{ss}}\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

sont entièrement déterminées sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (et donc conjecturalement sur $\overline{\mathbb{Q}}$) par la fonction sur les points fermés de S'

$$s = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s}) \mapsto \sum_{i \geq 0} (-1)^i \,\mathrm{Tr}(\sigma_s, H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell))\,.$$

□

Ce théorème implique les conditions nécessaires suivantes sur les représentations ℓ-adiques géométriques irréductibles :

Corollaire –

Soient toujours S *un schéma normal, connexe et de type fini sur* $\mathbb{Z}$*,* $F = F(S)$ *son corps des fonctions et* ℓ *un nombre premier inversible sur* S*.*

Alors tout objet irréductible V *de la catégorie des représentations* ℓ*-adiques géométriques [resp. géométriques absolues] de* Γ_F *vérifie les propriétés suivantes :*

- *la représentation V se factorise à travers le groupe fondamental $\pi_1(S', \overline{F})$ d'un ouvert de Zariski S' de S,*
- *elle est pure d'un certain poids $i \in \mathbb{Z}$ au sens que, pour tout point fermé $s = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s})$ de S', toutes les valeurs propres de σ_s agissant dans V sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ et ont toutes leurs normes archimédiennes égales à $q_s^{i/2}$,*
- *de plus, toutes les normes ℓ-adiques de ces valeurs propres sont égales à 1.*

Remarque :

La dernière condition résulte de ce qu'une représentation ℓ-adique de rang fini d'un groupe profini stabilise nécessairement un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau de son espace sur $\mathbb{Q}_\ell$.

□

On a encore :

Corollaire –

Considérant cette fois deux nombres premiers ℓ, ℓ' inversibles sur S, et choisissant deux plongements de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$, la correspondance conjecturée entre objets irréductibles (ou semi-simples) V et V' des catégories des représentations ℓ-adiques et ℓ'-adiques géométriques [resp. géométriques absolues] de $\pi_1(S', \overline{F})$ serait entièrement déterminée par les identités numériques

$$\mathrm{Tr}(\sigma_s^n, V) = \mathrm{Tr}(\sigma_s^n, V'), \quad \forall\, s = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s}), \quad \forall\, n \geq 1 .$$

Remarque :

Cela impliquerait que les valeurs propres de l'élément de Frobenius σ_s en un point fermé $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s})$ de S' ont toutes leurs normes ℓ'-adiques égales à 1, pour tous les nombres premiers $\ell' \neq \mathrm{car}(\mathbb{F}_{q_s})$.

□

S'agissant enfin du problème de caractériser celles des représentations ℓ-adiques irréductibles qui sont géométriques, on conjecture :

Conjecture –

Toujours dans les mêmes conditions, considérons un ouvert de Zariski S' de S et un faisceau ℓ-adique lisse absolu V de rang r sur S'. Alors :

(i) *Si F est de caractéristique finie $p \neq \ell$,*

- *V est géométrique si et seulement si $\det(V) = \Lambda^r V$ est géométrique,*
- *V est géométrique si $\det(V) = \Lambda^r V$ est d'ordre fini,*
- *V devient géométrique après tensorisation par un faisceau ℓ-adique lisse absolu de rang 1 convenable.*

(ii) *Si F est de caractéristique* 0*, la condition pour V d'être géométrique ne dépend que de son image réciproque sur le schéma ℓ-adique $S' \otimes_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_\ell)$.*

Remarques :

(i) Si F est le corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini, les conjectures de (i) sont démontrées, ainsi que les correspondances entre représentations ℓ-adiques et ℓ'-adiques géométriques irréductibles, pour tous les nombres premiers $\ell, \ell' \neq \mathrm{car}(F)$.

Cela résulte de la correspondance de Langlands pour un tel corps de fonctions F.

(ii) Si $\mathrm{car}(F) = p \neq 0$ et S' est de dimension arbitraire mais lisse, Drinfeld a récemment montré que pour tous nombres premiers $\ell, \ell' \neq p$ et tout choix de plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$, les identités

$$\mathrm{Tr}(\sigma_s^n, V) = \mathrm{Tr}(\sigma_s^n, V')\,, \quad \forall\, s = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_s}) \in S'\,, \quad \forall\, n \geq 1\,,$$

définissent des correspondances bijectives entre faisceaux ℓ-adiques et ℓ'-adiques lisses absolus sur S' qui sont irréductibles de même rang $r \geq 1$ et dont les déterminants $\det(V) = \Lambda^r V$ et $\det(V') = \Lambda^r V'$ sont d'ordre fini.

La démonstration de Drinfeld ramène le cas où $\dim S' \geq 2$ au cas des courbes, mais elle ne prouve pas que les représentations en question sont géométriques.

(iii) Si F est $\mathbb{Q}$ (ou un corps de nombres), la conjecture (ii) a été rendue précise par Fontaine et Mazur. La condition qu'ils donnent porte sur l'action sur le $\mathbb{Q}_\ell$-espace de la représentation du groupe de Galois local $\Gamma_{\mathbb{Q}_\ell} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

$\square$

En résumé, le grand problème qui est posé est le suivant :

Problème –

On considère un groupe pro-fini Γ qui est le groupe de Galois $\Gamma = \Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\overline{F})$ d'un corps de fonctions rationnelles $F = F(S)$ sur un schéma S normal, connexe et de type fini sur $\mathbb{Z}$.

On voudrait pouvoir associer à Γ une catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire, munie d'un produit tensoriel et d'un passage au dual, telle que, pour tout nombre premier $\ell \neq \mathrm{car}(F)$:

- *cette catégorie s'envoie naturellement dans celle des représentations ℓ-adiques de Γ_F,*
- *les foncteurs de cohomologie ℓ-adique $H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ des variétés de type fini X_F sur F se factorisent à travers cette catégorie.*

$\square$

6 Corps globaux et adèles

Si F est le corps des fonctions d'une coube sur un corps fini de caractéristique p, et ℓ, ℓ' sont deux nombres premiers différents de p, la correspondance entre représentations ℓ-adiques et ℓ'-adiques géométriques semi-simples de rang r est établie via une paramétrisation commune par les représentations automorphes du groupe linéaire GL_r à coefficients dans l'anneau $\mathbb{A}_F$ des adèles de F.

Si F est un corps de nombre, on ne connaît de cette correspondance que des bribes, mais qui passent aussi par une paramétrisation commune par des représentations automorphes.

Afin de présenter cette paramétrisation, nous devons revoir rapidement

- la théorie des anneaux d'adèles $\mathbb{A}_F$ d'un corps global F,
- la théorie des groupes réductifs sur un corps,
- la théorie des représentations automorphes d'un groupe réductif G sur l'anneau $\mathbb{A}_F$ des adèles d'un corps global F.

Revoyons d'abord la théorie des adèles d'un corps global F.

Proposition –

Il est possible d'associer à tout corps global F un ensemble infini dénombrable $|F|$ de normes, c'est-à-dire d'applications

$$|\bullet|_x : F \to \mathbb{R}_+ \,, \quad x \in |F| \,,$$

vérifiant

$$\begin{cases} |\gamma \cdot \gamma'|_x = |\gamma|_x \cdot |\gamma'|_x \,, & \forall\, \gamma, \gamma' \in F \,, \\ |\gamma + \gamma'|_x \leq |\gamma|_x + |\gamma'|_x \,, & \forall\, \gamma, \gamma' \in F \,, \\ |1|_x = 1 \,, \quad |0|_x = 0 \,, \end{cases}$$

et tel que

- *pour presque toute $x \in |F|$ (c'est-à-dire toute $x \in |F|$ sauf un ensemble fini), la norme $|\bullet|_x$ est "ultra-métrique" au sens que*

$$|\gamma + \gamma'|_x \leq \max\{|\gamma|_x, |\gamma'|_x\} \,, \quad \forall\, \gamma, \gamma' \in F \,,$$

- *pour tout élément $\gamma \neq 0$ de F, on a*

$$|\gamma|_x = 1 \text{ pour presque toute } x \in |F|$$

et

$$\prod_{x \in |F|} |\gamma|_x = 1 \text{ ("formule du produit").}$$

Remarque :

Les éléments x de $|F|$ sont traditionnellement appelés les "places" de F.

$\square$

Pour toute $x \in |F|$, on note F_x le corps complété de F pour la norme $| \bullet |_x$.

Si x est ultra-métrique, le quotient du sous-anneau

$$O_x = \{a_x \in F_x \mid |a_x|_x \leq 1\}$$

par son idéal

$$m_x = \{a_x \in F_x \mid |a_x|_x < 1\}$$

est un corps fini

$$\kappa_x = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q_x}) \, .$$

Si x n'est pas ultra-métrique, F est nécessairement un corps de nombres et le corps complété F_x est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une telle place est dite "archimédienne".

Définition –

L'anneau des adèles $\mathbb{A}_F$ d'un corps global F est le sous-anneau topologique

$$\mathbb{A}_F \subset \prod_{x \in |F|} F_x$$

constitué des familles $(a_x \in F_x)_{x \in |F|}$ telles que

$$|a_x|_x \leq 1 \text{ en presque toute } x \in |F| \, .$$

Remarque :

Il résulte de la "formule du produit" que F se plonge dans $\mathbb{A}_F$ comme sous-groupe discret.

On peut montrer que le quotient $F \backslash \mathbb{A}_F$ est compact.

$\square$

7 Groupes réductifs sur un corps et groupes duaux

Dans tout ce paragraphe, F désigne un corps arbitraire et $\overline{F}$ une clôture séparable de F.

Définition –

Un groupe réductif sur $\overline{F}$ est un groupe algébrique, affine, lisse et connexe qui ne contient aucun sous-groupe distingué isomorphe au groupe additif $\mathbb{A}^1 =$

$\mathrm{Spec}(\overline{F}[X])$ *(ou, ce qui revient au même, ne contient aucun sous-groupe distingué isomorphe à un groupe unipotent).*

Exemples :

- le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(\overline{F}[X, X^{-1}])$ et ses puissances, appelées "tores",
- les groupes linéaires GL_r, SL_r, PGL_r,
- les groupes classiques Sp_{2r}, SO_{2r+1}, SO_{2r}, ...

$\square$

Tout groupe réductif G sur $\overline{F}$ admet des "paires de Borel" (T, B) constituées d'un sous-tore maximal T de G et d'un sous-groupe de Borel (c'est-à-dire sous-groupe parabolique minimal) B de G contenant T. Toutes les paires de Borel de G sont images les unes des autres par conjugaison. Il est possible d'associer à toute paire de Borel (T, B) de G une donnée combinatoire, appelée "donnée radicielle" $(X_T, \Delta_B, X_T^\vee, \Delta_B^\vee)$ et composée de

- le réseau X_T des caractères $T \to \mathbb{G}_m$ de T,
- le réseau dual $X_T^\vee$ des cocaractères $\mathbb{G}_m \to T$ de T,
- un ensemble fini Δ_B d'éléments de X_T, appelés les "racines simples",
- un ensemble fini $\Delta_B^\vee$ d'éléments de $X_T^\vee$, appelés les "coracines simples", qui est muni d'une bijection $\Delta_B \to \Delta_B^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha^\vee$.

On a :

Théorème –

Pour tout groupe réductif G sur $\overline{F}$, on a :

(i) *Les données radicielles $(X_T, \Delta_B, X_T^\vee, \Delta_B^\vee)$ associées aux différentes paires de Borel (T, B) de G sont canoniquement isomorphes entre elles. On peut donc les noter $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$ et les appeler "la donnée radicielle de G".*

(ii) *À isomorphisme près, G est caractérisé par sa donnée radicielle $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$.*

(iii) *G est même caractérisé à unique isomorphisme près par sa donnée radicielle si on le munit d'une paire de Borel (T, B) et d'une structure supplémentaire appelée "épinglage".*

$\square$

Il est possible de caractériser celles des données radicielles $(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$ qui proviennent de groupes réductifs G sur $\overline{F}$. On a encore :

Proposition –

Les axiomes qui caractérisent les données radicielles $(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$ provenant de groupes réductifs G sur $\overline{F}$ vérifient les deux propriétés suivantes :

(1) *Ils ne dépendent pas du corps séparablement clos $\overline{F}$, ni même de sa caractéristique.*

(2) *Ils sont respectés par la symétrie*

$$(X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee) \mapsto (X^\vee, \Delta^\vee, X, \Delta)\,.$$

□

On appelle groupe réductif sur F un groupe algébrique, affine et lisse sur F qui devient réductif sur la clôture séparable $\overline{F}$ de F.

On vérifie que sa donnée radicielle, encore notée $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$, est munie d'une action continue canonique du groupe de Galois $\Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\overline{F})$ de F.

On peut poser :

Définition –

Soit G un groupe réductif sur un corps arbitraire F.

On appelle dual de Langlands de G, et on note $\widehat{G}$, le groupe réductif sur $\mathbb{C}$ dont la donnée radicielle $(X_{\widehat{G}}, \Delta_{\widehat{G}}, X_{\widehat{G}}^\vee, \Delta_{\widehat{G}}^\vee)$ est la duale $(X_G^\vee, \Delta_G^\vee, X_G, \Delta_G)$ de celle $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$ de G.

Considéré comme muni d'une paire de Borel $(\widehat{T}, \widehat{B})$ et d'un épinglage, il est unique à unique isomorphisme près.

Enfin, il est muni d'une action continue canonique de Γ_F qui relève celle sur la donnée radicielle déduite de la structure F-rationnelle de G.

Remarque :

L'action continue canonique de Γ_F sur $\widehat{G}$ permet de considérer aussi le produit semi-direct

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_F\,.$$

□

8 Représentations automorphes

À partir de ce paragraphe, on considère à nouveau un corps global F et son anneau des adèles $\mathbb{A}_F$.

Étant donné un groupe réductif G sur F, on observe que $G(F)$ se plonge comme sous-groupe discret dans le groupe topologique $G(\mathbb{A}_F)$. Le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ est muni de l'action de $G(\mathbb{A}_F)$ par translation à droite.

Définition –

Une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}_F)$ *est dite automorphe s'il est possible de la réaliser dans un espace de fonctions (vérifiant certaines conditions locales et de croissance)*

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}\,,$$

muni de la translation à droite par les éléments de $G(\mathbb{A}_F)$.

Afin de préciser la forme des représentations automorphes, précisons d'abord celle du groupe $G(\mathbb{A}_F)$. On commence par :

Lemme –

Disons que le groupe réductif G *sur* F *est "non ramifié" en une place ultramétrique* $x \in |F|$ *si*

- G *admet une paire de Borel définie sur* F_x,
- *l'action du groupe de Galois local* Γ_{F_x} *sur la donnée radicielle de* G *(ou, ce qui est équivalent, sur* $\widehat{G}$*) se factorise à travers son quotient* $\pi_1(\mathrm{Spec}(O_x), \overline{F}_x) = \Gamma_{\kappa_x} = \langle \sigma_x \rangle$.

Alors :

(i) G *est non ramifié en toute place* x *de* $|F|$ *en dehors d'un sous-ensemble fini* S_G*, dit lieu de ramification de* G.

(ii) *En toute telle place, le groupe réductif* G *sur* F_x *se prolonge en un schéma en groupe lisse sur* $\mathrm{Spec}(O_x)$ *dont la fibre sur le corps résiduel* κ_x *est un groupe réductif de même donnée radicielle que* G.

Le sous-groupe $G(O_x)$ *de* $G(F_x)$ *ainsi défini est un sous-groupe ouvert compact maximal.*

□

Le groupe topologique $G(\mathbb{A}_F)$ est le sous-groupe de

$$\prod_{x\in|F|} G(F_x)$$

constitué des familles $(g_x \in G(F_x))_{x\in|F|}$ telles que

$$g_x \in G(O_x) \quad \text{en presque toute place} \quad x \in |F| - S_G\,.$$

On a encore :

Lemme –

Les représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_F)$ *appartiennent à la classe des représentations "lisses admissibles" irréductibles* π *de* $G(\mathbb{A}_F)$*. Cela signifie que* π *se décompose en produit tensoriel*

$$\pi = \bigotimes_{x\in|F|} \pi_x$$

où

- *chaque facteur π_x est une représentation "lisse admissible" irréductible de $G(F_x)$,*
- *en presque toute $x \in |F| - S_G$, π_x est non ramifiée au sens qu'elle possède des vecteurs non nuls invariants par $G(O_x)$.* $\square$

En toute place non ramifiée $x \in |F| - S_G$, on peut munir $G(F_x)$ de la mesure invariante qui attribue le volume 1 à $G(O_x)$, et noter $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ l'algèbre de convolution des fonctions à support compact

$$G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

appelée "algèbre de Hecke sphérique". Cette algèbre agit sur le sous-espace $\pi_{x,\emptyset}$ des vecteurs invariants par $G(O_x)$ de toute représentation "lisse admissible" π_x de $G(F_x)$.

D'autre part, et puisqu'en une telle place x non ramifiée $\widehat{G}$ est muni d'une action de $\pi_1(\mathrm{Spec}(O_x), \overline{F}_x) = \Gamma_{\kappa_x} = \langle \sigma_x \rangle$, on peut introduire la fibre $\widehat{G}_x$ de $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{\kappa_x}$ au-dessus de l'élément de Frobenius σ_x. C'est une variété algébrique affine isomorphe à $\widehat{G}$ et munie d'une action par conjugaison de $\widehat{G}$ qui diffère en général de celle sur $\widehat{G}$.

On a le théorème fondamental suivant, dû pour l'essentiel à Satake :

Théorème –

Soit $x \in |F| - S_G$ une place en laquelle le groupe réductif G sur F est non ramifié. Alors :

(i) *L'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ est commutative et canoniquement isomorphe à l'algèbre*

$$\mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

des polynômes sur $\widehat{G}_x$ invariants par conjugaison par $\widehat{G}$.

(ii) *Pour toute représentation "lisse admissible" irréductible non ramifiée π_x de $G(F_x)$, le sous-espace $\pi_{x,\emptyset}$ est irréductible comme représentation de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, donc de dimension 1. C'est un caractère.*

Réciproquement, tout caractère de l'algèbre commutative $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ provient d'une unique représentation "lisse admissible" irréductible et non ramifiée de $G(F_x)$.

Remarques :

(i) Si $G = \mathrm{GL}_r$, $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes symétriques

$$\mathbb{C}\,[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}\,.$$

Se donner un caractère de cette algèbre équivaut à se donner r nombres complexes $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}^\times$, modulo permutation. On les appelle les valeurs propres de Hecke.

(ii) Plus généralement, si G est déployé sur F_x, c'est-à-dire si l'action de Γ_{F_x} sur $\widehat{G}$ est triviale, $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ est isomorphe à l'algèbre

$$\mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{\mathfrak{S}_G}$$

des polynômes sur le tore maximal $\widehat{T}$ de $\widehat{G}$ qui sont invariants par le groupe de Weyl $\mathfrak{S}_{\widehat{G}} = \mathfrak{S}_G$.

Se donner un caractère de cette algèbre équivaut à se donner un élément de $\widehat{T}$, modulo action de $\mathfrak{S}_G$.

(iii) Dans le cas le plus général, $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ est isomorphe à

$$\mathbb{C}\,[\widehat{T}^d_x]^{\mathfrak{S}^x_G}$$

où $\widehat{T}^d_x$ désigne le plus grand quotient du tore maximal $\widehat{T}$ sur lequel σ_x agit trivialement, et

$$\mathfrak{S}^x_G = \{w \in \mathfrak{S}_G \mid \sigma_x(w) = w\}$$

désigne le groupe de Weyl F_x-rationnel de G.

□

À toute représentation automorphe $\pi = \bigotimes\limits_{x\in|F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ [resp. $G(\mathbb{A}_F)$], il est donc possible d'associer une famille de valeurs propres de Hecke

$$z_{\pi_x} = (z^1_{\pi_x}, \ldots, z^r_{\pi_x}) \in (\mathbb{C}^\times)^r/\mathfrak{S}_r$$

$$[\text{resp.} \qquad z_{\pi_x} \in \widehat{T}^d_x/\mathfrak{S}^x_G\ ]$$

indexée par les places $x \in |F|$ [resp. $x \in |F| - S_G$] en lesquelles π est non ramifiée.

La connaissance des valeurs propres de Hecke z_{π_x} d'une représentation automorphe π de GL_r ou G en presque toutes les places non ramifiées ne détermine pas complètement π, sauf dans le cas très important des représentations automorphes cuspidales de GL_r.

Rappelons :

Définition –

Une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_F)$ est dite cuspidale s'il est possible de la réaliser dans un espace de fonctions (vérifiant certaines conditions locales et de croissance)

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telles que, pour tout sous-groupe parabolique non trivial P de G, de radical unipotent N_P, on a

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A}_F)} du \cdot h(u \cdot g) = 0\,, \quad \forall\, g \in G(\mathbb{A}_F)\,.$$

On a le théorème suivant dû essentiellement à Piatetski-Shapiro :

Théorème –

Soient π *et* π' *deux représentations automorphes de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ *telles que* π *soit cuspidale et que*

$$z_{\pi'_x} = z_{\pi_x}$$

en presque toute place $x \in |F|$ *où* π *et* π' *sont non ramifiées.*

Alors π' *est cuspidale et isomorphe à* π*.*

□

9 La correspondance de Langlands

On considère toujours un corps global F.

Si F est de caractéristique $p \neq 0$, F est le corps des fontions rationnelles d'une courbe S projective, lisse et connexe sur $\mathbb{F}_p$. L'ensemble des points fermés de S s'identifie à celui $|F|$ des places de F. Se donner un ouvert de Zariski S' de S équivaut à soustraire à $|F|$ un ensemble fini de places.

Si F est un corps de nombres, c'est le corps des fonctions sur le spectre S d'une extension finie et normale de $\mathbb{Z}$. L'ensemble des points fermés de S s'identifie à celui des places ultra-métriques de F. Se donner un ouvert de Zariski S' de S équivaut à soustraire un ensemble fini de telles places ultra-métriques.

Considérons aussi un nombre premier $\ell \neq \mathrm{car}(F)$. Une représentation ℓ-adique de $\Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\overline{F})$ est dite non ramifiée en une place x de F, vue comme un point fermé de S, si elle se factorise à travers le groupe fondamental $\pi_1(S', \overline{F})$ d'un ouvert S' de S qui contient x et sur lequel ℓ est inversible.

Langlands a conjecturé :

Conjecture –

Choisissons un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ *dans* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*.*

Alors, pour toute représentation ℓ*-adique géométrique [resp. géométrique absolue]* V *de* Γ_F *de rang* r*, il existe une représentation automorphe* $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ *telle que, en toute place ultra-métrique* x *où* V *est non ramifiée,* π *est également non ramifiée et admet pour valeurs propres de Hecke*

$$z_{\pi_x} \in (\mathbb{C}^\times)^r / \mathfrak{S}_r$$

la famille non ordonnée des r *valeurs propres de l'élément de Frobenius* σ_x *agissant sur* V*.*

De plus, la représentation automorphe π *est cuspidale si et seulement si la représentation* ℓ*-adique* V *est absolument irréductible.*

Remarques :

(i) Cette conjecture ne distingue pas entre une représentation ℓ-adique géométrique V et sa semi-simplifiée V^{ss}.

(ii) Cette conjecture est démontrée dans le cas où F est un corps de fonctions de caractéristique $p \neq 0$.

La correspondance de Langlands définit alors une bijection de l'ensemble des représentations ℓ-adiques absolues irréductibles de rang r de Γ_F, non ramifiées sur un ouvert de Zariski S' de S, et dont le déterminant est d'ordre fini, sur l'ensemble des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ dont le caractère central est d'ordre fini.

(iii) Si F est un corps de nombres, seulement des cas particuliers de la conjecture sont connus (grâce à Wiles, Taylor, ...) mais ils ont des conséquences arithmétiques très importantes.

Dans ce cas, la correspondance de Langlands ne peut être surjective. En effet, pour qu'une représentation automorphe $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ provienne d'une représentation ℓ-adique géométrique, ses composantes π_x en les places archimédiennes x doivent satisfaire des conditions très restrictives.

$\square$

10 Le principe de fonctorialité

On commence par la définition suivante :

Définition –

Soient G et H deux groupes réductifs sur un corps global F.

On appelle homomorphisme de transfert de G dans H tout homomorphisme algébrique

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_F \xrightarrow{\rho} \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

qui rend commutatif le triangle :

$$\begin{tikzcd} \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{H} \rtimes \Gamma_F \arrow[dl] \\ & \Gamma_F & \end{tikzcd}$$

Remarque :

Si $H = \mathrm{GL}_r$, la donnée de ρ est équivalente à celle de sa projection

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_F \longrightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

que l'on peut appeler une représentation de transfert. $\square$

Un homomorphisme de transfert

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_F \xrightarrow{\rho} \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

est dit non ramifié en une place ultra-métrique $x \in |F|$ si

- G et H sont non ramifiés en x,
- la restriction de ρ à $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}$ se factorise à travers son quotient $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{\kappa_x}$, si bien que l'on a un triangle commutatif induit :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{G} \rtimes \Gamma_{\kappa_x} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{H} \rtimes \Gamma_{\kappa_x} \arrow[dl] \\
& \Gamma_{\kappa_x} &
\end{tikzcd}$$

Un tel triangle commutatif se restreint en un morphisme

$$\widehat{G}_x \to \widehat{H}_x$$

compatible avec l'homomorphisme $\widehat{G} \to \widehat{H}$ et avec les actions par conjugaison de $\widehat{G}$ et $\widehat{H}$. D'où un homomorphisme induit d'algèbres commutatives

$$\rho_x^* : \mathbb{C}\,[\widehat{H}_x]^{\widehat{H}} \to \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}\,.$$

Par combinaison avec les isomorphismes de Satake, on obtient :

Lemme –

Soit un homomorphisme de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

entre deux groupes réductifs sur le corps global F.

Alors

(i) *ρ est non ramifié en toutes les places $x \in |F|$ sauf un ensemble fini $S_\rho \supset S_G \cup S_H$.*

(ii) *En toute place non ramifiée $x \in |F| - S_\rho$, ρ induit un homomorphisme entre algèbres de Hecke sphériques*

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G\,,$$

et donc une application $(\rho_x)_*$ de l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ vers celui des caractères de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$. $\square$

Cela suffit à formuler le principe de fonctorialité de Langlands :

Conjecture –

Soit un homomorphisme de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

entre deux groupes réductifs G et H sur un corps global F.

Supposons que H est quasi-déployé (c'est-à-dire possède une paire de Borel définie sur F).

Alors, pour toute représentation automorphe

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x \quad de \quad G(\mathbb{A})\,,$$

il existe une représentation automorphe

$$\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x \quad de \quad H(\mathbb{A})\,,$$

telle que π'_x soit non ramifiée en toute place $x \in |F| - S_\rho$ où π_x est non ramifiée, avec

$$z_{\pi'_x} = (\rho_x)_* \, (z_{\pi_x})\,.$$

Remarque :

Le cas le plus important est celui où H est un groupe linéaire GL_r. □

Cette conjecture amène à généraliser celle du paragraphe précédent de la manière suivante :

Conjecture –

Soit F un corps global écrit comme dans le paragraphe précédent sous la forme $F = F(S)$.

Soit ℓ un nombre premier inversible dans F et pour lequel on choisit un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$.

Soit $V : \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ une représentation ℓ-adique géométrique absolue qui se factorise à travers le groupe fondamental $\pi_1(S', \overline{F})$ d'un ouvert S' de S où ℓ est inversible.

Soit G un groupe réductif quasi-déployé sur F, non ramifié en les points fermés de S' et tel que la représentation

$$V : \pi_1(S', \overline{F}) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

se factorise à travers un homomorphisme algébrique $\widehat{G} \rtimes \pi_1(S', \overline{F}) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Alors il existe une représentation automorphe

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x \quad de \quad G(\mathbb{A}_F)\,,$$

qui est non ramifiée en les places x correspondant aux points de S' et vérifie en ces places

$$P(z_{\pi_x}) = P(V(\sigma_x))\,, \qquad \forall\, P \in \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \cong \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}\,.$$

Remarque :

Cette conjecture est évidemment compatible avec la précédente. □

11 Conclusions : des problèmes de topos classifiants, d'équivalences de Morita et de morphismes géométriques ?

Résumons les différents problèmes posés :

1) Étant donné un schéma intègre de type fini S sur $\mathbb{Z}$, son corps des fonctions rationnelles $F = F(S)$ et un nombre premier $\ell \neq \mathrm{car}(F)$, on a considéré la catégorie $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire des représentations ℓ-adiques (de rang fini) de $\Gamma_F = \mathrm{Aut}_F(\overline{F})$ qui se factorisent à travers le groupe fondamental $\pi_1(S', \overline{F})$ d'un ouvert S' de S.

On appelle "catégorie des représentations ℓ-adiques géométriques" la sous-catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire engendrée par les images des foncteurs de cohomologie ℓ-adique $X_F \mapsto H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ des variétés quasi-projectives X_F sur F.

On aimerait pouvoir caractériser intrinsèquement cette sous-catégorie.

On ne sait conjecturer quelque chose que pour les classes d'isomorphismes d'objets irréductibles (ou semi-simples) de la catégorie.

Si $\mathrm{car}(F) = p \neq 0$, on conjecture qu'une représentation ℓ-adique absolue irréductible V de rang r de $\pi_1(S', \overline{F})$ est géométrique si et seulement si $\det(V) = \Lambda^r V$ est géométrique, et que cela est nécessairement vrai si $\det(V)$ est d'ordre fini.

Cette conjecture est un théorème si F est le corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini.

Si $\mathrm{car}(F) = 0$, on conjecture que la condition pour une représentation ℓ-adique absolue irréductible V de $\pi_1(S', \overline{F})$ d'être géométrique ne dépend que de la restriction de V au schéma $S' \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_\ell)$.

Lorsque $F = \mathbb{Q}$ ou F est un corps de nombres, Fontaine et Mazur ont donné une forme précise à cette conjecture.

2) Dans la situation de 1) et pour deux nombres premiers $\ell, \ell' \neq \mathrm{car}(F)$, on conjecture que les sous-catégories des représentations ℓ-adiques et ℓ'-adiques géométriques sont naturellement équivalentes.

On aimerait pouvoir proposer une caractérisation conjecturale de cette équivalence.

Ici encore, on ne sait formuler une telle conjecture que pour les classes d'isomorphismes d'objets irréductibles ou semi-simples des catégories en présence. Cela consiste à demander que certains invariants numériques qui caractérisent les classes d'isomorphismes de représentations ℓ-adiques ou ℓ'-adiques semi-simples soient préservés : s'il s'agit de représentations semi-simples V qui se factorisent à travers $\pi_1(S', \overline{F})$, les invariants numériques en question sont les traces des éléments de Frobenius σ_s en les points fermés de S' ou les familles de valeurs propres (bien définies modulo permutation) de ces éléments de Frobenius σ_s agissant sur V.

La correspondance ainsi caractérisée entre représentations ℓ-adiques et ℓ'-adiques géométriques semi-simples n'est connue que si F est un corps de fonctions. Elle est démontrée via une paramétrisation commune par les représentations automorphes.

3) Si F est un corps de fonctions ou plus généralement un corps global, on dispose en effet de la théorie des représentations automorphes des groupes réductifs G sur F à coefficients dans l'anneau topologique des adèles $\mathbb{A}_F$ de F.

On conjecture que pour tout rang $r \geq 1$, il est possible d'associer à toute représentation ℓ-adique semi-simple [resp. absolument irréductible] géométrique V de rang r de Γ_F une représentation automorphe [resp. et cuspidale] π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$.

Ici encore, cette correspondance est définie en demandant que soient préservés des invariants numériques : si V se factorise à travers $\pi_1(S', \overline{F})$, on demande que π soit non ramifiée en toutes les places ultra-métriques $x \in |F|$ qui correspondent à des points fermés de S' et que, en toute telle place, la famille $z_{\pi_x} \in (\mathbb{C}^\times)^r/\mathfrak{S}_r$ des r valeurs propres de Hecke de π_x coïncide avec celle des r valeurs propres de l'élément de Frobenius σ_x agissant sur V.

Cette conjecture est démontrée dans le cas où F est un corps de fonctions.

4) On conjecture enfin que tout homomorphisme de transfert

$$\begin{tikzcd} \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr] & & \widehat{H} \rtimes \Gamma_F \arrow[dl] \\ & \Gamma_F & \end{tikzcd}$$

d'un groupe réductif G sur un corps global F vers un groupe réductif quasi-déployé H sur F permet d'associer à toute représentation automorphe π de $G(\mathbb{A}_F)$ au moins une représentation automorphe π' de $H(\mathbb{A}_F)$.

Là encore, ce transfert des représentations automorphes est défini par des invariants numériques : on demande que l'image π' soit non ramifiée en toute place ultra-métrique $x \in |F|$ en laquelle ρ et π sont non ramifiés et que, en toute telle place x, le paramètre $z_{\pi'_x}$ du facteur local π'_x de π' soit l'image par l'application $(\rho_x)_*$ induite par ρ du paramètre z_{π_x} du facteur local π_x de π.

En définitive, on conjecture des relations très profondes entre des théories a priori complètement différentes :

- la théorie des représentations ℓ-adiques et celle des représentations ℓ'-adiques d'un groupe profini Γ qui est un groupe de Galois Γ_F ou un groupe fondamental $\pi_1(S', \overline{F})$;
- la théorie des représentations ℓ-adiques de dimension r du groupe de Galois Γ_F d'un corps global F et la théorie des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$;
- la théorie des représentations automorphes d'un groupe réductif G sur un corps global F et celle des représentations automorphes d'un groupe réductif quasi-déployé H sur F relié à G par un homomorphisme de transfert
$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F \, .$$

Dans les trois situations, on ne parvient à formuler des conjectures – et parfois à en démontrer une partie – que sur les ensembles de classes d'isomorphismes d'objets irréductibles. Ces conjectures consistent à prévoir l'existence de bijections, d'applications ou de correspondances entre ensembles qui sont définies en demandant que certains invariants numériques soient préservés ou transformés suivant une certaine règle.

Il serait naturel de s'attendre à ce que les différentes théories impliquées soient reliées entre elles d'une manière beaucoup plus structurelle.

Or le formalisme des topos classifiants de théories (ou plus généralement des topos associés à des sites définis par des théories) et des équivalences de Morita entre de tels topos classifiants (ou plus généralement des morphismes géométriques entre topos) constitue un cadre naturel pour les relations entre théories mathématiques.

Il n'est pas interdit d'espérer que ce cadre permettrait de dépasser le niveau des ensembles de classes d'isomorphismes d'objets irréductibles et des invariants numériques attachés à ces classes.

On pourrait donc essayer de mettre en œuvre le programme suivant :

Programme –

(1) *Définir et étudier un topos classifiant des représentations ℓ-adiques d'un groupe profini Γ de la forme Γ_F ou $\pi_1(S', \overline{F})$.*

Rechercher dans ce topos un sous-topos qui serait le topos classifiant des représentations ℓ-adiques géométriques.

Chercher à montrer que pour tous nombres premiers $\ell, \ell' \neq \mathrm{car}(F)$, le topos classifiant des représentations ℓ-adiques géométriques et celui des représentations ℓ'-adiques géométriques sont équivalents.

(2) *Si F est un corps global et $r \geq 1$ un entier, définir un topos classifiant des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$.*

Rechercher un morphisme géométrique naturel du topos classifiant des représentations ℓ-adiques géométriques de rang r de Γ_F dans le topos classifiant des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$.

(3) *Si G est un groupe réductif sur un corps global F, définir un topos classifiant des représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_F)$.*

Si H est un groupe réductif quasi-déployé sur F et relié à G par un homomorphisme de transfert

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F\,,$$

rechercher un morphisme géométrique naturel du topos classifiant des représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_F)$ vers le topos classifiant des représentations automorphes de $H(\mathbb{A}_F)$.

Remarques :

(i) La théorie des représentations ℓ-adiques d'un groupe profini devrait pouvoir être formulée comme une théorie géométrique du premier ordre et admettre donc un “topos classifiant” au sens du théorème de représentabilité de Joyal et Reyes.

Ce topos classifiant est une catégorie – comme tout topos – mais beaucoup plus riche et plus subtile que la simple catégorie des représentations ℓ-adiques.

(ii) La théorie des fonctions automorphes sur $\mathrm{GL}_r(F)\backslash\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ – ou plus généralement $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ – n'est pas d'ordre 1 mais d'ordre 2. Il n'est donc pas garanti a priori que la théorie des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ – ou plus généralement de $G(\mathbb{A}_F)$ – admette un topos classifiant.

Cependant, tout le programme de Langlands incite à penser que cette théorie se comporte comme une théorie géométrique d'ordre 1 en relation étroite avec d'autres théories géométriques d'ordre 1, et donc qu'elle devrait admettre un topos classifiant.

Le morphisme géométrique entre le topos classifiant des représentations ℓ-adiques géométriques de rang r de Γ_F et celui des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ devrait, dans le cas $r = 1$, être induit par un morphisme de sites associé à l'isomorphisme du corps de classes

$$\Gamma_F^{\mathrm{ab}} \cong (\widehat{F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times})$$

mais, dans le cas $r \geq 2$, il ne serait certainement pas induit par un morphisme entre les sites de définition des théories.

(iii) De même, pour tout homomorphisme de transfert

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_F \xrightarrow{\rho} \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

le morphisme géométrique associé entre les topos classifiants des représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_F)$ et $H(\mathbb{A}_F)$ ne devrait provenir d'un morphisme entre les sites de définition des théories que si ρ est dual d'un homomorphisme

$$H \to G\,,$$

en particulier si G et H sont des tores. $\square$

Tentons de donner une forme plus précise aux questions posées dans le cas de la correspondance de Langlands et du principe de fonctorialité.

Comme plus haut, écrivons le corps global F comme le corps des fonctions rationnelles $F = F(S)$ d'un schéma S qui est soit une courbe projective lisse connexe sur un corps fini, soit un revêtement fini et normal de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, si bien que les places ultra-métriques de F s'identifient aux points fermés de S.

Et considérons un ouvert de Zariski S' de S, nécessairement déduit de S en enlevant un ensemble fini de points fermés.

Supposons que l'on ait pu définir un topos classifiant les représentations ℓ-adiques (semi-simples) géométriques de rang $r \geq 1$ de $\pi_1(S', \overline{F})$, noté

$$\mathcal{E}^r_{\ell,S'}\,.$$

Supposons d'autre part que l'on ait pu définir un topos classifiant les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ qui sont non ramifiées en les places $x \in |F|$ correspondant aux points fermés de S', et notons ce topos

$$\mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},S'}\,.$$

Ou supposons plus généralement que, pour tout groupe réductif G sur F non ramifié en les points de S', on ait pu définir un topos classifiant les représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_F)$ qui sont non ramifiées en les points de S', et notons ce topos

$$\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},S'}\,.$$

Pour tout point x de S', de corps résiduel $\kappa_x \cong \mathbb{F}_{q_x}$, on devrait aussi pouvoir définir un topos classifiant les représentations ℓ-adiques de rang r du groupe de Galois $\Gamma_{\kappa_x} = \langle \sigma_x \rangle \cong \widehat{\mathbb{Z}}$, noté

$$\mathcal{E}^r_{\ell,x}\,.$$

D'autre part, on devrait pouvoir définir un topos classifiant les caractères de l'algèbre de Hecke sphérique de $\mathrm{GL}_r(F_x)$

$$\mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \cong \mathbb{C}\,[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}\,,$$

noté
$$\mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},x} \, .$$

Plus, généralement, si G est un groupe réductif sur F non ramifié en x, on devrait pouvoir définir un topos classifiant les caractères de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ de $G(F_x)$, noté
$$\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},x} \, .$$

Pour tout point fermé x de S', l'application qui associe à toute représentation ℓ-adique de rang r de Γ_{κ_x} la famille des r valeurs propres de l'élément de Frobenius σ_x devrait pouvoir se relever en un morphisme géométrique de topos

$$\mathcal{E}^r_{\ell,x} \to \mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},x} \, .$$

En notant $|S'|$ l'ensemble des points fermés de S' identifiés à des places ultramétriques de F, on devrait donc disposer d'un morphisme géométrique induit entre les topos produits

$$\prod_{x \in |S'|} \mathcal{E}^r_{\ell,x} \to \prod_{x \in |S'|} \mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},x} \, .$$

De même, si G et H sont deux groupes réductifs sur F non ramifiés sur S' et reliés par un homomorphisme de transfert non ramifié sur S'

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F \, ,$$

les homomorphismes d'algèbres de Hecke sphériques

$$\rho_x^* : \mathcal{H}^H_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \, , \quad x \in |S'| \, ,$$

devraient induire des morphismes géométriques entre topos classifiants

$$\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},x} \to \mathcal{E}^H_{\mathrm{aut},x} \, , \quad x \in |S'| \, ,$$

puis un morphisme géométrique produit

$$\prod_{x \in |S'|} \mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},x} \to \prod_{x \in |S'|} \mathcal{E}^H_{\mathrm{aut},x} \, .$$

D'autre part, le foncteur qui associe à tout faisceau ℓ-adique sur S' sa fibre en n'importe quel point fermé x devrait définir un morphisme géométrique de topos
$$\mathcal{E}^r_{\ell,S'} \to \mathcal{E}^r_{\ell,x} \, , \quad \forall \, x \in |S'| \, ,$$
puis, en faisant le produit,

$$\mathcal{E}^r_{\ell,S'} \to \prod_{x \in |S'|} \mathcal{E}^r_{\ell,x} \, .$$

De même, la considération des facteurs locaux des représentations automorphes devrait définir des morphismes géométriques de topos classifiants

$$\mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},S'} \to \mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},x}\,, \quad \forall\, x \in |S'|\,,$$

ou plus généralement

$$\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},S'} \to \mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},x}\,, \quad \forall\, x \in |S'|\,,$$

et donc

$$\mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},S'} \to \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},x}$$

ou plus généralement

$$\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},S'} \to \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},x}\,.$$

Or on dispose de la construction fondamentale suivante de la théorie des topos :

Proposition –

Tout morphisme géométrique de topos

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$$

se factorise canoniquement comme le composé d'un morphisme géométrique surjectif

$$\mathcal{E} \to \mathrm{Im}(f)$$

et d'un plongement

$$\mathrm{Im}(f) \to \mathcal{F}\,.$$

Remarque :

Un morphisme géométrique $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dit surjectif si le foncteur d'image réciproque f^* est fidèle. Il est appelé un plongement (et $\mathcal{E}$ un sous-topos de $\mathcal{F}$) si le foncteur d'image directe f_* est pleinement fidèle.

□

Appliquant ce théorème général, on dispose du sous-topos

$$\mathrm{Im}(\mathcal{E}^r_{\ell,S'}) \hookrightarrow \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^r_{\ell,x}$$

image du topos classifiant $\mathcal{E}^r_{\ell,S'}$, du sous-topos

$$\mathrm{Im}(\mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},S'}) \hookrightarrow \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},x}$$

image du topos classifiant $\mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},S'}$, et plus généralement du sous-topos

$$\mathrm{Im}(\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},S'}) \to \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},x}$$

image du topos classifiant $\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},S'}$.

Nous sommes maintenant en mesure de demander :

Problème –

(i) *Pour tout rang $r \geq 1$, le morphisme géométrique*

$$\mathrm{Im}(\mathcal{E}^r_{\ell,S'}) \hookrightarrow \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^r_{\ell,x} \to \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},x}$$

se factorise-t-il à travers le sous-topos

$$\mathrm{Im}(\mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},S'}) \hookrightarrow \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},x} \quad ?$$

Si oui, existe-t-il un morphisme géométrique naturel

$$\mathcal{E}^r_{\ell,S'} \to \mathcal{E}^r_{\mathrm{aut},S'}$$

qui relève cette factorisation ?

(ii) *Si G est un groupe réductif sur F non ramifié sur S', H un groupe réductif quasi-déployé sur F non ramifié sur S' et $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$ un homomorphisme de transfert non ramifié sur S', le morphisme géométrique*

$$\mathrm{Im}(\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},S'}) \hookrightarrow \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},x} \to \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^H_{\mathrm{aut},x}$$

se factorise-t-il à travers le sous-topos

$$\mathrm{Im}(\mathcal{E}^H_{\mathrm{aut},S'}) \hookrightarrow \prod_{x\in|S'|} \mathcal{E}^H_{x,S'} \quad ?$$

Si oui, existe-t-il un morphisme géométrique naturel

$$\mathcal{E}^G_{\mathrm{aut},S'} \to \mathcal{E}^H_{\mathrm{aut},S'}$$

qui relève cette factorisation ?

Remarques :

(i) Considérer les sous-topos ainsi définis aurait l'avantage de traduire dans un unique langage – celui des topos – les conditions globales très différentes a priori qui définissent les objets considérés : provenir d'un faisceau ℓ-adique sur S', se réaliser dans un espace de fonctions sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ ou $G(\mathbb{A}_F)$ qui admettent $\mathrm{GL}_r(F)$ ou $G(F)$ comme groupe de périodes.

(ii) Ce double problème prend tout son sens si l'on rappelle les quelques faits suivants :

- Les sous-topos d'un topos donné $\mathcal{E}$ forment un ensemble ordonné (qui est même une "co-algèbre de Heyting"). C'est un théorème démontré il y a longtemps par Joyal.
- Si $\mathcal{E}$ est écrit comme le topos associé à un site constitué d'une catégorie $\mathcal{C}$ et d'une topologie J, se donner un sous-topos de $\mathcal{E}$ équivaut à se donner sur la même catégorie sous-jacente $\mathcal{C}$ une topologie plus fine que J.
- Si $\mathcal{E}$ est écrit comme le topos classifiant d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$, il y a correspondance bijective entre les sous-topos de $\mathcal{E}$ et les théories "quotients" de $\mathbb{T}$ (c'est-à-dire déduites de $\mathbb{T}$ en conservant le même langage et ajoutant des axiomes), modulo équivalence syntactique. C'est un théorème démontré par Caramello sous le nom de "théorème de dualité".
- Si $(f^*, f_*) : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est n'importe quel morphisme géométrique de topos défini par des sites donnés concrètement, le sous-topos image $\mathrm{Im}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{F}$ est calculable.

$\square$

Références

• Le problème de l'indépendance de ℓ de la cohomologie ℓ-adique est le problème central de la théorie conjecturale des "motifs". La référence de base pour cette théorie est constituée par les deux gros volumes "Motives" (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 55, AMS 1994) édités par U. Jannsen, S. Kleiman et J.-P. Serre.

• La référence de base sur le programme de Langlands est constituée par les deux autres volumes "Automorphic Forms, Representations and L-functions" (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 33, AMS 1979) édités par A. Borel et W. Casselman.

• Les vidéos du cours (9 fois 2 heures) donné par Olivia Caramello à l'Université de Paris VII en janvier 2013 sont disponibles sur la toile à l'adresse :

https ://sites.gogle.com/site/logiquecategorique/cours/topos_caramello

Et celles de deux séminaires complémentaires sont disponibles aux adresses :

https ://sites.gogle.com/site/logiquecategorique/Contenus/invariants-topos

https ://sites.gogle.com/site/logiquecategorique/Contenus/theorie-de-galois-topologique

• Les articles ou prépublications d'Olivia Caramello sur les topos classifiants et les équivalences de Morita sont disponibles sur son site à l'adresse :

www.oliviacaramello.com/Papers/Papers.htm