

**Construire un noyau de la functorialité ?
Le cas de l'induction automorphe
sans ramification de GL_1 à GL_2**

Laurent LAFFORGUE



Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Septembre 2009

IHES/M/09/42

Construire un noyau de la fonctorialité ?

Le cas de l'induction automorphe sans ramification de GL_1 à GL_2

Laurent Lafforgue

*Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres,
F-91440 Bures-sur-Yvette*

Introduction :

Le but de cet article est de présenter une nouvelle méthode purement adélique pour réaliser le principe de fonctorialité de Langlands, dans le cas de l'induction automorphe non ramifiée de GL_1 à GL_2 . On se cantonne ici au cas des corps de fonctions ; le cas des corps de nombres demanderait une vérification de plus aux places infinies.

On construit un noyau de la fonctorialité sur le produit des groupes adéliques GL_1 et GL_2 . C'est une version "en famille" et locale de la construction par les modèles de Whittaker globaux, utilisée classiquement dans les "théorèmes réciproques" de Weil et Piatetski-Shapiro.

La plus grande partie de la construction et des vérifications nécessaires est locale, c'est-à-dire se fait place par place. Il s'agit de prouver que deux fonctions, dont chacune est définie localement, deviennent égales après sommation sur les éléments rationnels de certains groupes. Cela résulte de la formule de Poisson, sur le modèle de la thèse de Tate, dès lors que l'on comprend comment nos deux fonctions se déduisent localement l'une de l'autre par une certaine transformation de Fourier.

La construction des deux fonctions se généralise dans le cadre de l'induction automorphe de GL_1 à GL_r , ou même du transfert automorphe général entre groupes linéaires. Mais on ne connaît pas à ce jour de transformation de Fourier qui permette de passer localement de l'une à l'autre.

Voici le contenu des différents chapitres :

Le chapitre I rappelle d'abord en détail la formulation du principe de fonctorialité dans le cas de l'induction automorphe sans ramification de GL_1 à GL_2 . Puis il introduit en chaque place des "noyaux locaux" de la fonctorialité ; leur définition est dictée par la règle de transfert de Langlands. Ces noyaux sont construits à partir des fonctions de Whittaker si bien qu'il y en a deux familles, l'une relative au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et l'autre relative au sous-groupe des matrices triangulaires inférieures. Le chapitre I s'achève par l'énoncé du théorème général d'échange de ces deux familles de noyaux par une certaine transformation de Fourier.

Le chapitre II donne la démonstration de ce théorème par des calculs explicites, en examinant tous les cas de figures : places scindées ou places inertes, intégration contre un caractère multiplicatif non ramifié ou ramifié, absence ou présence d'une composante unipotente dans la matrice carrée de rang 2 en laquelle on évalue les fonctions. On pourrait donner une démonstration plus uniforme en utilisant un outil puissant – l'équation fonctionnelle locale des fonctions de Whittaker – mais nous avons préféré présenter des calculs complètement explicites et élémentaires.

Enfin, le chapitre III construit des noyaux globaux de la functorialité. Leurs propriétés d'invariance par des sous-groupes discrets assez grands résultent de la formule de Poisson, une fois connue la propriété d'échange par les transformations de Fourier locales dont la démonstration a occupé le chapitre précédent. Il faut noter en particulier que l'utilisation de la formule de Poisson fait apparaître des termes complémentaires qui sont les valeurs au point 0 des fonctions considérées. Ces termes complémentaires fournissent la partie des formes automorphes sur GL_2 constitutives de nos noyaux globaux de la functorialité qui ne provient pas des fonctions de Whittaker. Leur présence est nécessaire puisque notre construction ne distingue pas entre les caractères de GL_1 sur l'extension quadratique de départ dont le transfert dans GL_2 est une représentation cuspidale, et ceux – se factorisant par la norme – dont le transfert est une série d'Eisenstein.

Sommaire

Chapitre I : Définition locale du transfert et construction de ses noyaux locaux

1. Anneaux et groupes adéliques
2. Algèbres de Hecke sphériques et formes automorphes non ramifiées
3. Définition locale du transfert de Langlands
4. Fonctions sphériques et fonctions de Whittaker
5. Noyaux locaux de la fonctorialité
6. Échange par transformation de Fourier

Chapitre II : Vérifications locales

1. Réduction au cas d'un caractère additif régulier
2. Calculs sur les noyaux en une place scindée
3. Transformation de Fourier des noyaux en une place scindée
4. Calculs sur les noyaux en une place inerte
5. Transformation de Fourier des noyaux en une place inerte
6. Les valeurs au point 0

Chapitre III : Construction des noyaux globaux par la formule de Poisson

1. Caractère additif et mesure auto-duale globaux
2. Construction locale et identification des termes complémentaires
3. Construction de noyaux globaux de la fonctorialité

Bibliographie

Chapitre I :

Définition locale du transfert et construction de ses noyaux locaux

1 Anneaux et groupes adéliques

On se placera toujours sur le corps des fonctions F d'une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini \mathbb{F}_q .

On note $|X|$ l'ensemble des places de F identifiées aux points fermés de X , c'est-à-dire aux points de la courbe X à valeurs dans les extensions finies du corps de base \mathbb{F}_q .

Pour toute place $x \in |X|$, on note :

- $\deg(x)$ la dimension sur \mathbb{F}_q du corps de définition $\kappa(x)$ de x , avec donc $|\kappa(x)| = q^{\deg(x)} = q_x$,
- $x : F^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation définie comme l'ordre d'annulation en le point x de X des fonctions rationnelles non nulles, et $|\bullet|_x = q_x^{-x(\bullet)}$ la norme ultra-métrique associée,
- F_x le complété de F pour la norme $|\bullet|_x$,
- $O_x = \{a_x \in F_x \mid x(a_x) \geq 0\}$ l'anneau des entiers de F_x , et $m_x = \{a_x \in F_x \mid x(a_x) \geq 1\}$ son idéal maximal, avec donc $O_x/m_x = \kappa(x)$.

On rappelle que l'expression "pour presque toute place x " signifie "pour toutes les places $x \in |X|$ sauf un nombre fini d'entre elles".

On dispose de l'anneau topologique des adèles de F

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F = \left\{ (a_x)_{x \in |X|} \in \prod_{x \in |X|} F_x \mid a_x \in O_x \text{ pour presque toute place } x \right\},$$

et de son sous-anneau ouvert compact des entiers adéliques

$$O_{\mathbb{A}} = O_{\mathbb{A}_F} = \prod_{x \in |X|} O_x.$$

On connaît le résultat suivant qui est à la base de toute la théorie automorphe :

Proposition I.1. –

- (i) Le groupe additif F est un sous-groupe discret de \mathbb{A} . De plus, le quotient $F \backslash \mathbb{A}$ est compact.
- (ii) Le groupe multiplicatif F^\times est un sous-groupe discret de \mathbb{A}^\times .
- (iii) Le groupe matriciel $\mathrm{GL}_2(F)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. □

Dans cet énoncé,

$$\mathbb{A}^\times = \left\{ (a_x) \in \prod_{x \in |X|} F_x^\times \mid a_x \in O_x^\times \text{ pour presque toute place } x \right\}$$

est le groupe topologique des éléments inversibles de \mathbb{A} . Il contient comme sous-groupe ouvert compact maximal le groupe des adèles entiers inversibles

$$O_{\mathbb{A}}^\times = \prod_{x \in |X|} O_x^\times.$$

En toute place x , la valuation définit un isomorphisme

$$x(\bullet) = F_x^\times / O_x^\times \rightarrow \mathbb{Z}.$$

La définition de \mathbb{A}^\times autorise à combiner toutes les valuations pour définir un homomorphisme de degré

$$\begin{aligned} \text{deg} : \quad \mathbb{A}^\times &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a_x)_{x \in |X|} &\mapsto - \sum_x \text{deg}(x) \cdot x(a_x). \end{aligned}$$

On connaît encore la “formule du produit” :

Proposition I.2. – Le sous-groupe discret F^\times de \mathbb{A}^\times est contenu dans le noyau $\mathbb{A}^{\times 0}$ de l’homomorphisme de degré

$$\text{deg} : \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{Z}.$$

De plus, le quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0}$ est compact. □

Dans toute la suite, on notera $H = \mathrm{GL}_2$ considéré comme un groupe algébrique.

Ainsi,

$$H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \left\{ (g_x)_{x \in |X|} \in \prod_{x \in |X|} \mathrm{GL}_2(F_x) \mid g_x \in \mathrm{GL}_2(O_x) \text{ pour presque toute place } x \right\}$$

est le groupe topologique des matrices carrées inversibles de rang 2 à coefficients dans \mathbb{A} . Il contient comme sous-groupe ouvert compact maximal le groupe des matrices à coefficients entiers adéliques inversibles

$$K_0^H = \prod_{x \in |X|} \mathrm{GL}_2(O_x).$$

En toute place x , $\mathrm{GL}_2(O_x) = K_{0,x}^H$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathrm{GL}_2(F_x) = H(F_x)$.

D’après la proposition I.2, le sous-groupe discret $H(F) = \mathrm{GL}_2(F)$ de $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ est contenu dans le noyau $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})^0$ de l’homomorphisme composé

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \xrightarrow{\text{det}} \mathbb{A}^\times \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}.$$

Le quotient $\mathrm{GL}_2(F) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})^0$ n’est pas compact mais il est de volume fini pour les mesures de Haar de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.

Considérons enfin une extension E de F de degré 2, que l'on suppose partout non ramifiée. Autrement dit, E est le corps des fonctions rationnelles sur un revêtement X' fini étale de degré 2 de la courbe X .

Pour toute place $x \in |X|$, considérons l'algèbre $E_x = E \otimes_F F_x$. Deux cas sont possibles :

- *Premier cas* : L'algèbre E_x est le produit de deux corps isomorphes à F_x . Cela signifie qu'il existe dans le revêtement X' deux points fermés x_1 et x_2 au-dessus du point x de X . Leurs corps de définition $\kappa(x_1)$ et $\kappa(x_2)$ s'identifient à $\kappa(x)$ et les complétions associées E_{x_1} et E_{x_2} s'identifient à F_x , avec $E_x = E_{x_1} \times E_{x_2}$. On dit alors que la place x est scindée dans E . On note $O_{E_x} = O_{E_{x_1}} \times O_{E_{x_2}} = O_x \times O_x$.
- *Second cas* : L'algèbre E_x est un corps, extension de degré 2 de F_x . Cela signifie qu'il existe dans le revêtement X' un unique point fermé x' au-dessus du point fermé x de X . Son corps de définition $\kappa(x')$ est une extension de degré 2 de $\kappa(x)$ et la complétion associée $E_{x'}$ s'identifie à E_x . On dit alors que la place x est inerte dans E . On note $O_{E_x} = O_{E_{x'}}$.

On remarque que le produit tensoriel $E \otimes_F \mathbb{A}_F$ s'identifie à l'anneau des adèles \mathbb{A}_E du corps de fonctions E .

Dans toute la suite, on notera

$$G = \text{Res}_{E/F} \text{GL}_1$$

le groupe algébrique sur F qui se déduit de GL_1 par restriction des scalaires à la Weil de E à F . Cela signifie que pour toute F -algèbre A , on a

$$G(A) = \text{GL}_1(E \otimes_F A).$$

En particulier, on a en toute place x

$$\begin{aligned} G(F_x) &= E_x^\times \\ &= \begin{cases} E_{x_1}^\times \times E_{x_2}^\times = F_x^\times \times F_x^\times & \text{si } x \text{ se scinde dans } E \text{ en deux places } x_1 \text{ et } x_2, \\ E_{x'}^\times & \text{si } x \text{ est inerte dans } E \text{ et que } x' \text{ est l'unique place qui la relève.} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, E_x^\times possède un sous-groupe ouvert compact maximal qui est

$$\begin{aligned} K_{0,x}^G &= O_{E_x}^\times \\ &= \begin{cases} O_{E_{x_1}}^\times \times O_{E_{x_2}}^\times = O_x^\times \times O_x^\times & \text{si } x \text{ est scindée,} \\ O_{E_{x'}}^\times & \text{si } x \text{ est inerte.} \end{cases} \end{aligned}$$

On dispose aussi du groupe topologique adélique

$$\begin{aligned} G(\mathbb{A}) &= \mathbb{A}_E^\times \\ &= \left\{ (t_x)_{x \in |X|} \in \prod_{x \in |X|} E_x^\times \mid t_x \in O_{E_x}^\times \text{ pour presque toute place } x \right\} \end{aligned}$$

et de son sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_0^G = \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^G = \prod_{x \in |X|} O_{E_x}^\times.$$

En toute place $x \in |X|$, on dispose de l'homomorphisme de norme local

$$\begin{aligned} \text{Nm} : E_x^\times &\rightarrow F_x^\times \\ t_x &\mapsto \text{Nm}(t_x) = \text{déterminant de l'endomorphisme de multiplication par } t_x \\ &\quad \text{dans } E_x \text{ vu comme espace vectoriel de dimension 2 sur } F_x. \end{aligned}$$

Il envoie $O_{E_x}^\times$ dans O_x^\times .

Le produit des homomorphismes de norme locaux en toutes les places $x \in |X|$ définit un homomorphisme de norme global

$$\text{Nm} : G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times \rightarrow \mathbb{A}_F^\times.$$

Il envoie le sous-groupe ouvert compact maximal K_0^G dans $O_{\mathbb{A}}^\times$ et le sous-groupe discret E^\times dans F^\times .

2 Algèbres de Hecke sphériques et formes automorphes non ramifiées

En toute place x , on note $d^\times t_x$ la mesure de Haar sur E_x^\times qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $O_{E_x}^\times$. On note $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur $E_x^\times = G(F_x)$ qui sont invariantes par $K_{0,x}^G = O_{E_x}^\times$. Cette algèbre a un élément unité qui est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{x,\emptyset}^G$ de $K_{0,x}^G$.

Quand la place x de F se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 , on a un isomorphisme

$$E_x^\times / O_{E_x}^\times = E_{x_1}^\times / O_{E_{x_1}}^\times \times E_{x_2}^\times / O_{E_{x_2}}^\times = F_x^\times / O_x^\times \times F_x^\times / O_x^\times \xrightarrow{x(\bullet) \times x(\bullet)} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

si bien que $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ s'identifie à l'algèbre de groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. La mesure $d^\times t_x$ est le produit des mesures de Haar $d^\times t_1$ et $d^\times t_2$ sur $E_{x_1}^\times = F_x^\times$ et $E_{x_2}^\times = F_x^\times$ qui attribuent le volume 1 à $O_{E_{x_1}}^\times = O_x^\times$ et $O_{E_{x_2}}^\times = O_x^\times$.

Quand la place x de F est inerte dans E , on a un isomorphisme

$$E_x^\times / O_{E_x}^\times = E_{x'}^\times / O_{E_{x'}}^\times \xrightarrow{x(\bullet) \circ \text{Nm}} 2\mathbb{Z}$$

si bien que $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ s'identifie à l'algèbre de groupe de $2\mathbb{Z}$.

On déduit de ces considérations :

Lemme I.3. –

(i) Quand la place x de F se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 , l'application

$$\varphi_x \mapsto \int_{\substack{t=(t_1,t_2) \\ \in E_{x_1}^\times = F_x^\times \times F_x^\times}} d^\times t_1 \cdot d^\times t_2 \cdot \varphi_x(t_1, t_2) \cdot X_1^{x(t_1)} \cdot X_2^{x(t_2)}$$

définit un isomorphisme

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}] \otimes \mathbb{C}[X_2^{\pm 1}] = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}].$$

(ii) Quand la place x de F reste inerte dans E , l'application

$$\varphi_x \mapsto \int_{t \in E_x^\times} d^\times t \cdot \varphi_x(t) \cdot X^{x(\text{Nm}(t))}$$

définit un isomorphisme

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X^{\pm 2}] = \mathbb{C}[X^{\pm 1}, -X^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2},$$

où le groupe symétrique \mathfrak{S}_2 agit sur l'algèbre $\mathbb{C}[X^{\pm 1}, -X^{\pm 1}]$ en permutant les variables X et $-X$. \square

Le groupe topologique localement compact $G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$ peut être muni de la mesure de Haar $d^\times t$ qui est le produit sur toutes les places $x \in |X|$ des mesures $d^\times t_x$ sur les $G(F_x) = E_x^\times$. Elle attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $K_0^G = \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^G$.

On note \mathcal{H}_\emptyset^G l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur $G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$ qui sont invariantes par $K_0^G = O_{\mathbb{A}_E}^\times$. Cette algèbre a un élément unité qui est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_\emptyset^G$ de K_0^G .

On a une décomposition naturelle

$$\mathcal{H}_\emptyset^G = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

avec

$$\mathbb{1}_\emptyset^G = \bigotimes_{x \in |X|} \mathbb{1}_{x,\emptyset}^G.$$

Tout caractère χ

$$\mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

peut aussi bien être vu comme une représentation irréductible, de dimension 1, de l'algèbre \mathcal{H}_\emptyset^G . Il se décompose canoniquement en un produit

$$\chi = \bigotimes_{x \in |X|} \chi_x$$

où chaque χ_x est un caractère

$$E_x^\times / O_{E_x}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

ou, ce qui revient au même, une représentation irréductible, de dimension 1, de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$.

Quand la place x est scindée dans E en deux places x_1 et x_2 , se donner une telle représentation irréductible χ_x de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2}$ équivaut à se donner les images $z_{x_1}(\chi_x), z_{x_2}(\chi_x) \in \mathbb{C}^\times$ des deux variables X_1, X_2 .

Quand au contraire la place x est inerte dans E , se donner une représentation irréductible χ_x de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X^{\pm 1}, -X^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2}$ revient à se donner au signe près l'image $\pm z_x(\chi_x)$ de la variable X .

Un caractère global $\chi : \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est unitaire si et seulement si tous ses facteurs locaux $\chi_x : E_x^\times / O_{E_x}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ le sont.

Et un caractère local $\chi_x : E_x^\times / O_{E_x}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est unitaire si et seulement si ses "valeurs propres" $z_{x_1}(\chi_x), z_{x_2}(\chi_x)$ [resp. $\pm z_x(\chi_x)$] sont de module 1.

On pose la définition suivante :

Définition I.4. – On appelle représentations automorphes de \mathcal{H}_\emptyset^G ses représentations irréductibles (de dimension 1) qui apparaissent dans la décomposition spectrale de l'espace de Hilbert

$$L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_0^G) = L^2(E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times)$$

muni de l'action de \mathcal{H}_\emptyset^G par convolution.

Autrement dit, ce sont les caractères unitaires

$$\chi : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

□

Disons que deux caractères automorphes $\chi, \chi' : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ sont dans la même classe si leur quotient $\chi' \cdot \chi^{-1}$ se factorise à travers l'homomorphisme de degré

$$E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \xrightarrow{\text{Nm}} F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times / O_{\mathbb{A}_F}^\times \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}.$$

Il résulte de la proposition I.2 qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes de caractères automorphes $E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

Passons maintenant au groupe H .

En toute place x , on note dg_x la mesure de Haar sur $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $K_{0,x}^H = \mathrm{GL}_2(O_x)$. On note $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur $H(F_x)$ qui sont invariantes à gauche et à droite par $K_{0,x}^H$. On l'appelle l'algèbre de Hecke sphérique de $H(F_x)$. Elle admet pour élément unité la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{x,\emptyset}^H$ de $K_{0,x}^H$.

Rappelons la décomposition d'Iwasawa :

Lemme I.5. – *Tout élément g_x de $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$ peut s'écrire sous la forme*

$$g_x = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$$

avec $\mu_1, \mu_2 \in F_x^\times$, $u \in F_x$, $g_\emptyset \in \mathrm{GL}_2(O_x)$.

De plus, si on note

- $d^\times \mu_1$ ou $d^\times \mu_2$ la mesure de Haar sur F_x^\times qui attribue le volume 1 à O_x^\times ,
- du la mesure de Haar additive de F_x qui attribue le volume 1 à O_x ,
- dg_\emptyset la restriction de dg_x à $\mathrm{GL}_2(O_x)$,

on dispose de la formule suivante d'intégration des fonctions h_x localement constantes à support compact sur $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$

$$\int_{H(F_x)} dg_x \cdot h_x(g_x) = \int_{F_x^\times \times F_x^\times} d^\times \mu_1 \cdot d^\times \mu_2 \cdot \int_{F_x} du \cdot \int_{\mathrm{GL}_2(O_x)} dg_\emptyset \cdot h_x \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset \right).$$

□

Rappelons maintenant l'énoncé du théorème de Satake :

Théorème I.6. – *L'application*

$$h_x \mapsto \int_{F_x^\times \times F_x^\times} d^\times \mu_1 \cdot d^\times \mu_2 \cdot \int_{F_x} du \cdot h_x \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot X_1'^{x(\mu_1)} \cdot X_2'^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}}$$

définit un isomorphisme

$$S_x^H : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1'^{\pm 1}, X_2'^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2}.$$

En particulier, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ est commutative. □

Le groupe topologique localement compact $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ peut être muni de la mesure de Haar dg qui est le produit sur toutes les places $x \in |X|$ des mesures dg_x sur les $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$. Elle attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_0^H = \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^H = \mathrm{GL}_2(O_{\mathbb{A}}).$$

On note \mathcal{H}_\emptyset^H , et on appelle algèbre de Hecke sphérique globale, l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ qui sont invariantes à gauche et à droite par $K_0^H = \mathrm{GL}_2(O_{\mathbb{A}})$. Cette algèbre admet pour élément unité la fonction caractéristique $\mathbb{1}_\emptyset^H$ de K_0^H .

On a une décomposition naturelle

$$\mathcal{H}_\emptyset^H = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$$

avec

$$\mathbb{H}_\emptyset^H = \bigotimes_{x \in |X|} \mathbb{H}_{x,\emptyset}^H,$$

si bien que, comme produit tensoriel d'algèbres commutatives, \mathcal{H}_\emptyset^H est elle-même une algèbre commutative.

Toute représentation irréductible π de cette algèbre commutative \mathcal{H}_\emptyset^H est nécessairement de dimension 1. Elle se décompose canoniquement en un produit tensoriel

$$\pi = \bigotimes_{x \in |X|} \pi_x$$

où chaque π_x est une représentation irréductible (de dimension 1) de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$.

Se donner une telle représentation irréductible π_x de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1'^{\pm 1}, X_2'^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2}$ équivaut à se donner, à l'ordre près, les images $z_1(\pi_x), z_2(\pi_x) \in \mathbb{C}^\times$ des deux variables X_1', X_2' .

On pose la définition suivante :

Définition I.7. – *On appelle représentations automorphes de \mathcal{H}_\emptyset^H ses représentations irréductibles (de dimension 1) qui apparaissent dans la décomposition spectrale de l'espace de Hilbert*

$$L^2(H(F) \backslash H(\mathbb{A}) / K_0^H) = L^2(\mathrm{GL}_2(F) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) / \mathrm{GL}_2(O_{\mathbb{A}}))$$

muni de l'action de \mathcal{H}_\emptyset^H par convolution à droite. □

Considérons une représentation irréductible $\pi = \bigotimes_{x \in |X|} \pi_x$ de l'algèbre \mathcal{H}_\emptyset^H . Elle est caractérisée par la donnée, pour toute place $x \in |X|$, des deux “valeurs propres de Hecke” $z_1(\pi_x), z_2(\pi_x)$ bien définies à l'ordre près.

On appelle “forme automorphe propre” de π toute fonction

$$h : H(F) \backslash H(\mathbb{A}) / K_0^H \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que, pour toute place $x \in |X|$ et tout élément h_x de l'algèbre de Hecke sphérique locale $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$, on ait la formule suivante pour le produit de convolution

$$h * h_x = S_x^H(h_x)(z_1(\pi_x), z_2(\pi_x)) \cdot h.$$

Citons le “théorème de multiplicité 1” de Piatetski-Shapiro :

Théorème I.8. – *Pour toute représentation automorphe π de \mathcal{H}_\emptyset^H , l'espace de ses “formes automorphes propres” est de dimension 1.* □

3 Définition locale du transfert de Langlands

Rappelons que nous travaillons sur les deux groupes algébriques sur F

$$G = \mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}_1 \quad \text{et} \quad H = \mathrm{GL}_2.$$

En toute place $x \in |X|$, nous allons définir un homomorphisme d'algèbres commutatives

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

qui va constituer la règle locale de Langlands pour le transfert automorphe par induction de G à H .

Posons :

Définition I.9. – En toute place $x \in |X|$, on appelle homomorphisme de transfert par induction de G à H et on note

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

l'homomorphisme défini de la manière suivante :

(i) Si la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 , avec les isomorphismes

$$S_x^H : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2},$$

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}],$$

ρ_x^* est donné par la substitution des variables (à l'ordre près)

$$X_1' \mapsto X_1,$$

$$X_2' \mapsto X_2.$$

(ii) Si la place x est inerte dans E , avec les isomorphismes

$$S_x^H : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2},$$

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X^{\pm 1}, -X^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_2},$$

ρ_x^* est donné par la substitution des variables (à l'ordre près)

$$X_1' \mapsto X,$$

$$X_2' \mapsto -X.$$

□

La composition avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ permet d'associer à tout caractère χ_x de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ vu comme un homomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \rightarrow \mathbb{C}$$

un caractère de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ noté $(\rho_x)_* \chi_x$.

Autrement dit, pour tout caractère non ramifié

$$\chi_x : E_x^\times / O_{E_x}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

$(\rho_x)_* \chi_x$ est l'unique représentation irréductible π_x de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ telle que :

- Si la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 , on a égalité à l'ordre près des paires de valeurs propres de Hecke

$$(z_1(\pi_x), z_2(\pi_x)) = (z_{x_1}(\chi_x), z_{x_2}(\chi_x)).$$

- Si au contraire le place x est inerte dans E , on a égalité à l'ordre près des paires

$$(z_1(\pi_x), z_2(\pi_x)) = (z_x(\chi_x), -z_x(\chi_x)).$$

Le but de cet article est de présenter une nouvelle démonstration purement adélique du théorème suivant :

Théorème I.10. – *Pour tout caractère automorphe non ramifié*

$$\chi = \prod_{x \in |X|} \chi_x : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times ,$$

il existe une (unique) représentation automorphe $\pi = \bigotimes_{x \in |X|} \pi_x$ de l'algèbre de Hecke sphérique \mathcal{H}_0^H du groupe $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ telle que

$$\forall x \in |X|, \quad \pi_x = (\rho_x)_* \chi_x .$$

Remarque. Ce théorème implique que, pour tout caractère automorphe $\chi = \prod_{x \in |X|} \chi_x$ comme dans l'énoncé, il existe une forme automorphe non nulle (et unique à multiplication près par un scalaire)

$$h : \mathrm{GL}_2(F) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) / \mathrm{GL}_2(O_{\mathbb{A}}) \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que, en toute place $x \in |X|$, on ait

•

$$h * h_x = S_x^H(h_x)(z_{x_1}(\chi_x), z_{x_2}(\chi_x)) \cdot h, \quad \forall h_x \in \mathcal{H}_{x, \emptyset}^H,$$

si x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 ,

•

$$h * h_x = S_x^H(h_x)(z_x(\chi_x), -z_x(\chi_x)) \cdot h, \quad \forall h_x \in \mathcal{H}_{x, \emptyset}^H,$$

si x reste inerte dans E .

Mais réciproquement, si on prouve l'existence d'une forme automorphe h vérifiant une telle propriété relativement à un caractère automorphe χ de $E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times$, la représentation irréductible π de \mathcal{H}_0^H engendrée par cette forme h sera nécessairement automorphe, c'est-à-dire apparaîtra dans la décomposition spectrale hilbertienne de $L^2(H(F) \backslash H(\mathbb{A}) / K_0^H)$. Cela résulte de ce que toutes les valeurs propres $z_{x_1}(\chi_x), z_{x_2}(\chi_x)$ ou $z_x(\chi_x)$ ont 1 pour module. \square

4 Fonctions sphériques et fonctions de Whittaker

En toute place $x \in |X|$, construisons sur $G(F_x) / K_{0,x}^G$ et $H(F_x) / K_{0,x}^H$ des formes propres relatives aux caractères unitaires des algèbres de Hecke sphériques locales $\mathcal{H}_{x, \emptyset}^G$ et $\mathcal{H}_{x, \emptyset}^H$.

Lemme I.11. –

(i) *Si la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 , et $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$ est un couple de nombres complexes de module 1, la fonction*

$$\begin{aligned} \Phi_{x, \lambda_\bullet}^G : E_x^\times = E_{x_1}^\times \times E_{x_2}^\times = F_x^\times \times F_x^\times &\rightarrow \mathbb{C} \\ t = (t_1, t_2) &\mapsto \lambda_1^{x(t_1)} \cdot \lambda_2^{x(t_2)} \end{aligned}$$

est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

- elle est invariante par $K_{0,x}^G = O_{E_{x_1}}^\times \times O_{E_{x_2}}^\times = O_x^\times \times O_x^\times$;
- $\Phi_{x, \lambda_\bullet}^G * \varphi_x = S_x^G(\varphi_x)(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \Phi_{x, \lambda_\bullet}^G, \forall \varphi_x \in \mathcal{H}_{x, \emptyset}^G$;
- $\Phi_{x, \lambda_\bullet}^G(1) = 1$.

(ii) Si au contraire la place x reste inerte dans E , et que λ est un nombre complexe de module 1, la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_{x,\lambda}^G &: E_x^\times &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \lambda^{x(\text{Nm}(t))} \end{aligned}$$

est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

- elle est invariante par $K_{0,x}^G = O_{E_x}^\times$;
- $\Phi_{x,\lambda}^G * \varphi_x = S_x^G(\varphi_x)(\lambda^2) \cdot \Phi_{x,\lambda}^G$, $\forall \varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$;
- $\Phi_{x,\lambda}^G(1) = 1$.

□

Après le groupe multiplicatif $G(F_x)$, passons au groupe matriciel $H(F_x) = \text{GL}_2(F_x)$.

Nous avons besoin de choisir un caractère additif continu non trivial

$$\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times .$$

On rappelle que le conducteur N_ψ d'un tel caractère ψ est l'unique entier tel que ψ soit trivial sur le sous-groupe ouvert compact $\{u \in F_x \mid x(u) \geq N_\psi\}$ mais non trivial sur $\{u \in F_x \mid x(u) \geq N_\psi - 1\}$. Quand le conducteur N_ψ est nul, on dit que le caractère ψ est régulier.

Pour n'importe quel élément $\gamma_0 \in F_x^\times$ de valuation N_ψ , on peut écrire

$$\psi(u) = \psi_0(\gamma_0^{-1} \cdot u), \quad \forall u \in F_x,$$

où ψ_0 est un caractère régulier de F_x .

Utilisant la décomposition d'Iwasawa des éléments $g \in H(F_x) = \text{GL}_2(F_x)$,

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset,$$

telle que rappelée dans le lemme I.5, on peut énoncer la proposition suivante qui explicite et caractérise ce que l'on appelle les fonctions de Whittaker :

Proposition I.12. – Soit $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$ un couple de nombres complexes de module 1.

Considérons la fonction $W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}$ définie par la formule cohérente

$$W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}(g) = \psi \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot \sum_{\substack{n_1 + n_2 = x(\mu_1 \mu_2) \\ x(\mu_1) \geq n_1, n_2 \geq x(\mu_2)}} \lambda_1^{n_1} \cdot \lambda_2^{n_2}$$

en tout élément $g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$, dans le cas où le caractère ψ est régulier ;

puis, dans le cas d'un caractère non trivial général écrit sous la forme $\psi(u) = \psi_0(\gamma_0^{-1} \cdot u)$ avec $\gamma_0 \in F_x^\times$, $x(\gamma_0) = N_\psi$ et ψ_0 régulier, par la formule cohérente

$$\begin{aligned} W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}(g) &= W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi_0} \left(\begin{pmatrix} \gamma_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi_0} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \cdot g \right) \cdot (\lambda_1 \lambda_2)^{-N_\psi} . \end{aligned}$$

Alors cette fonction

$$W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi} : H(F_x) = \text{GL}_2(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

dite fonction de Whittaker, vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- elle est invariante à droite par $K_{0,x}^H = \mathrm{GL}_2(O_x)$;
- $W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi} \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = \psi(u)^{-1} \cdot W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}(g), \forall u \in F_x$;
- $W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi} * h_x = S_x^H(h_x)(\lambda_1, \lambda_2) \cdot W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}, \forall h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$;
- on a $W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}(1) = 1$ si ψ est régulier et $W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi} \left(\begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1$ dans le cas d'un caractère non trivial général écrit sous la forme $\psi(u) = \psi_0(\gamma_0^{-1} \cdot u)$ avec ψ_0 régulier.

□

Insistons sur le fait que la fonction de Whittaker $W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}$ ne dépend pas de l'ordre des deux composantes de $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$.

5 Noyaux locaux de la functorialité

La définition des homomorphismes de transfert

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

par substitution des valeurs propres de Hecke conduit à poser la définition suivante :

Définition I.13. – On appelle noyaux locaux de la functorialité les fonctions

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} : G(F_x) \times H(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

définies de la manière suivante :

- Dans le cas où la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 ,

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi}((t_1, t_2), g) = \int_{|\lambda_1|=1=|\lambda_2|} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 \cdot P_x(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \overline{\Phi_{x,\lambda_\bullet}^G(t_1, t_2)} \cdot W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}(g)$$

où

P_x est un polynôme, élément de $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]$,

(t_1, t_2) décrit $G(F_x) = E_x^\times = E_{x_1}^\times \times E_{x_2}^\times = F_x^\times \times F_x^\times$,

g décrit $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$,

$\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$ décrit le produit de deux copies du cercle unité de \mathbb{C}^\times ,

$d\lambda_1$ et $d\lambda_2$ désignent la mesure invariante de volume 1 sur le cercle unité de \mathbb{C}^\times .

- Dans le cas où la place x reste inerte dans E ,

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t, g) = \int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot P_x(\lambda^2) \cdot \overline{\Phi_{x,\lambda}^G(t)} \cdot W_{x,(\lambda,-\lambda)}^{H,\psi}(g)$$

où

P_x est un polynôme pair, élément de $\mathbb{C}[X^{\pm 2}]$,

t décrit $G(F_x) = E_x^\times$,

g décrit $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$,

λ décrit le cercle unité de \mathbb{C}^\times ,

$d\lambda$ désigne la mesure invariante de volume 1 sur ce cercle unité.

□

La raison pour laquelle on baptise ces fonctions

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} : G(F_x) \times H(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

du nom de “noyaux locaux de la functorialité” est fournie par le lemme suivant :

Lemme I.14. –

(i) Si la place x est scindée dans E , P_x est un polynôme de deux variables et $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$ est un couple de nombres complexes de module 1, on a

$$\int_{F_x^\times \times F_x^\times} d^\times t_1 \cdot d^\times t_2 \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi}((t_1, t_2), g) \cdot \Phi_{x,\lambda_\bullet}^G(t_1, t_2) = P_x(\lambda_1, \lambda_2) \cdot W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}(g).$$

(ii) Si la place x est inerte dans E , P_x est un polynôme pair d’une variable et λ est un nombre complexe de module 1, on a

$$\int_{E_x^\times} d^\times t \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t, g) \cdot \Phi_{x,\lambda}^G(t) = P_x(\lambda^2) \cdot W_{x,(\lambda,-\lambda)}^{H,\psi}(g).$$

□

Ce lemme signifie en effet que les noyaux d’intégration

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} : G(F_x) \times H(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

transforment tout vecteur propre

$$G(F_x)/K_{0,x}^G \rightarrow \mathbb{C}$$

d’un caractère non ramifié χ_x de $G(F_x)$ en un vecteur propre

$$H(F_x)/K_{0,x}^H \rightarrow \mathbb{C}$$

de la représentation irréductible $\pi_x = (\rho_x)_*(\chi_x)$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$.

Les noyaux

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} : G(F_x) \times H(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

sont invariants à droite par $K_{0,x}^G \times K_{0,x}^H$.

Pour toute fonction sphérique $h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$, on a la formule

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} * h_x = K_{x,P_x}^{G,H,\psi} *^{-1} (\rho_x^*)(h_x)$$

où le premier produit de convolution $*$ est relatif à la variable $g_x \in H(F_x)$, et le second $*^{-1}$ à la variable $t_x^{-1} \in G(F_x)$:

$$\begin{aligned} (K_{x,P_x}^{G,H,\psi} * h_x)(t, g) &= \int_{H(F_x)} dg_x \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t, g \cdot g_x^{-1}) \cdot h_x(g_x) \\ (K_{x,P_x}^{G,H,\psi} *^{-1} \varphi_x)(t, g) &= \int_{G(F_x)} d^\times t_x \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t \cdot t_x^{-1}, g) \cdot \varphi_x(t_x^{-1}) \end{aligned}$$

Enfin, on a pour toute fonction sphérique $\varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} *^{-1} \varphi_x = K_{x,P_x \cdot S_x^G}^{G,H,\psi}(\varphi_x).$$

6 Échange par transformation de Fourier

En toute place $x \in |X|$, on dispose de l'homomorphisme local de trace

$$\begin{aligned} \text{Tr} & : E_x \rightarrow F_x, \\ t_x & \mapsto \text{Tr}(t_x) = \text{trace de l'endomorphisme de multiplication par } t_x \text{ dans } E_x \\ & \text{vu comme espace vectoriel de dimension 2 sur } F_x. \end{aligned}$$

Il envoie O_{E_x} dans O_{F_x} .

Dans le cas où la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 , l'homomorphisme de trace s'écrit simplement

$$\begin{aligned} \text{Tr} & : E_x = E_{x_1} \times E_{x_2} = F_x \times F_x \rightarrow F_x, \\ t = (t_1, t_2) & \mapsto t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Ayant choisi un caractère additif continu non trivial

$$\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

on dispose du caractère additif non trivial induit par composition

$$\psi \circ \text{Tr} : E_x \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

On rappelle qu'on a noté N_ψ le conducteur du caractère ψ . Munissons E_x de la mesure de Haar additive dt qui attribue au sous-groupe ouvert compact O_{E_x} le volume $q_x^{N_\psi}$.

Ces choix étant faits, on peut rappeler la définition de la transformation de Fourier relative à $\psi \circ \text{Tr}$ sur E_x :

Proposition I.15. – *La transformation*

$$f \mapsto \left(\hat{f} : t' \mapsto \hat{f}(t') = \int_{E_x} dt \cdot f(t) \cdot \psi \circ \text{Tr}(tt') \right)$$

définit un automorphisme de l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur E_x .

On l'appelle la ψ -transformation de Fourier sur E_x .

Son automorphisme réciproque n'est autre que la $\bar{\psi}$ -transformation de Fourier sur E_x :

$$f \mapsto \left(t' \mapsto \int_{E_x} dt \cdot f(t) \cdot \bar{\psi} \circ \text{Tr}(tt') \right)$$

□

Le but du prochain chapitre est de démontrer le théorème suivant :

Théorème I.16. – *En toute place $x \in |X|$, pour tout polynôme P_x (en deux variables ou une seule suivant que x est scindée ou inerte dans E), pour tout caractère multiplicatif unitaire (éventuellement ramifié)*

$$\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

et pour tout élément $g \in H(F_x) = \text{GL}_2(F_x)$, les deux fonctions suivantes sur E_x^\times

$$\begin{aligned} t & \mapsto \omega(\text{Nm}(t))^{-1} \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ t & \mapsto \omega(\text{Nm}(t)) \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \bar{\psi}} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \end{aligned}$$

se prolongent par continuité en des fonctions localement constantes à support compact sur E_x .

De plus, la seconde de ces fonctions est la ψ -transformée de Fourier de la première, à un signe près qui vaut

- 1 si la place x est scindée dans E ,
- $(-1)^{N_\psi}$ si la place x est inerte dans E .

□

Chapitre II :

Vérifications locales

1 Réduction au cas d'un caractère additif régulier

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème I.16 dont l'énoncé clôt le chapitre précédent.

Dans ce premier paragraphe, nous allons prouver qu'il suffit de le faire dans le cas où le caractère ψ est régulier.

Fixons donc une place $x \in |X|$, un polynôme P_x (en deux variables ou une seule selon que x est scindée ou inerte dans E), un caractère multiplicatif unitaire $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et un élément $g \in \text{GL}_2(F_x)$.

Pour tout caractère additif non trivial

$$\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

on définit les deux fonctions suivantes sur E_x^\times :

$$f_\psi(t) = \omega(\text{Nm}(t))^{-1} \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

$$f'_\psi(t) = \omega(\text{Nm}(t)) \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\bar{\psi}} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

Prouvons :

Lemme II.1. –

(i) Soient deux caractères additifs non triviaux

$$\psi, \psi_0 : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

reliés par une identité de la forme

$$\psi(a) = \psi_0(\gamma_0^{-1} \cdot a)$$

pour un élément $\gamma_0 \in F_x^\times$.

Alors on a les relations

$$\begin{cases} f_\psi(t) &= \omega(\gamma_0) \cdot f_{\psi_0}(t), \\ f'_\psi(t) &= \varepsilon \cdot \omega(\gamma_0) \cdot q_x^{x(\gamma_0)} \cdot f'_{\psi_0}(\gamma_0^{-1} \cdot t), \end{cases}$$

où ε est le signe

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si la place } x \text{ est scindée dans } E, \\ (-1)^{x(\gamma_0)} & \text{si la place } x \text{ est inerte dans } E. \end{cases}$$

(ii) Pour démontrer le théorème I.16 en une place $x \in |X|$, il suffit de traiter le cas où le caractère additif $\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est régulier.

Démonstration.

(i) Les fonctions de Whittaker associées à une paire de valeurs propres unitaires $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$ et aux caractères ψ et ψ_0 sont reliées par la formule

$$W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi}(g) = W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi_0} \left(\begin{pmatrix} \gamma_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right).$$

On en déduit

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = \omega(\gamma_0) \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi_0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right).$$

De même, les fonctions de Whittaker relatives aux caractères conjugués $\bar{\psi}$ et $\bar{\psi}_0$ sont reliées par la formule

$$W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\bar{\psi}}(g) = W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\bar{\psi}_0} \left(\begin{pmatrix} \gamma_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = (\lambda_1 \lambda_2)^{-x(\gamma_0)} \cdot W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\bar{\psi}_0} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \cdot g \right).$$

Si la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 , on a encore

$$(\lambda_1 \lambda_2)^{-x(\gamma_0)} \cdot \overline{\Phi_{x,\lambda_\bullet}^G(t^{-1})} = \overline{\Phi_{x,\lambda_\bullet}^G((\gamma_0^{-1} \cdot t)^{-1})},$$

tandis que si la place x reste inerte dans E , on a

$$\lambda^{-x(\gamma_0)} \cdot (-\lambda)^{-x(\gamma_0)} \cdot \overline{\Phi_{x,\lambda}^G(t^{-1})} = (-1)^{x(\gamma_0)} \cdot \overline{\Phi_{x,\lambda}^G((\gamma_0^{-1} \cdot t)^{-1})}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\bar{\psi}} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= \varepsilon \cdot \omega(\gamma_0)^{-1} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\bar{\psi}_0} \left((\gamma_0^{-1} \cdot t)^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right). \end{aligned}$$

On obtient comme voulu

$$\begin{cases} f_\psi(t) &= \omega(\gamma_0) \cdot f_{\psi_0}(t), \\ f'_\psi(t) &= \varepsilon \cdot \omega(\gamma_0) \cdot q_x^{x(\gamma_0)} \cdot f'_{\psi_0}(\gamma_0^{-1} \cdot t), \end{cases}$$

puisque

$$\omega(\text{Nm}(\gamma_0^{-1})) \cdot |\text{Nm}(\gamma_0^{-1})|_x^{-\frac{1}{2}} = \omega(\gamma_0)^{-2} \cdot q_x^{-x(\gamma_0)}.$$

(ii) Un caractère additif non trivial

$$\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

s'écrit sous la forme

$$\psi(a) = \psi_0(\gamma_0^{-1} \cdot a)$$

où ψ_0 est un caractère régulier et $x(\gamma_0) = N_\psi$.

Or il résulte de la définition rappelée dans la proposition I.15 que la ψ -transformée de Fourier \hat{f} d'une fonction f localement constante à support compact sur E_x et sa ψ_0 -transformée de Fourier \hat{f}^0 sont reliées par la formule

$$\hat{f}(t') = q_x^{N_\psi} \cdot \hat{f}^0(\gamma_0^{-1} \cdot t').$$

Donc l'assertion (ii) est conséquence de (i). □

Dans les quatre paragraphes suivants 2, 3, 4 et 5 du présent chapitre II, on supposera donc que le caractère additif $\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est régulier et, par conséquent, que la mesure additive dt sur E_x attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact O_x .

2 Calculs sur les noyaux en une place scindée

Situons-nous en une place $x \in |X|$ qui se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 .

Pour démontrer le théorème I.16, il n'y a pas de restriction à supposer que le polynôme P_x est un monôme, de la forme $X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Le noyau local associé s'écrit

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi}(t, g) = \int_{|\lambda_1|=1=|\lambda_2|} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 \cdot \lambda_1^{-k_1} \cdot \lambda_2^{-k_2} \cdot \overline{\Phi_{x, \lambda_\bullet}^G(t)} \cdot W_{x, \lambda_\bullet}^{H, \psi}(g).$$

Décomposons

$$t = (t_1, t_2) \quad \text{avec} \quad t_1, t_2 \in F_x^\times,$$

et

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$$

avec $\mu_1, \mu_2 \in F_x^\times$, $u \in F_x$, $g_\emptyset \in \text{GL}_2(O_x)$. On a donc

$$\overline{\Phi_{x, \lambda_\bullet}^G(t)} = \lambda_1^{-x(t_1)} \cdot \lambda_2^{-x(t_2)}$$

et

$$W_{x, \lambda_\bullet}^{H, \psi}(g) = \psi \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot \sum_{\substack{n_1 + n_2 = x(\mu_1 \mu_2) \\ x(\mu_1) \geq n_1, n_2 \geq x(\mu_2)}} \lambda_1^{n_1} \cdot \lambda_2^{n_2},$$

d'où l'on déduit :

Lemme II.2. – *Avec les notations ci-dessus, le noyau*

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi}(t, g)$$

s'annule en dehors de la zone

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + x(t_1 t_2) = x(\mu_1 \mu_2), \\ x(\mu_1) \geq \max\{k_1 + x(t_1), k_2 + x(t_2)\}, \\ x(\mu_2) \leq \min\{k_1 + x(t_1), k_2 + x(t_2)\}. \end{cases}$$

À l'intérieur de cette zone, il vaut

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi}(t, g) = q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot \psi \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1}$$

qui se réduit simplement à

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}}$$

lorsque $x(u) \geq 0$. □

Considérons maintenant $g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$ comme fixé, et étudions le noyau

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

comme fonction de $t = (t_1, t_2) \in E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$ et de $\mu \in F_x^\times$.

D'après le lemme ci-dessus, ce noyau est supporté dans la zone

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + x(t_1 t_2) = x(\mu_1 \mu_2) + x(\mu), \\ x(\mu \mu_1) \geq \max\{k_1 + x(t_1), k_2 + x(t_2)\}, \\ x(\mu_2) \leq \min\{k_1 + x(t_1), k_2 + x(t_2)\}, \end{cases}$$

où il vaut

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{x(\mu)}{2}} \cdot \psi\left(\frac{\mu \mu_1}{\mu_2} \cdot u\right)^{-1},$$

expression qui se réduit simplement à

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{x(\mu)}{2}}$$

lorsque $x(u) \geq 0$.

On calcule maintenant :

Proposition II.3. – *Étant donné un caractère multiplicatif continu*

$$\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi}\left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g\right),$$

considérée comme fonction de $t = (t_1, t_2) \in E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$, est nulle en dehors de la zone

$$\begin{cases} x(t_1) \geq x(\mu_2) - k_1, \\ x(t_2) \geq x(\mu_2) - k_2. \end{cases}$$

À l'intérieur de cette zone, elle vaut suivant les cas :

(i) 0 si $x(u) \geq 0$ et le caractère ω est ramifié.

(ii)

$$z_\omega^{k_1 + k_2 - x(\mu_1 \mu_2)} \cdot q_x^{\frac{(x(\mu_2) - k_1) + (x(\mu_2) - k_2)}{2}} \cdot \left(\frac{z_\omega}{q_x^{\frac{1}{2}}}\right)^{x(t_1 t_2)}$$

si $x(u) \geq 0$ et le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω .

(iii) *Le produit de*

$$z_\omega^{k_1 + k_2 - x(\mu_1 \mu_2)} \cdot q_x^{\frac{(x(\mu_2) - k_1) + (x(\mu_2) - k_2)}{2}} \cdot \left(\frac{z_\omega}{q_x^{\frac{1}{2}}}\right)^{x(t_1 t_2)}$$

et de

$$\begin{cases} 1 & \text{si } (x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2)) \geq v, \\ -\frac{1}{q_x - 1} & \text{si } (x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2)) = v - 1, \\ 0 & \text{si } (x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2)) \leq v - 2, \end{cases}$$

dans le cas où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et où le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω .

(iv) *Le produit de*

$$\omega\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 u}\right) \cdot q_x^{\frac{(x(\mu_2) - k_1 - x(t_1)) + (x(\mu_2) - k_2 - x(t_2))}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{1}(x(\mu) = -N_\omega) \cdot \omega(\mu) \cdot \psi(\mu)^{-1}$$

et de la fonction caractéristique de la zone

$$\begin{cases} x(t_1) \geq x(\mu_2) - k_1, \\ x(t_2) \geq x(\mu_2) - k_2, \\ (x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2)) - v = -N_\omega, \end{cases}$$

dans le cas où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et où le caractère ω est ramifié, d'indice de ramification $N_\omega \geq 1$.

Démonstration. D'après le lemme II.2, la fonction

$$\mu \mapsto K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

s'annule en dehors de la zone

$$\begin{cases} x(t_1) \geq x(\mu_2) - k_1, \\ x(t_2) \geq x(\mu_2) - k_2, \\ x(\mu) = k_1 + k_2 + x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2), \end{cases}$$

et, dans cette zone, elle vaut

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{x(\mu)}{2}} \cdot \psi \left(\frac{\mu \mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1}$$

qui se réduit simplement à

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{x(\mu)}{2}}$$

lorsque $x(u) \geq 0$.

(i) résulte alors de ce que, si $x(u) \geq 0$, $\mu \mapsto K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$ ne dépend que de la valuation de μ .

(ii) résulte de l'égalité

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}} \cdot z_\omega)^{k_1 + k_2 + x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2)} = z_\omega^{k_1 + k_2 - x(\mu_1 \mu_2)} \cdot q_x^{\frac{(x(\mu_2) - k_1) + (x(\mu_2) - k_2)}{2}} \cdot \left(\frac{z_\omega}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{x(t_1 t_2)}.$$

(iii) résulte de la même égalité et de ce que l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = k_1 + k_2 + x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2)) \cdot \psi \left(\frac{\mu \mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1} \\ &= \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = k_1 + k_2 + x(t_1 t_2) - 2x(\mu_2) - v) \cdot \psi(u)^{-1} \end{aligned}$$

vaut 1, $-\frac{1}{q_x - 1}$ ou 0 suivant que

$$k_1 + k_2 + x(t_1 t_2) - 2x(\mu_2) = (x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2))$$

est strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à $v - 1$.

(iv) résulte de l'égalité

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}(k_1 + k_2 + x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2))} = q_x^{\frac{(x(\mu_2) - k_1 - x(t_1)) + (x(\mu_2) - k_2 - x(t_2))}{2}}$$

et, par le changement de variable

$$\mu \mapsto \frac{\mu_2}{\mu_1 u} \cdot \mu,$$

de la partie (i) du lemme suivant que nous rappelons :

Lemme II.4. – *Étant donné un caractère multiplicatif ramifié*

$$\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times ,$$

notons N_ω son indice de ramification, c'est-à-dire le plus petit entier ≥ 1 tel que la restriction de ω au sous-groupe multiplicatif compact ouvert $1 + m_x^{N_\omega}$ soit triviale.

Alors, si $\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère additif régulier, on a

(i) Les intégrales

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = N) \cdot \omega(\mu) \cdot \psi(\mu)^{-1}$$

valent toutes 0, sauf si $N = -N_\omega$.

(ii) Pour $N = -N_\omega$, on a

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = -N_\omega) \cdot \omega(\mu) \cdot \psi(\mu)^{-1} = \frac{q_x^{-N_\omega}}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \varepsilon(\omega, \psi)$$

où

$$\varepsilon(\omega, \psi) = \int_{F_x} da \cdot \mathbb{I}(x(a) = -N_\omega) \cdot \omega(a) \cdot \psi(a)^{-1}$$

est un nombre complexe de module $q_x^{\frac{N_\omega}{2}}$. □

Notant toujours $g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$, considérons maintenant le noyau

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

comme fonction de $t = (t_1, t_2) \in E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$ et de $\mu \in F_x^\times$.

De la même façon que dans la proposition II.3, on calcule :

Proposition II.5. – *Étant donné un caractère multiplicatif continu*

$$\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times ,$$

l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) ,$$

considérée comme fonction de $t = (t_1, t_2) \in E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$, est nulle en dehors de la zone

$$\begin{cases} x(t_1) \geq k_1 - x(\mu_2) + \min\{0, x(u)\} , \\ x(t_2) \geq k_2 - x(\mu_2) + \min\{0, x(u)\} . \end{cases}$$

À l'intérieur de cette zone, elle vaut suivant les cas :

(i) 0 si $x(u) \geq 0$ et le caractère ω est ramifié.

(ii)

$$z_\omega^{k_1+k_2-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{-\frac{(x(\mu_2)-k_1)+(x(\mu_2)-k_2)}{2}} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{-x(t_1 t_2)}$$

si $x(u) \geq 0$ et le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω .

(iii) Le produit de

$$z_\omega^{k_1+k_2-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{(k_1-x(\mu_2)-v)+(k_2-x(\mu_2)-v)}{2}} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{-x(t_1t_2)}$$

et de

$$\begin{cases} 1 & \text{si } (x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) \geq v, \\ -\frac{1}{q_x - 1} & \text{si } (x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) = v - 1, \\ 0 & \text{si } (x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) \leq v - 2, \end{cases}$$

dans le cas où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et où le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω .

(iv) Le produit de

$$\omega\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 u}\right) \cdot q_x^{\frac{(k_1-x(\mu_2)-x(t_1)-v)+(k_2-x(\mu_2)-x(t_2)-v)}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = -N_\omega) \cdot \omega(\mu)^{-1} \cdot \psi(\mu)^{-1}$$

et de la fonction caractéristique de la zone

$$\begin{cases} x(t_1) \geq k_1 - x(\mu_2) - v, \\ x(t_2) \geq k_2 - x(\mu_2) - v, \\ (x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) - v = -N_\omega, \end{cases}$$

dans le cas où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et où le caractère ω est ramifié, d'indice de ramification $N_\omega \geq 1$.

Démonstration. Traitons d'abord les cas (i) et (ii) où $x(u) \geq 0$. Quitte à modifier g_θ , on peut même supposer que $u = 0$.

Alors le noyau

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu \mu_1 \end{pmatrix} \right)$$

s'annule en dehors de la zone

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - x(t_1 t_2) = x(\mu_1 \mu_2) + x(\mu), \\ x(\mu_2) \geq \max\{k_1 - x(t_1), k_2 - x(t_2)\}, \\ x(\mu \mu_1) \leq \min\{k_1 - x(t_1), k_2 - x(t_2)\}, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x(t_1) \geq k_1 - x(\mu_2), \\ x(t_2) \geq k_2 - x(\mu_2), \\ x(\mu) = k_1 + k_2 - x(\mu_1 \mu_2) - x(t_1 t_2). \end{cases}$$

Et, à l'intérieur de cette zone, il vaut

$$q_x^{\frac{x(\mu_1)-x(\mu_2)}{2}} \cdot q_x^{\frac{x(\mu)}{2}}.$$

(i) résulte alors de ce que cette expression ne dépend que de la valuation de μ , et (ii) de l'égalité

$$\begin{aligned} & q_x^{\frac{x(\mu_1)-x(\mu_2)}{2}} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{k_1+k_2-x(\mu_1\mu_2)-x(t_1 t_2)} \\ &= z_\omega^{k_1+k_2-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{-(x(\mu_2)-k_1)+(x(\mu_2)-k_2)}{2}} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{-x(t_1 t_2)}. \end{aligned}$$

Traitons enfin les cas (iii) et (iv) où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$.

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme II.6. – Si $u \in F_x$ avec $x(u) = -v$ et $v \geq 1$, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} u^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(O_x).$$

□

Suite de la démonstration de la proposition II.5. Quand $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, le noyau

$$\begin{aligned} & K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} \mu_2 u^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \mu_1 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mu_2 u^{-1}}{\mu \mu_1 u} \cdot u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_2 u^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \mu_1 u \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

s'annule en dehors de la zone

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - x(t_1 t_2) = x(\mu_1 \mu_2 \mu), \\ x(\mu_2 u^{-1}) \geq \max\{k_1 - x(t_1), k_2 - x(t_2)\}, \\ x(\mu \mu_1 u) \leq \min\{k_1 - x(t_1), k_2 - x(t_2)\}, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x(t_1) \geq k_1 - x(\mu_2) - v, \\ x(t_2) \geq k_2 - x(\mu_2) - v, \\ x(\mu) = k_1 + k_2 - x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2). \end{cases}$$

Et, à l'intérieur de cette zone, il vaut

$$\frac{x(\mu_1) - x(\mu_2) - v}{q_x} \cdot \frac{x(\mu)}{q_x^{\frac{1}{2}}} \cdot \psi \left(\frac{\mu_2}{\mu \mu_1} \cdot u^{-1} \right)^{-1}.$$

(iii) résulte alors de l'égalité

$$\begin{aligned} & \frac{x(\mu_1) - x(\mu_2) - v}{q_x} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{k_1 + k_2 - x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2)} \\ &= z_\omega^{k_1 + k_2 - x(\mu_1 \mu_2)} \cdot q_x^{\frac{(k_1 - x(\mu_2) - v) + (k_2 - x(\mu_2) - v)}{2}} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{-x(t_1 t_2)} \end{aligned}$$

et de ce que l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = k_1 + k_2 - x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2)) \cdot \psi \left(\frac{\mu_2}{\mu \mu_1} \cdot u^{-1} \right)^{-1}$$

vaut 1, $-\frac{1}{q_x - 1}$, ou 0 suivant que

$$v + x \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) - (k_1 + k_2 - x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2)) = (x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) - v$$

est strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à -1 .

(iv) résulte de l'égalité

$$\frac{x(\mu_1) - x(\mu_2) - v}{q_x} \cdot \frac{1}{q_x^{\frac{1}{2}}} (k_1 + k_2 - x(t_1 t_2) - x(\mu_1 \mu_2)) = \frac{(k_1 - x(\mu_2) - x(t_1) - v) + (k_2 - x(\mu_2) - x(t_2) - v)}{2} = q_x$$

et, par le changement de variable

$$\mu \mapsto \frac{\mu_2}{\mu \mu_1 u},$$

de la partie (i) du lemme II.4.

□

3 Transformation de Fourier des noyaux en une place scindée

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème I.16 dans le cas où le caractère additif $\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est régulier et la place $x \in |X|$ se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 .

Considérons donc les deux fonctions f et f' suivantes, définies sur E_x^\times après le choix d'un élément $g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$ de $\mathrm{GL}_2(F_x)$ et d'un caractère multiplicatif $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Elles associent à tout élément $t = (t_1, t_2) \in E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$ les produits

$$f(t) = \omega(t_1 t_2)^{-1} \cdot |t_1 t_2|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right),$$

$$f'(t) = \omega(t_1 t_2) \cdot |t_1 t_2|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \bar{\psi}} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right).$$

Il s'agit de comparer les expressions obtenues dans chacun des quatre cas (i), (ii), (iii) et (iv) des propositions II.3 et II.5.

Supposons d'abord que $x(u) \geq 0$, ce qui correspond aux cas (i) et (ii).

Le cas (i) où ω est ramifié : Alors les fonctions f et f' sont toutes deux nulles.

Le cas (ii) où ω est non ramifié : D'après la proposition II.3, la fonction $f(t)$ est alors le produit de la constante

$$z_\omega^{k_1+k_2-x(\mu_1\mu_2)}$$

et des deux fonctions

$$q_x^{\frac{x(\mu_2)-k_1}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq x(\mu_2) - k_1),$$

$$q_x^{\frac{x(\mu_2)-k_2}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq x(\mu_2) - k_2),$$

tandis que, d'après la proposition II.5(ii), la fonction $f'(t)$ est le produit de la même constante

$$z_\omega^{k_1+k_2-x(\mu_1\mu_2)}$$

et des deux fonctions

$$q_x^{-\frac{x(\mu_2)-k_1}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq k_1 - x(\mu_2)),$$

$$q_x^{-\frac{x(\mu_2)-k_2}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq k_2 - x(\mu_2)).$$

Les deux fonctions f et f' sont localement constantes à support compact sur E_x et transformées de Fourier l'une de l'autre. Cela résulte de ce que, pour tout entier N , les deux fonctions sur F_x

$$t \mapsto q_x^{N/2} \cdot \mathbb{I}(x(t) \geq N)$$

$$t \mapsto q_x^{-N/2} \cdot \mathbb{I}(x(t) \geq -N)$$

sont transformées de Fourier l'une de l'autre.

Le cas (iii) où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et ω est non ramifié : Dans ce cas, les deux fonctions $f(t)$ et $f'(t)$ s'écrivent comme le produit de la même constante

$$z_\omega^{k_1+k_2-x(\mu_1\mu_2)}$$

et des deux fonctions

$$t = (t_1, t_2) \mapsto q_x^{\frac{(x(\mu_2)-k_1)+(x(\mu_2)-k_2)}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq x(\mu_2) - k_1) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq x(\mu_2) - k_2) \\ \cdot \left[\mathbb{I}((x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2)) \geq v) \right. \\ \left. - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}((x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2)) = v - 1) \right]$$

et

$$t \mapsto q_x^{\frac{(k_1-x(\mu_2)-v)+(k_2-x(\mu_2)-v)}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq k_1 - x(\mu_2) - v) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq k_2 - x(\mu_2) - v) \\ \cdot \left[\mathbb{I}((x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) \geq v) \right. \\ \left. - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}((x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) = v - 1) \right].$$

Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ un élément de $E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$ tel que $v_x(\gamma_1) = x(\mu_2) - k_1$ et $v_x(\gamma_2) = x(\mu_2) - k_2$. Démontrer que f' est la transformée de Fourier de f équivaut à démontrer que

$$t \mapsto |\gamma_1 \gamma_2|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(\gamma^{-1} \cdot t)$$

est la transformée de Fourier de

$$t \mapsto |\gamma_1 \gamma_2|_x^{\frac{1}{2}} \cdot f(\gamma \cdot t).$$

Par conséquent, la démonstration du théorème I.16 dans le présent cas (iii) se ramène au lemme suivant :

Lemme II.7. – Sur $F_x \times F_x$, les deux fonctions

$$t = (t_1, t_2) \mapsto f_v(t) = \mathbb{I}(x(t_1) \geq 0) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq 0) \\ \cdot \left[\mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) \geq v) - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) = v - 1) \right]$$

et

$$t \mapsto f'_v(t) = q_x^{-v} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq -v) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq -v) \\ \cdot \left[\mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) \geq -v) - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) = -v - 1) \right]$$

associées à n'importe quel entier $v \geq 1$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre.

Démonstration du lemme II.7. Ces deux fonctions de $t = (t_1, t_2)$ sont localement constantes à support compact, et leurs valeurs ne dépendent que des valuations $x(t_1)$ et $x(t_2)$.

Pour démontrer le lemme, il suffit de vérifier que, pour tous entiers $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, le produit scalaire de f_v avec la fonction f_{n_1, n_2}

$$(t_1, t_2) \mapsto f_{n_1, n_2}(t_1, t_2) = \mathbb{I}(x(t_1) \geq n_1) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq n_2)$$

est égal au produit scalaire de f'_v avec la transformée de Fourier \hat{f}_{n_1, n_2} de f_{n_1, n_2}

$$(t_1, t_2) \mapsto \hat{f}_{n_1, n_2}(t_1, t_2) = q_x^{-n_1 - n_2} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq -n_1) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq -n_2).$$

Autrement dit, on doit vérifier que l'intégrale

$$I = \int_{F_x \times F_x} dt_1 \cdot dt_2 \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq \max\{0, n_1\}) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq \max\{0, n_2\}) \\ \cdot \left[\mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) \geq v) - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) = v - 1) \right]$$

est égale à

$$I' = q_x^{-n_1 - n_2 - v} \int_{F_x \times F_x} dt_1 \cdot dt_2 \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq \max\{-v, -n_1\}) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq \max\{-v, -n_2\}) \\ \cdot \left[\mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) \geq -v) - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) = -v - 1) \right].$$

Or on a

$$I = q_x^{-\max\{0, n_1\}} \cdot q_x^{-\max\{0, n_2\}}$$

si $v \leq \max\{0, n_1\} + \max\{0, n_2\}$ et, dans le cas contraire,

$$I = \int_{F_x \times F_x} dt_1 \cdot dt_2 \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq \max\{0, n_1\}) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq \max\{0, n_2\}) \\ \cdot \left[\frac{q_x}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) \geq v) - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) + x(t_2) \geq v - 1) \right] \\ = \int_{F_x \times F_x} dt_1 \cdot dt_2 \cdot \mathbb{I}(x(t_1) = \max\{0, n_1\}) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq v - \max\{0, n_1\}) \cdot \frac{q_x}{q_x - 1} \\ = q_x^{-v}$$

si bien que, dans tous les cas,

$$I = q_x^{-\max\{v, \max\{0, n_1\} + \max\{0, n_2\}\}}.$$

De même, on a

$$I' = q_x^{-n_1 - n_2 - v} \cdot q_x^{-\max\{-v, \max\{-v, -n_1\} + \max\{-v, -n_2\}\}} = q_x^{-n_1 - n_2 - v} \cdot q_x^{\min\{v, \min\{v, n_1\} + \min\{v, n_2\}\}}.$$

Nous sommes ramenés au lemme suivant dont nous laissons la vérification au lecteur :

Lemme II.8. – *Pour trois entiers $v \geq 0$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, on a toujours l'égalité*

$$\max\{v, \max\{0, n_1\} + \max\{0, n_2\}\} + \min\{v, \min\{v, n_1\} + \min\{v, n_2\}\} = v + n_1 + n_2.$$

□

Le cas (iv) où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et ω est ramifié : D'après la proposition II.3(iv), et avec les notations du lemme II.4, la valeur de la fonction f en un point $t = (t_1, t_2) \in E_x^\times = F_x^\times \times F_x^\times$ est

$$f(t) = \omega \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 u} \right) \cdot \frac{q_x^{-N_\omega}}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \varepsilon(\omega, \psi) \\ \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - k_1}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq x(\mu_2) - k_1) \\ \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - k_2}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq x(\mu_2) - k_2) \\ \cdot \mathbb{I}((x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2)) - v = -N_\omega) \cdot \overline{\omega(t_1 t_2)}$$

tandis que, d'après la proposition II.5(iv), la valeur de la fonction f' en $t = (t_1, t_2)$ est

$$\begin{aligned} f'(t) &= \omega \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 u} \right) \cdot \frac{q_x^{-N_\omega}}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \varepsilon(\bar{\omega}, \bar{\psi}) \\ &\cdot q_x^{\frac{k_1 - x(\mu_2) - v}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) \geq k_1 - x(\mu_2) - v) \\ &\cdot q_x^{\frac{k_2 - x(\mu_2) - v}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_2) \geq k_2 - x(\mu_2) - v) \\ &\cdot \mathbb{I}((x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) - v = -N_\omega) \cdot \omega(t_1 t_2). \end{aligned}$$

Ces deux expressions sont nulles si $v < N_\omega$.

Supposons donc que l'on ait $v \geq N_\omega$.

On remarque que l'égalité

$$(x(t_1) + k_1 - x(\mu_2)) + (x(t_2) + k_2 - x(\mu_2)) - v = -N_\omega$$

entraîne

$$\frac{(x(\mu_2) - k_1) + (x(\mu_2) - k_2)}{q_x} = \frac{N_\omega - v}{q_x} \cdot q_x^{\frac{1}{2}x(t_1 t_2)}$$

et que, de même, l'égalité

$$(x(t_1) - k_1 + x(\mu_2) + v) + (x(t_2) - k_2 + x(\mu_2) + v) - v = -N_\omega$$

entraîne

$$\frac{(k_1 - x(\mu_2) - v) + (k_2 - x(\mu_2) - v)}{q_x} = \frac{N_\omega - v}{q_x} \cdot q_x^{\frac{1}{2}x(t_1 t_2)}.$$

Nous sommes réduits au lemme suivant :

Lemme II.9. – *Pour tous entiers $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, la ψ -transformée de Fourier de la fonction localement constante à support compact sur $E_x = F_x \times F_x$*

$$(t_1, t_2) \mapsto f_{n_1, n_2}(t_1, t_2) = q_x^{\frac{n_1 + n_2}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t_1) = n_1) \cdot \mathbb{I}(x(t_2) = n_2) \cdot \varepsilon(\omega, \psi) \cdot \overline{\omega(t_1 t_2)}$$

est égale à la fonction

$$(t'_1, t'_2) \mapsto q_x^{-N_\omega} \cdot q_x^{-\frac{n_1 + n_2}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t'_1) = -n_1 - N_\omega) \cdot \mathbb{I}(x(t'_2) = -n_2 - N_\omega) \cdot \varepsilon(\bar{\omega}, \bar{\psi}) \cdot \omega(t_1 t_2).$$

Démonstration du lemme II.9. D'après le lemme II.4(i), l'intégrale

$$\int_{F_x} dt \cdot \mathbb{I}(x(t) = n) \cdot \overline{\omega(t)} \cdot \psi(tt')$$

est non nulle seulement si $n + x(t') = -N_\omega$, et elle vaut dans ce cas

$$q_x^{-n - N_\omega} \cdot \varepsilon(\bar{\omega}, \bar{\psi}) \cdot \omega(t').$$

Donc la transformée de Fourier de la fonction f_{n_1, n_2} de l'énoncé du lemme s'écrit

$$\hat{f}_{n_1, n_2}(t'_1, t'_2) = \varepsilon(\omega, \psi) \cdot \varepsilon(\bar{\omega}, \bar{\psi})^2 \cdot q_x^{-2N_\omega} \cdot q_x^{-\frac{n_1 + n_2}{2}} \cdot \mathbb{I}(x(t'_1) = -n_1 - N_\omega) \cdot \mathbb{I}(x(t'_2) = -n_2 - N_\omega) \cdot \omega(t'_1 t'_2).$$

L'égalité voulue résulte alors de la formule rappelée dans le lemme II.4(ii)

$$\varepsilon(\omega, \psi) \cdot \varepsilon(\bar{\omega}, \bar{\psi}) = |\varepsilon(\omega, \psi)|^2 = q_x^{N_\omega}.$$

Cela achève la démonstration du lemme II.9 et donc aussi du théorème I.16 en les places $x \in |X|$ qui se scindent dans E . \square

4 Calculs sur les noyaux en une place inerte

Allons maintenant en une place $x \in |X|$ qui reste inerte dans E .

Pour démontrer le théorème I.16, il n'y a pas de restriction à supposer que le polynôme pair P_x est un monôme, de la forme X^{-2k} , avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le noyau local associé s'écrit

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t, g) = \int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot \lambda^{-2k} \cdot \overline{\Phi_{x,\lambda}^G(t)} \cdot W_{x,(\lambda,-\lambda)}^{H,\psi}(g)$$

comme fonction de $t \in E_x^\times$ et de

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset \in \mathrm{GL}_2(F_x).$$

On a

$$\overline{\Phi_{x,\lambda}^G(t)} = \lambda^{-x(\mathrm{Nm}(t))}$$

et

$$W_{x,(\lambda,-\lambda)}^{H,\psi}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(\mu_1) - x(\mu_2) \notin 2\mathbb{N}, \\ \psi \begin{pmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot u^{-1} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot \lambda^{x(\mu_1)} \cdot (-\lambda)^{x(\mu_2)} & \\ 0 & \text{si } x(\mu_1) - x(\mu_2) \in 2\mathbb{N}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

Lemme II.10. – *Avec les notations ci-dessus, le noyau*

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t, g)$$

s'annule en dehors de la zone

$$\begin{cases} 2k + x(\mathrm{Nm}(t)) = x(\mu_1 \mu_2), \\ x(\mu_1) \geq x(\mu_2). \end{cases}$$

À l'intérieur de cette zone, il vaut

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot \psi \begin{pmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot u^{-1}$$

qui se réduit simplement à

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}}$$

lorsque $x(u) \geq 0$. □

Considérons désormais $g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$ comme fixé, et étudions le noyau

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

comme fonction de $t \in E_x^\times$ et de $\mu \in F_x^\times$.

D'après le lemme ci-dessus, ce noyau est supporté dans la zone

$$\begin{cases} 2k + x(\mathrm{Nm}(t)) = x(\mu_1 \mu_2) + x(\mu), \\ x(\mu \mu_1) \geq x(\mu_2), \end{cases}$$

où il vaut

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2)-x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{x(\mu)}{2}} \cdot \psi \left(\frac{\mu \mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1},$$

expression qui se réduit à

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2)-x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{x(\mu)}{2}}$$

lorsque $x(u) \geq 0$.

On calcule :

Proposition II.11. – *Étant donné un caractère multiplicatif continu*

$$\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right),$$

considérée comme fonction de $t \in E_x^\times$, est nulle en dehors de la zone

$$x(\text{Nm}(t)) \geq 2x(\mu_2) - 2k.$$

À l'intérieur de cette zone, elle vaut suivant les cas :

(i) 0 si $x(u) \geq 0$ et le caractère ω est ramifié.

(ii)

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{x(\mu_2)-k} \cdot \left(\frac{z_\omega}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{x(\text{Nm}(t))}$$

si $x(u) \geq 0$ et le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω .

(iii) Le produit de

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{x(\mu_2)-k} \cdot \left(\frac{z_\omega}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{x(\text{Nm}(t))}$$

et de

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x(\text{Nm}(t)) + 2k - 2x(\mu_2) \geq v, \\ -\frac{1}{q_x - 1} & \text{si } x(\text{Nm}(t)) + 2k - 2x(\mu_2) = v - 1, \\ 0 & \text{si } x(\text{Nm}(t)) + 2k - 2x(\mu_2) \leq v - 2, \end{cases}$$

dans le cas où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et où le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω .

(iv) Le produit de

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot \omega \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 u} \right) \cdot q_x^{x(\mu_2)-k-\frac{1}{2}x(\text{Nm}(t))} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{1}(x(\mu) = -N_\omega) \cdot \omega(\mu) \cdot \psi(\mu)^{-1}$$

et de la fonction caractéristique de la zone

$$\begin{cases} x(\text{Nm}(t)) \geq 2x(\mu_2) - 2k, \\ x(\text{Nm}(t)) + 2k - 2x(\mu_2) - v = -N_\omega, \end{cases}$$

dans le cas où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et où le caractère ω est ramifié, d'indice de ramification $N_\omega \geq 1$.

Démonstration. À la suite du lemme II.10, on a calculé

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq 2x(\mu_2) - 2k) \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = 2k + x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2)) \\ \cdot (-1)^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{x(\mu)}{2}} \cdot \psi \left(\frac{\mu \mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1},$$

une expression dans laquelle le dernier facteur $\psi \left(\frac{\mu \mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1}$ disparaît lorsque $x(u) \geq 0$.

(i) résulte alors de ce que, si $x(u) \geq 0$, $\mu \mapsto K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$ ne dépend que de la valuation de μ .

(ii) résulte de l'égalité

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot (q_x^{-\frac{1}{2}} \cdot z_\omega)^{2k + x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2)} = z_\omega^{2k - x(\mu_1 \mu_2)} \cdot q_x^{x(\mu_2) - k} \cdot \left(\frac{z_\omega}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{x(\text{Nm}(t))}.$$

(iii) résulte de la même égalité et de ce que l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = 2k + x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2)) \cdot \psi \left(\frac{\mu \mu_1}{\mu_2} \cdot u \right)^{-1} \\ = \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = 2k + x(\text{Nm}(t)) - 2x(\mu_2) - v) \cdot \psi(\mu)^{-1}$$

vaut 1, $-\frac{1}{q_x - 1}$ ou 0 suivant que $2k + x(\text{Nm}(t)) - 2x(\mu_2)$ est strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à $v - 1$.

(iv) résulte de l'égalité

$$q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1)}{2}} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}(2k + x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2))} = q_x^{x(\mu_2) - k - \frac{1}{2}x(\text{Nm}(t))}$$

et, par le changement de variable

$$\mu \mapsto \frac{\mu_2}{\mu_1 u} \cdot \mu,$$

de la partie (i) du lemme II.4.

Cela achève la preuve de la proposition II.11. □

Notant toujours $g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$, considérons maintenant le noyau

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

comme fonction de $t \in E_x^\times$ et de $\mu \in F_x^\times$.

De la même façon que dans la proposition précédente, on calcule :

Proposition II.12. – *Étant donné un caractère multiplicatif continu*

$$\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right),$$

considérée comme fonction de $t \in E_x^\times$, est nulle en dehors de la zone

$$x(\text{Nm}(t)) \geq 2k - 2x(\mu_2) + 2 \min\{0, x(u)\}.$$

À l'intérieur de cette zone, elle vaut suivant les cas :

(i) 0 si $x(u) \geq 0$ et le caractère ω est ramifié.

(ii)

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{k-x(\mu_2)} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{-x(\text{Nm}(t))}$$

si $x(u) \geq 0$ et le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω .

(iii) Le produit de

$$(-1)^{x(\mu_2)+v} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{k-x(\mu_2)-v} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{-x(\text{Nm}(t))}$$

et de

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x(\text{Nm}(t)) - 2k + 2x(\mu_2) + 2v \geq v, \\ -\frac{1}{q_x - 1} & \text{si } x(\text{Nm}(t)) - 2k + 2x(\mu_2) + 2v = v - 1, \\ 0 & \text{si } x(\text{Nm}(t)) - 2k + 2x(\mu_2) + 2v \leq v - 2, \end{cases}$$

dans le cas où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et où le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω .

(iv) Le produit de

$$(-1)^{x(\mu_2)+v} \cdot \omega\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 u}\right) \cdot q_x^{k-x(\mu_2)-\frac{1}{2}x(\text{Nm}(t))-v} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = -N_\omega) \cdot \omega(\mu)^{-1} \cdot \psi(\mu)^{-1}$$

et de la fonction caractéristique de la zone

$$\begin{cases} x(\text{Nm}(t)) \geq 2k - 2x(\mu_2) - 2v, \\ (x(\text{Nm}(t)) - 2k + 2x(\mu_2) + 2v) - v = -N_\omega, \end{cases}$$

dans le cas où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et où le caractère ω est ramifié, d'indice de ramification $N_\omega \geq 1$.

Démonstration. Traitons d'abord les cas (i) et (ii) où $x(u) \geq 0$. Quitte à modifier g_θ , on peut même supposer que $u = 0$.

Alors le noyau

$$K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu \mu_1 \end{pmatrix} \right)$$

s'annule en dehors de la zone

$$\begin{cases} 2k - x(\text{Nm}(t)) = x(\mu_1 \mu_2) + x(\mu), \\ x(\mu_2) \geq x(\mu \mu_1), \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x(\text{Nm}(t)) \geq 2k - 2x(\mu_2), \\ x(\mu) = 2k - x(\mu_1 \mu_2) - x(\text{Nm}(t)). \end{cases}$$

Et, à l'intérieur de cette zone, il vaut

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_1) - x(\mu_2)}{2}} \cdot q_x^{\frac{x(\mu)}{2}}.$$

(i) résulte alors de ce que cette expression ne dépend de μ qu'à travers sa valuation, et (ii) de l'égalité

$$q_x^{\frac{x(\mu_1) - x(\mu_2)}{2}} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{2k - x(\mu_1\mu_2) - x(\text{Nm}(t))} = z_\omega^{2k - x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{k - x(\mu_2)} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{-x(\text{Nm}(t))}.$$

Traisons enfin les cas (iii) et (iv) où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$.

Utilisant le lemme II.6, le noyau

$$\begin{aligned} K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) &= K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} \mu_2 u^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \mu_1 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mu_2 u^{-1}}{\mu \mu_1} \cdot u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_2 u^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \mu_1 u \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

s'annule en dehors de la zone

$$\begin{cases} 2k - x(\text{Nm}(t)) = x(\mu \mu_1 \mu_2), \\ x(\mu_2 u^{-1}) \geq x(\mu \mu_1 u), \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x(\text{Nm}(t)) \geq 2k - 2x(\mu_2) - 2v, \\ x(\mu) = 2k - x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2). \end{cases}$$

Et, à l'intérieur de cette zone, il vaut

$$\begin{aligned} &(-1)^{x(\mu_2 u^{-1})} \cdot q_x^{\frac{x(\mu \mu_1 u) - x(\mu_2 u^{-1})}{2}} \cdot \psi \left(\frac{\mu_2 u^{-1}}{\mu \mu_1} \cdot u \right)^{-1} \\ &= (-1)^{x(\mu_2) + v} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_1) - x(\mu_2)}{2} - v} \cdot q_x^{\frac{x(\mu)}{2}} \cdot \psi \left(\frac{\mu_2}{\mu \mu_1} \cdot u^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

(iii) résulte alors de l'égalité

$$q_x^{\frac{x(\mu_1) - x(\mu_2)}{2} - v} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{2k - x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2)} = z_\omega^{2k - x(\mu_1 \mu_2)} \cdot q_x^{k - x(\mu_2) - v} \cdot (z_\omega \cdot q_x^{\frac{1}{2}})^{-x(\text{Nm}(t))}$$

et de ce que l'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \mathbb{I}(x(\mu) = 2k - x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2)) \cdot \psi \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 \mu} \cdot u^{-1} \right)^{-1}$$

vaut 1, $-\frac{1}{q_x - 1}$ ou 0 suivant que

$$v + x \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) - (2k - x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2)) = (x(\text{Nm}(t)) - 2k + 2x(\mu_2) + 2v) - v$$

est strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à -1 .

(iv) résulte de l'égalité

$$q_x^{\frac{x(\mu_1) - x(\mu_2)}{2} - v} \cdot q_x^{\frac{1}{2}(2k - x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2))} = q_x^{k - x(\mu_2) - \frac{1}{2}x(\text{Nm}(t)) - v}$$

et, par le changement de variable

$$\mu \mapsto \frac{\mu_2}{\mu \mu_1 u},$$

de la partie (i) du lemme II.4. □

5 Transformation de Fourier des noyaux en une place inerte

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème I.16 dans le cas où le caractère additif $\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est régulier et la place $x \in |X|$ reste inerte dans E .

Considérons donc les deux fonctions f et f' suivantes, définies sur E_x^\times après le choix d'un élément $g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset$ de $\mathrm{GL}_2(F_x)$ et d'un caractère multiplicatif $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Elles associent à tout élément $t \in E_x^\times$ les produits

$$\begin{aligned} f(t) &= \omega(\mathrm{Nm}(t))^{-1} \cdot |\mathrm{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right), \\ f'(t) &= \omega(\mathrm{Nm}(t)) \cdot |\mathrm{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \bar{\psi}} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right). \end{aligned}$$

Il s'agit de comparer les expressions obtenues dans chacun des quatre cas (i), (ii), (iii) et (iv) des propositions II.11 et II.12.

Supposons d'abord que $x(u) \geq 0$, ce qui correspond aux cas (i) et (ii).

Le cas (i) où ω est ramifié : Alors les fonctions f et f' sont toutes deux nulles.

Le cas (ii) où ω est non ramifié : D'après la proposition II.11, la fonction $f(t)$ est alors le produit de la constante

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)}$$

et de la fonction

$$q_x^{x(\mu_2)-k} \cdot \mathbb{I}(x(\mathrm{Nm}(t)) \geq 2x(\mu_2) - 2k)$$

tandis que, d'après la proposition II.12, la fonction $f'(t)$ est le produit de la même constante

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)}$$

et de la fonction

$$q_x^{k-x(\mu_2)} \cdot \mathbb{I}(x(\mathrm{Nm}(t)) \geq 2k - 2x(\mu_2)).$$

Ainsi les deux fonctions f et f' sont-elles localement constantes à support compact. Elles sont transformées de Fourier l'une de l'autre puisque le cardinal du corps résiduel de E_x est q_x^2 .

Le cas (iii) où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et ω est non ramifié : Distinguons suivant la parité de v .

Supposons d'abord que $v = 2v'$, avec $v' \geq 1$.

Alors, d'après les propositions II.11 et II.12, les deux fonctions f et f' sont le produit de la même constante

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{-v'}$$

et des deux fonctions

$$\begin{aligned} t &\mapsto q_x^{x(\mu_2)-k+v'} \cdot \mathbb{I}(x(\mathrm{Nm}(t)) \geq 2x(\mu_2) - 2k + 2v'), \\ t &\mapsto q_x^{k-x(\mu_2)-v'} \cdot \mathbb{I}(x(\mathrm{Nm}(t)) \geq 2k - 2x(\mu_2) - 2v'). \end{aligned}$$

Ainsi f et f' sont-elles localement constantes à support compact et transformées de Fourier l'une de l'autre.

Supposons maintenant que $v = 1 + 2v'$, avec $v' \geq 0$.

Alors, d'après les propositions II.11 et II.12, les deux fonctions f et f' sont le produit de la même constante

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{-v'}$$

et des deux fonctions

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= q_x^{x(\mu_2)-k+v'} \cdot \left[\mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq 2v' + 2 + 2 \cdot x(\mu_2) - 2k) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) = 2v' + 2x(\mu_2) - 2k) \right] \\
&= q_x^{x(\mu_2)-k+v'} \cdot \left[\frac{q_x}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq 2v' + 2 + 2x(\mu_2) - 2k) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq 2v' + 2x(\mu_2) - 2k) \right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f'_0(t) &= -q_x^{k-x(\mu_2)-v'-1} \cdot \left[\mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq -2v' - 2x(\mu_2) + 2k) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) = -2v' - 2 - 2x(\mu_2) + 2k) \right] \\
&= -q_x^{k-x(\mu_2)-v'-1} \cdot \left[\frac{q_x}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq -2v' - 2x(\mu_2) + 2k) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq -2v' - 2 - 2x(\mu_2) + 2k) \right].
\end{aligned}$$

Les fonctions f_0 et f'_0 sont localement constantes à support compact, et la transformée de Fourier de f_0 est

$$\begin{aligned}
\hat{f}_0(t) &= \frac{q_x^{k-x(\mu_2)-v'-1}}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq -2v' - 2 - 2x(\mu_2) + 2k) \\
&\quad - \frac{q_x^{k-x(\mu_2)-v'}}{q_x - 1} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) \geq -2v' - 2x(\mu_2) + 2k)
\end{aligned}$$

qui n'est autre que $f'_0(t)$.

Cela achève la preuve du cas (iii).

Le cas (iv) où $x(u) = -v$, avec $v \geq 1$, et ω est ramifié : D'après les propositions II.11 et II.12, les deux fonctions f et f' sont nulles à moins que $v - N_\omega \in 2\mathbb{N}$, soit $v \geq N_\omega$ et $(-1)^v = (-1)^{N_\omega}$.

Faisons donc ces dernières hypothèses.

Alors on a les formules

$$\begin{aligned}
f(t) &= (-1)^{x(\mu_2)} \cdot \omega \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 u} \right) \cdot \frac{q_x^{-N_\omega}}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \varepsilon(\omega, \psi) \\
&\quad \cdot q_x^{x(\mu_2)-k} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) = 2x(\mu_2) - 2k + v - N_\omega) \cdot \omega(\text{Nm}(t))^{-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f'(t) &= (-1)^{x(\mu_2)} \cdot \omega \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 u} \right) \cdot \frac{q_x^{-N_\omega}}{1 - \frac{1}{q_x}} \cdot \varepsilon(\bar{\omega}, \bar{\psi}) \\
&\quad \cdot (-1)^{N_\omega} \cdot q_x^{k-x(\mu_2)-v} \cdot \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t)) = 2k - 2x(\mu_2) - v - N_\omega) \cdot \omega(\text{Nm}(t)).
\end{aligned}$$

Les fonctions f et f' sont bien localement constantes à support compact.

De plus, il résulte du lemme II.4 (appliqué à E_x plutôt qu'à F_x) que la ψ -transformée de Fourier de la fonction sur E_x

$$t \mapsto \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t))) = 2x(\mu_2) - 2k + v - N_\omega) \cdot \omega(\text{Nm}(t))^{-1}$$

n'est autre que

$$t' \mapsto \mathbb{I}(x(\text{Nm}(t'))) = -2x(\mu_2) + 2k - v - N_\omega) \cdot \omega(\text{Nm}(t')) \cdot q_x^{-2x(\mu_2)+2k-v-N_\omega} \cdot \varepsilon(\overline{\omega \circ \text{Nm}}, \bar{\psi}).$$

Pour démontrer que f' est la ψ -transformée de Fourier de f , nous sommes réduits à prouver l'identité

$$\varepsilon(\omega, \psi) \cdot q_x^{-N_\omega} \cdot \varepsilon(\overline{\omega \circ \text{Nm}}, \overline{\psi \circ \text{Tr}}) = (-1)^{N_\omega} \cdot \varepsilon(\bar{\omega}, \bar{\psi})$$

soit, d'après le lemme II.4(ii),

$$\varepsilon(\overline{\omega \circ \text{Nm}}, \overline{\psi \circ \text{Tr}}) = (-1)^{N_\omega} \cdot \varepsilon(\bar{\omega}, \bar{\psi})^2.$$

Cette identité n'est autre que la formule de Hasse-Davenport.

Cela termine la démonstration du théorème I.16. \square

6 Les valeurs au point 0

Nous aurons besoin de connaître les valeurs au point $0 \in E_x$ des fonctions localement constantes à support compact introduites dans le théorème I.16.

On se place dans la situation générale de ce théorème. Ainsi :

- $\psi : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère additif non trivial dont le conducteur N_ψ n'est pas nécessairement nul,
- $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère multiplicatif unitaire éventuellement ramifié,
- g est un élément de $\text{GL}_2(F_x)$ qu'on écrit sous les deux formes d'Iwasawa

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset = \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 \\ 0 & \mu'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u' & 1 \end{pmatrix} \cdot g'_\emptyset$$

avec $\mu'_1 = \mu_1$, $\mu'_2 = \mu_2$ et $u' = 0$ si $x(u) \geq 0$, et $\mu'_1 = \mu_1 u$, $\mu'_2 = \mu_2 u^{-1}$ si $x(u) < 0$.

Dans ce paragraphe, on note enfin f_ψ et f'_ψ les fonctions localement constantes à support compact sur E_x dont les restrictions à E_x^\times sont définies par les formules

$$f_\psi(t) = \omega(\text{Nm}(t))^{-1} \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right),$$

$$f'_\psi(t) = \omega(\text{Nm}(t)) \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \bar{\psi}} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right).$$

On obtient comme conséquences des propositions II.3 et II.5 :

Corollaire II.13. – *Supposons que la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 , et que P_x est un monôme de la forme $X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$.*

Avec les notations qui précèdent l'énoncé du corollaire, on a alors :

- *Si le caractère ω est ramifié :*

$$\begin{cases} f_\psi(0) & = & 0 \\ f'_\psi(0) & = & 0 \end{cases}$$

- Si le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω :

$$\begin{cases} f_\psi(0) &= z_\omega^{N_\psi} \cdot z_\omega^{k_1+k_2-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{(x(\mu_2)-k_1)+(x(\mu_2)-k_2)}{2}} \\ f'_\psi(0) &= (z_\omega \cdot q_x)^{N_\psi} \cdot z_\omega^{k_1+k_2-x(\mu'_1\mu'_2)} \cdot q_x^{\frac{(k_1-x(\mu'_2))+k_2-x(\mu'_2))}{2}} \end{cases}$$

Démonstration. Dans le cas où le caractère additif ψ est régulier, c'est-à-dire où $N_\psi = 0$, c'est une conséquence immédiate des formules des propositions II.3 et II.5.

Sinon, on écrit ψ sous la forme

$$\psi(a) = \psi_0(\gamma_0^{-1} \cdot a)$$

où ψ_0 est un caractère additif régulier et $\gamma_0 \in F_x^\times$ un élément de valuation $x(\gamma_0) = N_\psi$.

D'après le lemme II.1(i), on dispose des égalités

$$\begin{aligned} f_\psi(t) &= \omega(\gamma_0) \cdot f_{\psi_0}(t), \\ f'_\psi(t) &= \omega(\gamma_0) \cdot q_x^{N_\psi} \cdot f'_{\psi_0}(\gamma_0^{-1} \cdot t), \end{aligned}$$

d'où on déduit les formules annoncées relatives au caractère additif ψ de conducteur N_ψ . □

De même, on déduit des propositions II.11 et II.12 :

Corollaire II.14. – *Supposons que la place x reste inerte dans E , et que P_x est un monôme de la forme X^{-2k} .*

Avec les notations qui précèdent l'énoncé du corollaire, on a alors :

- Si le caractère ω est ramifié :

$$\begin{cases} f_\psi(0) &= 0 \\ f'_\psi(0) &= 0 \end{cases}$$

- Si le caractère ω est non ramifié, de valeur propre z_ω :

$$\begin{aligned} f_\psi(0) &= (-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{N_\psi} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu_1\mu_2)} \cdot q_x^{x(\mu_2)-k} \\ f'_\psi(0) &= (-1)^{x(\mu'_2)} \cdot (-z_\omega \cdot q_x)^{N_\psi} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu'_1\mu'_2)} \cdot q_x^{k-x(\mu'_2)} \end{aligned}$$

Démonstration. Dans le cas où $N_\psi = 0$, c'est une conséquence immédiate des formules des propositions II.11 et II.12.

Sinon, on écrit à nouveau ψ sous la forme

$$\psi(a) = \psi_0(\gamma_0^{-1} \cdot a)$$

et on applique les égalités du lemme II.1(i)

$$\begin{aligned} f_\psi(t) &= \omega(\gamma_0) \cdot f_{\psi_0}(t), \\ f'_\psi(t) &= (-1)^{x(\gamma_0)} \cdot \omega(\gamma_0) \cdot q_x^{x(\gamma_0)} \cdot f'_{\psi_0}(\gamma_0^{-1} \cdot t). \end{aligned}$$

□

Chapitre III :

Construction des noyaux globaux par la formule de Poisson

1 Caractère additif et mesure auto-duale globaux

Choisissons une fois pour toutes un caractère additif non trivial

$$\psi_q : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times .$$

En toute place $x \in |X|$, il induit un caractère additif du corps résiduel

$$\psi_{q_x} : \kappa(x) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{F}_q \xrightarrow{\psi_q} \mathbb{C}^\times ,$$

défini par composition avec l'homomorphisme de trace

$$\text{Tr} : \kappa(x) \rightarrow \mathbb{F}_q .$$

Puis considérons une forme différentielle rationnelle non nulle ω_X sur la courbe X .

En toute place $x \in |X|$, la composition de l'homomorphisme de résidu Res et du caractère additif résiduel ψ_{q_x} définit un caractère additif non trivial du corps local F_x

$$\begin{aligned} \psi_x : F_x &\rightarrow \mathbb{C}^\times , \\ a &\mapsto \psi_{q_x}(\text{Res}(a \cdot \omega_X)) . \end{aligned}$$

On remarque que le conducteur N_{ψ_x} de ψ_x est égal à l'ordre d'annulation (ou de pôle, si c'est un entier négatif) de la forme différentielle rationnelle ω_X au point x de la courbe X . En particulier, le caractère ψ_x est régulier si et seulement si la forme ω_X est régulière au point x .

En presque toute place $x \in |X|$, ω_X est régulière si bien que ψ_x est trivial sur O_x . On peut donc définir le produit de tous les ψ_x , $x \in |X|$, en tant que caractère additif

$$\psi = \prod_{x \in |X|} \psi_x : \mathbb{A}_F \rightarrow \mathbb{C}^\times .$$

On connaît le lemme suivant :

Lemme III.1. – *Le caractère additif non trivial $\psi_q : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ étant fixé, les caractères additifs $\psi : \mathbb{A}_F \rightarrow \mathbb{C}^\times$ associés comme ci-dessus à une forme différentielle rationnelle non nulle ω_X de la courbe X sont exactement les caractères additifs continus non triviaux*

$$\mathbb{A}_F \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

dont la restriction au sous-groupe discret cocompact F de \mathbb{A}_F est triviale. \square

Fixons désormais la forme ω_X , donc aussi le caractère $\psi : \mathbb{A}_F \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et ses composantes $\psi_x : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

Sur l'extension E de F , on dispose de l'homomorphisme de trace de E sur F

$$\mathrm{Tr} : E \rightarrow F.$$

En toute place $x \in |X|$, son produit tensoriel avec F_x sur F est l'homomorphisme de trace local déjà rencontré

$$\mathrm{Tr} : E_x \rightarrow F_x.$$

Il envoie O_{E_x} dans O_{F_x} .

Enfin, son produit tensoriel avec \mathbb{A}_F est l'homomorphisme global de trace

$$\mathrm{Tr} : \mathbb{A}_E \rightarrow \mathbb{A}_F.$$

Il se confond avec la somme sur toutes les places $x \in |X|$ des homomorphismes locaux de trace $\mathrm{Tr} : E_x \rightarrow F_x$.

En toute place $x \in |X|$, on dispose du caractère additif non trivial défini par composition

$$\psi_x \circ \mathrm{Tr} : E_x \rightarrow F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Le produit sur toutes les places $x \in |X|$ de ces caractères n'est autre que le composé

$$\psi \circ \mathrm{Tr} : \mathbb{A}_E \rightarrow \mathbb{A}_F \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Il est trivial sur le sous-groupe discret E de \mathbb{A}_E .

Comme dans la discussion qui précède l'énoncé de la proposition I.15 du paragraphe I.6, munissons chaque E_x , $x \in |X|$, de la mesure de Haar additive dt_x qui attribue au sous-groupe ouvert compact O_{E_x} le volume $q_x^{N\psi_x}$.

On dispose alors de la ψ_x -transformation de Fourier locale

$$f_x \mapsto \left(\hat{f}_x : t'_x \mapsto \hat{f}_x(t'_x) = \int_{E_x} dt_x \cdot f_x(t_x) \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}(t_x \cdot t'_x) \right)$$

et de sa réciproque, la $\bar{\psi}_x$ -transformation de Fourier locale

$$f_x \mapsto \left(t'_x \mapsto \int_{E_x} dt_x \cdot f_x(t_x) \cdot \bar{\psi}_x \circ \mathrm{Tr}(t_x \cdot t'_x) \right).$$

Munissons \mathbb{A}_E de la mesure de Haar additive produit $dt = \bigotimes_{x \in |X|} dt_x$.

On a le théorème suivant :

Théorème III.2. –

(i) *La transformation*

$$f \mapsto \left(\hat{f} : t' \mapsto \hat{f}(t') = \int_{\mathbb{A}_E} dt \cdot f(t) \cdot \psi \circ \mathrm{Tr}(t \cdot t') \right)$$

définit un automorphisme de l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur \mathbb{A}_E .

On l'appelle la ψ -transformation de Fourier sur \mathbb{A}_E .

Son automorphisme réciproque n'est autre que la $\bar{\psi}$ -transformation de Fourier sur \mathbb{A}_E :

$$f \mapsto \left(t' \mapsto \int_{\mathbb{A}_E} dt \cdot f(t) \cdot \bar{\psi} \circ \text{Tr}(t \cdot t') \right)$$

(ii) (Formule de Poisson)

Pour toute fonction localement constante à support compact f sur \mathbb{A}_E , on a

$$\sum_{\delta \in E} f(\delta) = \sum_{\delta \in E} \hat{f}(\delta).$$

□

Si f est une fonction sur \mathbb{A}_E de la forme

$$f = \bigotimes_{x \in |X|} f_x$$

où chaque f_x est une fonction localement constante à support compact sur E_x et où, en presque toute place x , f_x est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{O_{E_x}}$ de O_{E_x} , on a

$$\hat{f} = \bigotimes_{x \in |X|} \hat{f}_x.$$

Autrement dit, la ψ -transformation de Fourier globale sur \mathbb{A}_E est le produit tensoriel, sur toutes les places $x \in |X|$, des ψ_x -transformations de Fourier locales sur F_x .

2 Construction locale et identification des termes complémentaires

Dans ce paragraphe, fixons une place $x \in |X|$.

Nous avons introduit dans le paragraphe I.4 les fonctions de Whittaker

$$W_{x, \lambda_\bullet}^{H, \psi_x} : H(F_x) = \text{GL}_2(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

associées aux choix du caractère additif non trivial

$$\psi_x : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

et d'une paire de nombres complexes unitaires $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Nous avons besoin d'introduire d'autres fonctions

$$V_{x, \lambda_\bullet}^{H, N\psi_x} : \text{GL}_2(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui vont permettre de réinterpréter les "valeurs en 0" calculées dans le paragraphes II.6.

Proposition III.3. – Soit $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$ un couple de nombres complexes de module 1.

Considérons la fonction

$$V_{x, \lambda_\bullet}^{H, N\psi_x} : \text{GL}_2(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui associe à tout élément écrit sous forme d'Iwasawa,

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset,$$

la valeur

$$V_{x, \lambda_\bullet}^{H, N\psi_x}(g) = q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1) + N\psi_x}{2}} \cdot \lambda_1^{x(\mu_1) - N\psi_x} \cdot \lambda_2^{x(\mu_2)}.$$

Alors cette fonction vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- elle est invariante à droite par $K_{0,x}^H = \mathrm{GL}_2(O_x)$;
- elle est invariante à gauche par le radical unipotent $N_B(F_x) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid u \in F_x \right\}$;
- $V_{x,\lambda_\bullet}^{H,N\psi_x} * h_x = S_x^H(h_x)(\lambda_1, \lambda_2) \cdot V_{x,\lambda_\bullet}^{H,N\psi_x}$, $\forall h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$;
- pour tout élément $\gamma_0 \in F_x^\times$ de valuation $x(\gamma_0) = N_{\psi_x}$, on a

$$V_{x,\lambda_\bullet}^{H,N\psi_x} \left(\begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1 ;$$

- on a

$$V_{x,\lambda_\bullet}^{H,N\psi_x} \left(\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot g \right) = \left(\frac{\lambda_1}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{x(\gamma_1)} \cdot (q_x^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_2)^{x(\gamma_2)} \cdot V_{x,\lambda_\bullet}^{H,N\psi_x}(g), \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in F_x^\times .$$

Remarque. À la différence des fonctions de Whittaker $W_{x,\lambda_\bullet}^{H,\psi_x}$, les fonctions $V_{x,\lambda_\bullet}^{H,N\psi_x}$ dépendent de l'ordre des deux composantes λ_1 et λ_2 de $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \lambda_2)$. C'est pourquoi les quatre premières propriétés énoncées dans la proposition ci-dessus ne suffisent pas à les caractériser. \square

De même que nous avons introduit dans la définition I.13 du paragraphe I.5 les “noyaux locaux”

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi_x} : G(H_F) \times H(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

on pose la définition que voici :

Définition III.4. – On note

$$K_{x,P_x}^{G,H,0} : G(F_x) \times H(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

les fonctions définies de la manière suivante :

- Dans le cas où la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 ,

$$K_{x,P_x}^{G,H,0}(t, g) = \int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot P_x(\lambda, \lambda) \cdot \overline{\Phi_{x,(\lambda,\lambda)}^G(t)} \cdot V_{x,(\lambda,\lambda)}^{H,N\psi_x}(g)$$

où

P_x est un polynôme, élément de $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]$,

t est élément de $G(F_x) = E_x^\times = E_{x_1}^\times \times E_{x_2}^\times = F_x^\times \times F_x^\times$,

g est élément de $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$,

λ décrit le cercle unité de \mathbb{C}^\times ,

$d\lambda$ désigne la mesure invariante de volume 1 sur ce cercle.

- Dans le cas où la place x reste inerte dans E ,

$$K_{x,P_x}^{G,H,0}(t, g) = \int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot P_x(\lambda^2) \cdot \overline{\Phi_{x,\lambda}^G(t)} \cdot V_{x,(\lambda,-\lambda)}^{H,N\psi_x}(g)$$

où

P_x est un polynôme pair, élément de $\mathbb{C}[X^{\pm 2}]$,

t décrit $G(F_x) = E_x^\times$,

g décrit $H(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x)$,

λ et $d\lambda$ sont comme plus haut. \square

Les fonctions

$$K_{x,P_x}^{G,H,0} : G(F_x) \times H(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

sont invariantes à droite par $K_{0,x}^G \times K_{0,x}^H$.

Pour toute fonction sphérique $h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$, on a la formule

$$K_{x,P_x}^{G,H,0} * h_x = K_{x,P_x}^{G,H,0} *^{-1} (\rho_x^*(h_x))$$

où le premier produit de convolution $*$ est relatif à la variable $g_x \in H(F_x)$ et le second $*^{-1}$ à la variable $t_x^{-1} \in G(F_x)$.

Enfin, on a pour toute fonction sphérique $\varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$

$$K_{x,P_x}^{G,H,0} *^{-1} \varphi_x = K_{x,P_x \cdot S_x^G}^{G,H,0}(\varphi_x).$$

L'introduction des fonctions $K_{x,P_x}^{G,H,0}$ dans la définition III.4 ci-dessus est justifiée par la proposition suivante :

Proposition III.5. – *Dans la situation et avec les notations ci-dessus, et pour tout caractère multiplicatif (éventuellement ramifié)*

$$\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

les deux fonctions sur F_x^\times

$$\begin{aligned} t &\mapsto f_\psi^0(t) = \omega(\text{Nm}(t))^{-1} \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right), \\ t &\mapsto f_\psi'^0(t) = \omega(\text{Nm}(t)) \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right), \end{aligned}$$

sont constantes.

Elles coïncident avec les valeurs en 0 des deux fonctions localement constantes à support compact sur E_x dont les restrictions à E_x^\times sont définies par

$$\begin{aligned} f_\psi(t) &= \omega(\text{Nm}(t))^{-1} \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right), \\ f_\psi'(t) &= \omega(\text{Nm}(t)) \cdot |\text{Nm}(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\bar{\psi}} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme dans l'énoncé des corollaires II.13 et II.14 du paragraphe II.6, nous allons utiliser les deux décompositions d'Iwasawa de l'élément g de $\text{GL}_2(F_x)$

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\emptyset, \\ g &= \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 \\ 0 & \mu'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u' & 1 \end{pmatrix} \cdot g'_\emptyset. \end{aligned}$$

Traitons d'abord le cas où la place x se scinde dans E en deux places x_1 et x_2 . On peut supposer que P_x est un monôme, de la forme $X_1^{-k_1} \cdot X_2^{-k_2}$.

Alors on peut écrire

$$K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = \int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot P_x(\lambda, \lambda) \cdot \overline{\Phi_{x,(\lambda,\lambda)}^G(t)} \cdot V_{x,(\lambda,\lambda)}^{H,N_{\psi_x}} \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

avec

$$\Phi_{x,(\lambda,\lambda)}^G(t) = \lambda^{x(\text{Nm}(t))}$$

et

$$V_{x,(\lambda,\lambda)}^{H,N_{\psi_x}} \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1) + N_{\psi_x}}{2}} \cdot \lambda^{x(\mu_1) + x(\mu_2) - N_{\psi_x}} \cdot \left(\frac{\lambda}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{x(\mu)}.$$

Par conséquent, la fonction

$$K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

est supportée dans la zone définie par la condition

$$k_1 + k_2 + x(\text{Nm}(t)) = x(\mu_1 \mu_2) + x(\mu) - N_{\psi_x},$$

et elle vaut dans cette zone

$$\frac{q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1) + N_{\psi_x}}{2}}}{q_x} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}x(\mu)}.$$

L'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

s'annule si le caractère ω est ramifié. Si au contraire il est non ramifié, de valeur propre z_ω , cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} & \frac{q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1) + N_{\psi_x}}{2}}}{q_x} \cdot \left(\frac{z_\omega}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{k_1 + k_2 + x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2) + N_{\psi_x}} \\ &= z_\omega^{x(\text{Nm}(t))} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}x(\text{Nm}(t))} \cdot z_\omega^{N_{\psi_x}} \cdot z_\omega^{k_1 + k_2 - x(\mu_1 \mu_2)} \cdot q_x^{x(\mu_2) - \frac{k_1 + k_2}{2}}. \end{aligned}$$

On voit que la fonction $f_\psi^0(t)$ est constante comme annoncée. D'après la première formule du corollaire II.13, sa valeur coïncide avec la valeur en 0 de la fonction $f_\psi(t)$.

Considérons maintenant la fonction

$$K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right).$$

Elle est supportée dans la zone définie par la condition

$$k_1 + k_2 - x(\text{Nm}(t)) = x(\mu'_1 \mu'_2) + x(\mu) - N_{\psi_x},$$

et elle vaut dans cette zone

$$\frac{q_x^{\frac{x(\mu'_1) - x(\mu'_2) + N_{\psi_x}}{2}}}{q_x} \cdot q_x^{\frac{1}{2}x(\mu)}.$$

L'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

s'annule si le caractère ω est ramifié. Si au contraire il est non ramifié, de valeur propre z_ω , cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} & q_x^{\frac{x(\mu'_1) - x(\mu'_2) + N_{\psi_x}}{2}} \cdot \left(q_x^{\frac{1}{2}} \cdot z_\omega \right)^{k_1 + k_2 - x(\text{Nm}(t)) - x(\mu'_1 \mu'_2) + N_{\psi_x}} \\ = & z_\omega^{-x(\text{Nm}(t))} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}x(\text{Nm}(t))} \cdot (z_\omega \cdot q_x)^{N_{\psi_x}} \cdot z_\omega^{k_1 + k_2 - x(\mu'_1 \mu'_2)} \cdot q_x^{\frac{k_1 + k_2}{2} - x(\mu'_2)}. \end{aligned}$$

On voit que la fonction $f_\psi^0(t)$ est constante comme annoncée. D'après la seconde formule du corollaire II.13, sa valeur coïncide avec la valeur en 0 de la fonction $f'_\psi(t)$.

Traitons maintenant le cas où la place x reste inerte dans E . On peut supposer que P_x est un monôme, de la forme X^{-2k} .

Alors on peut écrire

$$K_{x, P_x}^{G, H, 0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = \int_{|\lambda|=1} d\lambda \cdot P_x(\lambda^2) \cdot \overline{\Phi_{x, \lambda}^G(t)} \cdot V_{x, (\lambda, -\lambda)}^{H, N_{\psi_x}} \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

avec

$$\Phi_{x, \lambda}^G(t) = \lambda^{x(\text{Nm}(t))}$$

et

$$V_{x, (\lambda, \lambda)}^{H, N_{\psi_x}} \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1) + N_{\psi_x}}{2}} \cdot \lambda^{x(\mu_1) + x(\mu_2) - N_{\psi_x}} \cdot \left(\frac{\lambda}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{x(\mu)} \cdot (-1)^{x(\mu_2)}.$$

Par conséquent, la fonction

$$K_{x, P_x}^{G, H, 0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

est supportée dans la zone définie par la condition

$$2k + x(\text{Nm}(t)) = x(\mu_1 \mu_2) + x(\mu) - N_{\psi_x},$$

et elle vaut dans cette zone

$$(-1)^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1) + N_{\psi_x}}{2}} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}x(\mu)}.$$

L'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, 0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

s'annule si le caractère ω est ramifié. Si au contraire il est non ramifié, de valeur propre z_ω , cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} & (-1)^{x(\mu_2)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu_2) - x(\mu_1) + N_{\psi_x}}{2}} \cdot \left(\frac{z_\omega}{q_x^{\frac{1}{2}}} \right)^{2k + x(\text{Nm}(t)) - x(\mu_1 \mu_2) + N_{\psi_x}} \\ = & z_\omega^{x(\text{Nm}(t))} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}x(\text{Nm}(t))} \cdot (-1)^{x(\mu_2)} \cdot z_\omega^{N_{\psi_x}} \cdot z_\omega^{2k - x(\mu_1 \mu_2)} \cdot q_x^{x(\mu_2) - k}. \end{aligned}$$

On voit que la fonction $f_\psi^0(t)$ est constante comme annoncée. D'après la première formule du corollaire II.14, sa valeur coïncide avec la valeur en 0 de la fonction $f_\psi(t)$.

Considérons la fonction

$$K_{x, P_x}^{G, H, 0} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right).$$

Elle est supportée dans la zone définie par la condition

$$2k - x(\text{Nm}(t)) = x(\mu'_1 \mu'_2) + x(\mu) - N_{\psi_x},$$

et elle vaut dans cette zone

$$(-1)^{x(\mu'_1)+x(\mu)} \cdot q_x^{\frac{x(\mu'_1)-x(\mu'_2)+N_{\psi_x}}{2}} \cdot q_x^{\frac{1}{2}x(\mu)} = (-1)^{x(\mu'_2)} \cdot (-1)^{N_{\psi_x}} \cdot q_x^{\frac{x(\mu'_1)-x(\mu'_2)+N_{\psi_x}}{2}} \cdot q_x^{\frac{1}{2}x(\mu)}.$$

L'intégrale

$$\int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

s'annule si le caractère ω est ramifié. Si au contraire il est non ramifié, de valeur propre z_ω , cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} & (-1)^{x(\mu'_2)} \cdot (-1)^{N_{\psi_x}} \cdot q_x^{\frac{x(\mu'_1)-x(\mu'_2)+N_{\psi_x}}{2}} \cdot (q_x^{\frac{1}{2}} \cdot z_\omega)^{2k-x(\text{Nm}(t))-x(\mu'_1 \mu'_2)+N_{\psi_x}} \\ &= z_\omega^{-x(\text{Nm}(t))} \cdot q_x^{-\frac{1}{2}x(\text{Nm}(t))} \cdot (-1)^{x(\mu'_2)} \cdot (-z_\omega \cdot q_x)^{N_{\psi_x}} \cdot z_\omega^{2k-x(\mu'_1 \mu'_2)} \cdot q_x^{k-x(\mu'_2)}. \end{aligned}$$

On voit que la fonction $f_\psi'^0(t)$ est constante comme annoncée. D'après la seconde formule du corollaire II.14, sa valeur coïncide avec la valeur en 0 de la fonction $f_\psi'(t)$.

Cela termine la preuve de la proposition III.5. \square

3 Construction de noyaux globaux de la functorialité

Considérons une famille $P = (P_x)_{x \in |X|}$ de polynômes indexés par les places $x \in |X|$, telle que

- en toute place x scindée dans E , P_x est élément de $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}]$,
- en toute place x inerte dans E , P_x est élément de $\mathbb{C}[X^{\pm 2}]$,
- en presque toute place $x \in |X|$, le polynôme P_x est égal à 1.

On peut alors définir les fonctions globales suivantes des variables $t = (t_x)_{x \in |X|} \in G(\mathbb{A}_F) = \mathbb{A}_E^\times = \prod_{x \in |X|} E_x^\times$ et $g = (g_x)_{x \in |X|} \in H(\mathbb{A}_F) = \text{GL}_2(\mathbb{A}_F) = \prod_{x \in |X|} \text{GL}_2(F_x)$:

$$\begin{aligned} K_P^{G,H,\psi}(t, g) &= \prod_{x \in |X|} K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t_x, g_x) \\ K_P^{G,H,0}(t, g) &= \prod_{x \in |X|} K_{x,P_x}^{G,H,0}(t_x, g_x) \end{aligned}$$

Nous allons démontrer :

Théorème III.6. – *Pour toute famille de polynômes $P = (P_x)_{x \in |X|}$ comme ci-dessus, la fonction des deux variables $t \in G(\mathbb{A}_F) = \mathbb{A}_E^\times$ et $g \in H(\mathbb{A}_F) = \text{GL}_2(\mathbb{A}_F)$*

$$K_P^{G,H,\rho}(t, g) = \sum_{\delta \in E^\times, \gamma \in F^\times} K_P^{G,H,\psi} \left(\delta t, \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) + \sum_{\gamma \in F^\times} K_P^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

est aussi égale au produit de la fonction

$$(t, g) \mapsto \sum_{\delta \in E^\times, \gamma \in F^\times} K_P^{G,H,\bar{\psi}} \left(\delta t, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) + \sum_{\gamma \in F^\times} K_P^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

et du signe

$$\varepsilon = \prod_{\substack{x \in |X| \\ x \text{ inerte dans } E}} (-1)^{N_{\psi_x}}.$$

La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_E^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (t, g) &\mapsto K_P^{G, H, \rho}(t, g) \end{aligned}$$

est invariante à droite par le sous-groupe ouvert compact maximal $K_0^G \times K_0^H = O_{\mathbb{A}_E}^\times \times \mathrm{GL}_2(O_{\mathbb{A}})$ et invariante à gauche par le sous-groupe discret $E^\times \times \mathrm{GL}_2(F)$.

Démonstration. Translater par un élément $t \in \mathbb{A}_E^\times$ dans les fonctions $K_P^{G, H, \psi}(\bullet, \bullet)$, $K_P^{G, H, 0}(\bullet, \bullet)$ et $K_P^{G, H, \bar{\psi}}(\bullet, \bullet)$ équivaut à multiplier certains des polynômes P_x par un monôme.

Pour démontrer l'égalité de la première assertion du théorème, on peut donc supposer que $t = 1$.

Il est équivalent de prouver que, pour tout caractère automorphe unitaire éventuellement ramifié

$$\omega = \prod_{x \in |X|} \omega_x : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

on a l'égalité

$$\begin{aligned} &\sum_{\delta \in E^\times} \int_{\mathbb{A}_F^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G, H, \psi} \left(\delta, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &+ \int_{\mathbb{A}_F^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G, H, 0} \left(1, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ = &\varepsilon \cdot \left[\sum_{\delta \in E^\times} \int_{\mathbb{A}_F^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G, H, \bar{\psi}} \left(\delta^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \right. \\ &\left. + \int_{\mathbb{A}_F^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G, H, 0} \left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \right]. \end{aligned}$$

Or on a les décompositions en produits

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{A}_F^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G, H, \psi} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= \prod_{x \in |X|} \int_{F_x^\times} d\mu_x \cdot \omega_x(\mu_x) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \psi_x} \left(t_x, \begin{pmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_x \right), \\ &\int_{\mathbb{A}_F^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G, H, 0} \left(1, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= \prod_{x \in |X|} \int_{F_x^\times} d\mu_x \cdot \omega_x(\mu_x) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, 0} \left(1, \begin{pmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_x \right), \\ &\int_{\mathbb{A}_F^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G, H, \bar{\psi}} \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= \prod_{x \in |X|} \int_{F_x^\times} d\mu_x \cdot \omega_x(\mu_x) \cdot K_{x, P_x}^{G, H, \bar{\psi}_x} \left(t_x^{-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_x \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{A}_F^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G,H,0} \left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= \prod_{x \in |X|} \int_{F_x^\times} d\mu_x \cdot \omega_x(\mu_x) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,0} \left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_x \right). \end{aligned}$$

L'égalité voulue résulte alors de la formule de Poisson pour le sous-groupe discret E de \mathbb{A}_E (c'est-à-dire du théorème III.2(ii)), du théorème I.16 et de la précédente proposition III.5.

En effet, comme ω est un caractère automorphe, les caractères de \mathbb{A}_E^\times

$$t \mapsto \omega(\mathrm{Nm}(t))^{-1} \cdot \prod_{x \in |X|} |\mathrm{Nm}(t_x)|_x^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$t \mapsto \omega(\mathrm{Nm}(t)) \cdot \prod_{x \in |X|} |\mathrm{Nm}(t_x)|_x^{\frac{1}{2}}$$

prennent la valeur 1 en tous les points $\delta \in E^\times$.

Il résulte aussi de la proposition III.5 que, pour tout caractère automorphe unitaire $\omega : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$, les fonctions sur \mathbb{A}_E^\times

$$\begin{aligned} t &\mapsto \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right), \\ t &\mapsto \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_P^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \end{aligned}$$

sont invariantes par le sous-groupe discret E^\times . Il en est donc de même des fonctions

$$\begin{aligned} t &\mapsto \sum_{\gamma \in F^\times} K_P^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right), \\ t &\mapsto \sum_{\gamma \in F^\times} K_P^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right). \end{aligned}$$

Par rapport à la variable $g \in \mathrm{GL}_2(F_x)$, ces fonctions sont invariantes à gauche par les sous-groupes discrets $\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \gamma \in F^\times, \eta \in F \right\}$ et $\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} \mid \gamma \in F^\times, \eta \in F \right\}$ respectivement. Il en est de même des deux expressions

$$\sum_{\delta \in E^\times, \gamma \in F^\times} K_P^{G,H,\psi} \left(\delta t, \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right)$$

et

$$\sum_{\delta \in E^\times, \gamma \in F^\times} K_P^{G,H,\bar{\psi}} \left(\delta t, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right).$$

Comme le groupe $\mathrm{GL}_2(F)$ est engendré par ses deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 , on conclut que la fonction

$$(t, g) \mapsto K_P^{G,H,\rho}(t, g)$$

est invariante à gauche par le sous-groupe discret $E^\times \times \mathrm{GL}_2(F)$.

Enfin, toutes les fonctions utilisées dans la construction sont invariantes à droite par $K_0^G \times K_0^H$ donc $K_P^{G,H,\rho}(\bullet, \bullet)$ l'est aussi. \square

Les fonctions sphériques

$$K_P^{G,H,\rho} : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \times \mathrm{GL}_2(F) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \rightarrow \mathbb{C}$$

seront appelées des “noyaux globaux de la functorialité”, à cause de la proposition suivante :

Proposition III.7. –

(i) Pour toute famille de polynômes $P = (P_x)_{x \in |X|}$ et pour tout caractère automorphe unitaire partout non ramifié

$$\chi = (\chi_x)_{x \in |X|} : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \rightarrow \mathbb{C},$$

la forme sphérique

$$\mathrm{GL}_2(F) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) / \mathrm{GL}_2(O_{\mathbb{A}_F}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \int_{E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times} d^\times t \cdot \chi(t) \cdot K_P^{G,H,\rho}(t, g) = K_\chi(g)$$

est un vecteur de la représentation $\pi = \bigotimes_{x \in |X|} (\rho_x)_* (\chi_x)$ de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_\emptyset^H = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$.

Autrement dit, on a en toute place $x \in |X|$ et pour tout élément $h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$

$$K_\chi * h_x = \begin{cases} S_x^H(h_x)(z_{x_1}(\chi), z_{x_2}(\chi)) \cdot K_\chi & \text{si la place } x \text{ se scinde dans } E \text{ en deux places } x_1 \text{ et } x_2, \\ S_x^H(h_x)(z_x(\chi)^2) \cdot K_\chi & \text{si la place } x \text{ reste inerte dans } E. \end{cases}$$

(ii) Si de plus tous les polynômes P_x sont des monômes, toutes les formes $g \mapsto K_\chi(g)$ associées aux caractères automorphes unitaires non ramifiés χ de \mathbb{A}_E^\times sont non nulles.

Démonstration.

(i) En toute place $x \in |X|$, les noyaux locaux $K_{x,P_x}^{G,H,\psi_x}(\bullet, \bullet)$ et $K_{x,P_x}^{G,H,0}(\bullet, \bullet)$ ont été définis de telle façon que, pour tout élément $h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$, on ait

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} * h_x = K_{x,P_x}^{G,H,\psi} *^{-1} \rho_x^*(h_x),$$

$$K_{x,P_x}^{G,H,0} * h_x = K_{x,P_x}^{G,H,0} *^{-1} \rho_x^*(h_x).$$

Il résulte alors de sa définition que la fonction $K_P^{G,H,\rho}$ vérifie encore

$$K_P^{G,H,\rho} * h_x = K_P^{G,H,\rho} *^{-1} \rho_x^*(h_x), \quad \forall x \in |X|, \quad \forall h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H.$$

L'assertion de (i) s'en déduit immédiatement.

(ii) Pour tous éléments $t \in G(\mathbb{A})$, $g \in H(\mathbb{A})$, on dispose des égalités

$$\int_{F \backslash \mathbb{A}_F} du \cdot \psi(u) \cdot K_P^{G,H,\psi} \left(t, \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = \begin{cases} K_P^{G,H,\psi}(t, g) & \text{si } \gamma = 1 \text{ dans } F^\times, \\ 0 & \text{si } \gamma \in F^\times \text{ et } \gamma \neq 1, \end{cases}$$

et

$$\int_{F \backslash \mathbb{A}_F} du \cdot \psi(u) \cdot K_P^{G,H,0} \left(t, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = 0,$$

si du désigne la mesure de Haar sur \mathbb{A}_F qui attribue le volume 1 au quotient compact $F \backslash \mathbb{A}_F$.

On en déduit

$$\int_{F \backslash \mathbb{A}_F} du \cdot \psi(u) \cdot K_P^{G,H,\rho} \left(t, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) = \sum_{\delta \in E^\times} K_P^{G,H,\psi}(\delta t, g).$$

Puis, si

$$\chi : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

est un caractère automorphe unitaire partout non ramifié, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{F \backslash \mathbb{A}_F} du \cdot \psi(u) \cdot K_\chi \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= \int_{E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times} d^\times t \cdot \chi(t) \cdot \int_{F \backslash \mathbb{A}_F} du \cdot \psi(u) \cdot K_P^{G,H,\rho} \left(t, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= \int_{\mathbb{A}_E^\times} d^\times t \cdot \chi(t) \cdot K_P^{G,H,\psi}(t, g) \\ &= \prod_{x \in |X|} \int_{F_x^\times} d^\times t_x \cdot \chi_x(t_x) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi_x}(t_x, g_x) \\ &= \left[\prod_{\substack{x \in |X| \\ x \text{ scindée dans } E \text{ en} \\ \text{deux places } x_1 \text{ et } x_2}} P_x(z_{x_1}(\chi_x), z_{x_2}(\chi_x)) \cdot W_{x,(z_{x_1}(\chi_x), z_{x_2}(\chi_x))}^{H,\psi_x}(g_x) \right] \\ &\quad \cdot \left[\prod_{\substack{x \in |X| \\ x \text{ inerte dans } E}} P_x(z_x(\chi_x)^2) \cdot W_{x,(z_x(\chi_x), -z_x(\chi_x))}^{H,\psi_x}(g_x) \right]. \end{aligned}$$

Comme tous les polynômes P_x sont des monômes et que presque tous sont égaux à 1, cette fonction définie comme un produit sur toutes les places $x \in |X|$ ne peut être nulle.

A fortiori, la forme

$$g \mapsto K_\chi(g)$$

n'est pas nulle.

C'est ce que l'on voulait. □

Bibliographie

- A. BOREL et W. CASSELMAN (éditeurs), 1978, “Automorphic forms, representations and L -functions”, Proceedings of symposia in pure mathematics, volumes 33.I et 33.II, AMS.
- J.W. COGDELL et I.I. PIATETSKI-SHAPIRO, 1994, “Converse theorems for GL_n ”, Publications mathématiques de l’IHES, numéro 79, p. 157-214.
- H. JACQUET et R.P. LANGLANDS, 1970, “Automorphic forms on $GL(2)$ ”, LNM 114, Springer-Verlag.
- L. LAFFORGUE, 2007, “Quelques remarques sur le principe de fonctorialité”, prépublication de l’IHES numéro M/07/31, à paraître dans un volume de la collection “Astérisque” de la SMF.
- L. LAFFORGUE, 2009, “Construire des noyaux de la fonctorialité? Définition générale, cas de l’identité de GL_2 et construction générale conjecturale de leurs coefficients de Fourier”, texte disponible sur le site de l’auteur (www.ihes.fr/~lafforgue/publications.html) à partir de septembre 2009.
- R.P. LANGLANDS, 2004, “Beyond endoscopy”, in “Contributions to automorphic forms, geometry and number theory”, p. 611-697, John Hopkins University Press.
- J. SHALIKA, 1974, “The multiplicity one theorem for GL_n ”, Annals of mathematics, volume 100, p. 171-193.
- T. SHINTANI, 1976, “On an explicit formula for class-1 Whittaker functions on GL_n over p -adic fields”, Proceedings of the Japan Academy, volume 52, p. 180-182.
- J. TATE, 1950, “Fourier analysis in number fields and Hecke’s zeta-functions”, thèse de doctorat (Princeton) reproduite dans : J.W.S. Cassels et A. Fröhlich (éditeurs), “Algebraic number theory”, Academic Press (1967), p. 305-347.