Invent. math. 147, 1–241 (2002)
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002220100174

Inventiones mathematicae

Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands

Laurent Lafforgue

Université de Paris-Sud, UMR 8628 du CNRS, Mathématique, bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France

Institut des Hautes Études Scientifiques, Le Bois-Marie, 35, route de Chartres, 91440 Bures-Sur-Yvette, France

Oblatum 13-X-2000 & 7-VI-2001
Published online: 12 October 2001 –

Résumé. On démontre la correspondance de Langlands pour GL_r sur les corps de fonctions. La preuve généralise celle de Drinfeld en rang 2 : elle consiste à réaliser la correspondance en rang r dans la cohomologie ℓ-adique des variétés modulaires de chtoucas de Drinfeld de rang r.

Abstract. One proves Langlands' correspondence for GL_r over function fields. This is a generalization of Drinfeld's proof in the case of rank 2 : Langlands' correspondence is realized in ℓ-adic cohomology spaces of the modular varieties classifying rank r Drinfeld shtukas.

Introduction

L'objet de ce travail est de démontrer la correspondance de Langlands pour les groupes linéaires GL_r sur les corps de fonctions. La preuve généralise celle de Drinfeld en rang 2 : elle consiste à réaliser la correspondance en rang r arbitraire dans la cohomologie ℓ-adique des variétés (ou plutôt des champs) de chtoucas de Drinfeld de rang r. On s'appuie sur différents

---

Code matière AMS (2000) : 11F, 11F52, 11F60, 11F66, 11F70, 11F72, 11F80, 11R39, 14G35, 14H60, 22E55.

Mots clés : Chtoucas – Variétés modulaires de Drinfeld – Modules des fibrés sur les courbes – Correspondance de Langlands – Corps de fonctions – Représentations galoisiennes – Représentations automorphes – Fonctions L – Cohomologie ℓ-adique – Correspondances de Hecke – Formule des traces d'Arthur-Selberg – Formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz

Key words : Shtukas – Drinfeld modular varieties – Moduli of vector bundles over curves – Langlands' correspondence – Function fields – Galois representations – Automorphic representations – L-functions – ℓ-adic cohomology – Hecke correspondences – Arthur-Selberg trace formula – Grothendieck-Lefschetz fixed points formula

travaux préparatoires effectués précédemment par l'auteur : le calcul au moyen de la formule des traces d'Arthur-Selberg des nombres de points fixes dans les variétés de chtoucas convenablement tronquées, dans le livre [Lafforgue, 1997], et la compactification dans l'article [Lafforgue, 1998] des variétés de chtoucas sans structures de niveau en variétés de "chtoucas itérés".

On considère donc une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments et F le corps des fonctions rationnelles sur la courbe X. On note G_F le groupe de Galois de F, $|X|$ l'ensemble des points fermés de X identifiés aux places de F, $\mathbb{A} = \prod\limits_{x \in |X|} F_x$ l'anneau des adèles de F et $O_{\mathbb{A}} = \prod\limits_{x \in |X|} O_x$ son sous-anneau des entiers.

On fixe un nombre premier ℓ qui ne divise pas q. Pour tout entier $r \geq 1$, on désigne par $\mathcal{A}^r(F)$ l'ensemble des représentations automorphes cuspidales irréductibles π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ (ou de son algèbre de convolution $\mathcal{H}^r$ appelée algèbre de Hecke) dont le caractère central χ_π est d'ordre fini et par $\mathcal{G}_\ell^r(F)$ l'ensemble des représentations ℓ-adiques de G_F qui sont presque partout non ramifiées et irréductibles de dimension r et dont le déterminant est d'ordre fini.

La correspondance de Langlands sur le corps de fonctions F s'énonce :

Théorème. – *Pour tout entier $r \geq 1$, on a :*

(i)$_r$ *A toute représentation automorphe cuspidale $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$, on peut associer une unique représentation galoisienne $\sigma_\pi \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ qui est non ramifiée en toute place $x \in |X|$ où π est non ramifiée et a pour valeurs propres de Frobenius les valeurs propres de Hecke $z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$ de π.*

(ii)$_r$ *Réciproquement, à toute représentation galoisienne $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$, on peut associer une unique représentation automorphe $\pi_\sigma \in \mathcal{A}^r(F)$ dont les valeurs propres de Hecke sont les valeurs propres de Frobenius de σ.*

L'unicité dans les assertions (i) de ce théorème résulte du théorème de densité de Chebotarev et l'unicité dans les assertions (ii) du "théorème de multiplicité un fort" de Piatetski-Shapiro.

Les assertions (i) et (ii) en rang $r = 1$ équivalent à la loi de réciprocité dans la théorie du corps de classes sur F.

Raisonnant par récurrence, on fixe un entier $r \geq 2$ et on suppose les assertions (i) déjà connues en rangs $< r$. En combinant les équations fonctionnelles de fonctions L de Grothendieck, la formule du produit de Laumon et les "théorèmes réciproques" de Hecke, Weil et Piatetski-Shapiro, on en déduit (c'est le "principe de récurrence" de Deligne) que les assertions (ii) sont aussi connues en rangs $\leq r$.

Ainsi, on est réduit à construire l'application $\mathcal{A}^r(F) \to \mathcal{G}_\ell^r(F) : \pi \mapsto \sigma_\pi$. En fait, notant q' et q'' les deux projections de la surface $X \times X$ sur la courbe X, on va identifier dans la cohomologie ℓ-adique au-dessus du point générique de $X \times X$ des variétés de chtoucas de rang r (munies de l'action de $\mathcal{H}^r$ par correspondances de Hecke) un morceau de la forme

$$\bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}^r(F)} \pi \otimes q'^* \sigma_\pi \otimes q''^* \check{\sigma}_\pi (1-r).$$

Rappelons en effet que pour tout niveau N c'est-à-dire tout sous-schéma fermé fini $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N$ de X, on dispose du champ (algébrique au sens de Deligne-Mumford) Cht_N^r classifiant les chtoucas de Drinfeld de rang r avec structures de niveau N ; il est muni naturellement d'un morphisme lisse de dimension $2r-2$ sur $(X-N) \times (X-N)$, de deux endomorphismes dits “de Frobenius partiels” Frob_∞ et Frob_0 dont le composé est Frob et d'une action par correspondances de la sous-algèbre $\mathcal{H}_N^r$ de $\mathcal{H}^r$ constituée des fonctions bi-invariantes par $K_N = \operatorname{Ker}[K = \mathrm{GL}_r(O_\mathbb{A}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)]$. Dans Cht_N^r, il y a une infinité de composantes connexes ; afin de n'en plus avoir qu'un nombre fini, on peut considérer le classifiant $\mathrm{Cht}_N^{r,d} \subset \mathrm{Cht}_N^r$ des chtoucas de degré d fixé ou bien le quotient $\mathrm{Cht}_N^r / a^\mathbb{Z} \cong \coprod_{1 \le d \le r} \mathrm{Cht}_N^{r,d}$ par un idèle $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré 1. Un tel quotient reste muni d'une action de Frob_∞ et Frob_0 et de $\mathcal{H}_N^r$.

La principale difficulté dans l'étude des chtoucas réside en ceci que les composantes connexes de Cht_N^r ne sont pas de type fini. Leur cohomologie ℓ-adique est de dimension infinie et si on cherche à compter leurs nombres de points fixes par les correspondances de Hecke, on trouve qu'il y en a une infinité. De plus, il n'existe pas dans $\mathrm{Cht}_N^r / a^\mathbb{Z}$ d'ouvert de type fini qui soit stable par l'action de Frob_∞, Frob_0 ou $\mathcal{H}_N^r$.

Dans le livre [Lafforgue, 1997], on a néanmoins défini des ouverts de type fini $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \le p} / a^\mathbb{Z} \cong \coprod_{1 \le d \le r} \mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p} \le p}$ dans $\mathrm{Cht}_N^r / a^\mathbb{Z}$ en bornant par un polygone de troncature $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ le polygone canonique de Harder-Narasimhan $\overline{p}$ des chtoucas. En combinant la formule des traces d'Arthur-Selberg et la description adélique des chtoucas par Drinfeld, on a calculé les nombres de points fixes par les composés de puissances de Frob et de correspondances de Hecke $f \in \mathcal{H}_N^r$ qui sont dans la fibre de $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \le p} / a^\mathbb{Z}$ au-dessus d'un point x de $X \times X$ qui s'envoie sur deux places distinctes ∞, $0 \in |X - N|$. En simplifiant, on a pour ces nombres de points fixes des expression de la forme

$$\begin{aligned} &\mathrm{Lef}_x \left(\mathrm{Frob}^s \times f, \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \le p} / a^\mathbb{Z} \right) \\ &= q^{(r-1)s} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}^r(F) \\ \chi_\pi(a) = 1}} \mathrm{Tr}_\pi(f) \left(z_1(\pi_\infty)^{-s/\deg(\infty)} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s/\deg(\infty)} \right) \\ &\qquad\qquad \left(z_1(\pi_0)^{s/\deg(0)} + \cdots + z_r(\pi_0)^{s/\deg(0)} \right) \end{aligned}$$

$+$ d'autres termes où apparaissent les valeurs propres de Hecke des représentations automorphes cuspidales des sous-groupes de Lévi stricts de GL_r.

Il faut remarquer tout de suite que, si Frob_x désigne l'élément de Frobenius en le point fermé x de la surface $X \times X$, le terme principal dans la formule de comptage ci-dessus a la forme qu'on attend pour une trace de $\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)} \times f$ sur la représentation $\bigoplus_{\substack{\pi \in \mathcal{A}^r(F) \\ \chi_\pi(a)=1}} \pi \otimes q'^* \sigma_\pi \otimes q''^* \check{\sigma}_\pi(1-r)$ qu'il s'agit de construire.

Quand f est l'unité $\mathbb{1}_N$ de l'algèbre $\mathcal{H}_N^r$, la correspondance de Hecke associée est l'identité de $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ et d'après la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz, $\mathrm{Lef}_x(\mathrm{Frob}^s, \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ s'interprète comme la trace de $\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}$ sur la cohomologie ℓ-adique à supports compacts $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ de $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus du point générique de $X \times X$. Mais en général f ne stabilise pas l'ouvert tronqué $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ et le nombre $\mathrm{Lef}_x(\mathrm{Frob}^s, \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ est a priori dépourvu de sens cohomologique.

Afin de retrouver l'action des correspondances de Hecke qu'on a perdue en tronquant, on considère les compactifications $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ des ouverts $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$. Pour $N = \emptyset$, elles ont été construites dans l'article [Lafforgue, 1998]. Ce sont des champs algébriques au sens d'Artin dont les groupes d'automorphismes sont finis (mais ont une partie ramifiée), ils sont propres et lisses au-dessus de $X \times X$ et leurs bords sont des diviseurs à croisements normaux relatifs. Les strates de bord sont munies non seulement de ces deux morphismes sur X "pôle" et "zéro" mais aussi de morphismes sur X supplémentaires appelés "dégénérateurs". Chaque élément $f \in \mathcal{H}_\emptyset^r$ définit une correspondance dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ par simple normalisation de la trace dans l'ouvert $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ de la correspondance de Hecke associée à f dans $\mathrm{Cht}^r/a^{\mathbb{Z}}$; une telle correspondance induit un endomorphisme de la cohomologie $H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$ auquel on peut espérer appliquer une formule des points fixes de Grothendieck.

Pour $N \neq \emptyset$, on définit les champs $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ comme les normalisés des $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} (X - N) \times (X - N)$ dans les $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$. Ils sont propres sur $(X - N) \times (X - N)$ mais ils ne sont pas lisses et a priori les correspondances de Hecke $f \in \mathcal{H}_N^r$ étendues par normalisation n'induisent pas d'endomorphismes en cohomologie. Si toutefois $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ admet une résolution des singularités $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ propre et lisse sur $(X-N)\times(X-N)$ et dont le bord $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} - \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ est un diviseur à croisements normaux relatif, les correspondances normalisées induisent des endomorphismes de $H_c^*(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$.

On considère d'autre part l'ouvert $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ défini en demandant que non seulement le pôle et le zéro mais aussi les "dégénérateurs" évitent N. Il est lisse sur $(X-N)\times(X-N)$ et son bord $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}} -$

$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ est un diviseur à croisements normaux relatif. On montre que, de façon remarquable, les correspondances de Hecke normalisées stabilisent $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ et donc elles induisent des endomorphismes de sa cohomologie.

Il faut noter que tous ces endomorphismes induits dans les $H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$ et les $H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ (ou éventuellement les $H_c^*(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$) ne définissent pas d'action des $\mathcal{H}_\emptyset^r$ et $\mathcal{H}_N^r$ car la formation des correspondances de Hecke normalisées ne commute pas avec la multiplication.

En résumé, on dispose de trois objets géométriques distincts sur lesquels on dispose de trois informations différentes qui suffiraient à conclure si on pouvait les rapporter à un unique objet : sur $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$, on a une action par correspondances de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_N^r$ (et aussi de Frob_∞ et Frob_0) ; sur les $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$, on a des formules de comptage des points fixes ; enfin, sur les ouverts $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ (ou éventuellement sur les $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$), on a la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz-Verdier. Le principe de la démonstration va consister à séparer dans les trois représentations galoisiennes $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$, $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ et $H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ (ou éventuellement $H_c^*(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$) un morceau "essentiel" de tout le reste qu'on qualifiera de "négligeable". Cette cohomologie essentielle sera la même pour les trois objets et il s'agira d'extraire dans les trois informations de départ ce qui la concerne et qui va permettre de la calculer.

La définition de ce qui est négligeable et de ce qui est essentiel est dictée par la formule de comptage rappelée plus haut. En effet, les termes complémentaires dans cette formule, ceux qu'on voudrait supprimer, ne font apparaître que les valeurs propres de Hecke de représentations automorphes cuspidales de sous-groupes de Lévi stricts de GL_r lesquelles s'interprètent d'après l'hypothèse de récurrence comme valeurs propres de Frobenius de représentations galoisiennes irréductibles de dimension $< r$. Au contraire, on s'attend à ce que les valeurs propres de Hecke qui apparaissent dans le terme principal s'interprètent comme valeurs propres de Frobenius de représentations galoisiennes toutes irréductibles de dimension r. Ainsi est-on amené à poser :

Définition. – *Un faisceau ℓ-adique lisse irréductible sur un ouvert de $X \times X$ sera dit r-négligeable s'il est facteur direct d'un faisceau de la forme*

$$q'^*\sigma' \otimes q''^*\sigma'' ,$$

avec σ' et σ'' deux faisceaux ℓ-adiques lisses et irréductibles de rangs $< r$ sur des ouverts de la courbe X.

Il sera dit essentiel sinon.

Les représentations virtuelles $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ nous sont connues par les traces des puissances $\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}$ des éléments de Frobenius Frob_x en les points fermés x de $(X-N)\times(X-N)$. L'hypothèse de récurrence jointe à ce qu'on sait de la localisation des pôles et zéros des fonctions L de paires (tant automorphes que galoisiennes) permet de séparer dans $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ la partie essentielle $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})_{\mathrm{ess}}$ de la partie négligeable et en les points x dont les deux projections ∞ et 0 sur X sont distinctes, on obtient la formule des traces suivante

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}, H_c^*\left(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}\right)_{\mathrm{ess}}\right) = \\ q^{(r-1)s} \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}^r(F)\\ \chi_\pi(a)=1}} &\mathrm{Tr}_\pi(\mathbb{1}_N)\left(z_1(\pi_\infty)^{-s/\deg(\infty)}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s/\deg(\infty)}\right)\\ &\qquad\left(z_1(\pi_0)^{s/\deg(0)}+\cdots+z_r(\pi_0)^{s/\deg(0)}\right).\end{aligned}$$

On remarque que cette formule ne dépend pas du polygone de troncature p et ceci permettra d'identifier les $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})_{\mathrm{ess}}$ entre eux et avec la partie essentielle de $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r}/a^{\mathbb{Z}}) = \varinjlim_p H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$.

Mais il faut d'abord montrer que $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ et $H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ ou éventuellement $H_c^*(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$ ont même partie essentielle et pour cela que la cohomologie des strates de bord de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ ou $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ est r-négligeable.

Quand le niveau N est vide, les strates de bord des $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ sont indexées par les partitions non triviales $r = r_1+\cdots+r_k$ de l'entier r et elles sont essentiellement de la forme $\mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1}\times_X\cdots\times_X\mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k}$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que la cohomologie sur $X\times X$ de chaque $\mathrm{Cht}^{r_i,d_i,\overline{p}\leq p_i}$ est (r_i+1)-négligeable et a fortiori r-négligeable et on en déduit que la cohomologie sur $X\times X$ de la strate considérée est r-négligeable.

Quand le niveau N n'est pas vide, un argument du même type s'applique à tout champ $\mathfrak{X}$ qui s'écrit comme produit fibré dans un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathfrak{C}\\ \big\downarrow & & \big\downarrow\\ (X-N)\times(X-N)\times_{(X\times X)}\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} & \xrightarrow{\cdot\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N} & \mathfrak{C}^{r,N}\end{array}$$

dont la base est le morphisme lisse $\cdot\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N$ de “restriction des chtoucas itérés de X à N” (voir le paragraphe III.2a pour une définition précise) et où $\mathfrak{C}$ est un champ représentable quasi-projectif sur $\mathfrak{C}^{r,N}$ qui prolonge le revêtement de Lang qui définit $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$. Ici encore, on utilise l'hypothèse de récurrence et le calcul des nombres de points fixes par les puissances de Frob dans les fibres des $\mathrm{Cht}_N^{r',\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$, $r' < r$, au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$. Quand les "dégénérateurs" (qui sont les zéros et pôles des chtoucas de rangs $r_1, \ldots, r_k < r$ que classifient les strates de bord des $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$) n'évitent pas N, on a besoin d'un calcul de points fixes supplémentaire dans les champs de chtoucas de rangs $< r$ avec structures de niveau N comprenant le zéro ou le pôle.

On applique ces arguments d'une part aux ouverts $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ des $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ (lesquels ont la forme ci-dessus en prenant pour $\mathcal{C}$ un certain ouvert lisse $\mathcal{C}_n'^r$ de la normalisation $\mathcal{C}_N^r$ de $\mathcal{C}^{r,N}$ dans le revêtement de Lang, voir les paragraphes III.3a et III.3b) et d'autre part à la cohomologie d'intersection des normalisations $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ (en utilisant le fait qu'elles sont déduites de $\mathcal{C}_N^r$ par changement de base et que leur complexe d'intersection est l'image réciproque de celui de $\mathcal{C}_N^r$). Dans tous les cas, le plus important est de ne considérer que des objets définis comme des produits fibrés au-dessus du morphisme de restriction de X à N.

Si on veut construire des résolutions des singularités $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ qui vérifient toutes les propriétés dont nous avons besoin, on est ramené au problème de résoudre les singularités de la normalisation $\mathcal{C}_N^r$. Ce problème est étroitement lié à celui de construire des compactifications équivariantes et lisses de tous les quotients $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$. L'auteur avait cru le résoudre dans l'article [Lafforgue, 1999] mais en préparant un cours à l'Institut Henri Poincaré il s'est aperçu dans les premiers jours de juin 2000 que le principal énoncé de lissité de cet article (le théorème 6 du paragraphe 1c) est faux quand $n \geq 3$ (l'erreur est dans le lemme 3 du paragraphe 3b). Le cas $n = 1$ (celui des homomorphismes complets, cas particulier des compactifications "mirifiques" de De Concini et Procesi) et le cas $n = 2$ sont vrais et cela suffit pour résoudre les singularités de $\mathcal{C}_N^r$ quand N n'a pas de multiplicités mais c'est insuffisant sinon. C'est la nécessité de corriger les conséquences de cette faute qui a amené l'auteur à s'apercevoir fin juin 2000 de la propriété de stabilité des ouverts lisses $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ par les correspondances de Hecke.

Une fois qu'on a montré que la partie essentielle des $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$, des $H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ ou $H_c^*(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$ et de $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$ est la même (et qu'elle est concentrée en degré $2r-2$) ce qui utilise aussi la pureté de la cohomologie d'intersection de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ ou de $H_c^*(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$, on peut commencer à faire entrer en jeu l'action de $\mathcal{H}_N^r$ et de Frob_∞ et Frob_0. Sur $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}) = \varinjlim_p H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$, on construit une filtration finie stable par ces actions et dont chaque sous-quotient est ou bien r-négligeable ou bien essentiel. Ainsi la partie essentielle $H_{N,\mathrm{ess}}$ de $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$ se retrouve-t-elle munie d'une action de $\mathcal{H}_N^r$ et de Frob_∞ et Frob_0. Afin de déterminer l'action de $\mathcal{H}_N^r$ sur la représentation galoisienne $H_{N,\mathrm{ess}}$, il suffit de calculer la trace des composés de toute correspondance de Hecke fixée $f \in \mathcal{H}_N^r$ avec les puissances $\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}$ des éléments de Frobenius en les points fermés x de $(X - N) \times (X - N)$.

L'action de f sur $H_{N,\mathrm{ess}}$ est identique à celle de la correspondance induite par f sur la cohomologie essentielle des ouverts $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ ou des compactifiés $\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ quand ils existent. On doit relier les traces de celle-ci aux nombres de points fixes dans les ouverts $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$.

Notons $S = (X - N) \times (X - N)$, $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ (si $N = \emptyset$), $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ ou $\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ et $\overline{\mathfrak{X}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{X}}_m$ les strates fermées du bord de $\mathfrak{X}$ qui sont de codimension 1. Les autres strates fermées de bord sont les $\overline{\mathfrak{X}}_I = \bigcap\limits_{i\in I} \overline{\mathfrak{X}}_i$, $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $I \neq \emptyset$. Comme dans l'article [Pink], on introduit l'éclaté $\widetilde{Z}$ de $Z = \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ le long des $\overline{\mathfrak{X}}_1 \times_S \overline{\mathfrak{X}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{X}}_m \times_S \overline{\mathfrak{X}}_m$; il est muni de diviseurs exceptionnels $E_1, \ldots, E_m$ qui sont à croisements normaux et pour $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $I \neq \emptyset$, on peut considérer $E_I = \bigcap\limits_{i\in I} E_i$.

Expliquons le cas où $\mathfrak{X}$ est propre sur S.

La correspondance f dans $\mathfrak{X}$ est un cycle dans Z dont on note $\widetilde{f}$ le transformé strict dans $\widetilde{Z}$; soient $\mathrm{cl}(f)$ et $\mathrm{cl}(\widetilde{f})$ leurs classes de cohomologie. Pour toute $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, on note $\mathrm{cl}(\widetilde{f})_I$ l'image directe dans $\overline{\mathfrak{X}}_I \times_S \overline{\mathfrak{X}}_I$ de l'image réciproque dans E_I de $\mathrm{cl}(\widetilde{f})$; c'est une correspondance cohomologique dans $\overline{\mathfrak{X}}_I$.

Soient encore $\mathrm{cl}(\delta_x^s)$ et $\mathrm{cl}(\delta_{x,I}^s)$ les classes de cohomologie des graphes de Frob^s dans les fibres de $\mathfrak{X}$ et des $\overline{\mathfrak{X}}_I$ au-dessus des points fermés x de $S = (X - N) \times (X - N)$. Soit $\mathrm{cl}(\widetilde{\delta_x^s})$ la classe du transformé strict du graphe δ_x^s de Frob^s dans $\widetilde{Z} \times_S x$.

Un calcul d'adjonction donne pour les nombres d'intersection la formule suivante

$$\mathrm{cl}(\widetilde{\delta_x^s}) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{f})) = \mathrm{cl}(\delta_x^s) \cdot x^*(\mathrm{cl}(f)) + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \mathrm{cl}(\delta_{x,I}^s) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{f})_I).$$

Notons $\mathfrak{X}_\emptyset = \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire du bord $\overline{\mathfrak{X}}_1 \cup \cdots \cup \overline{\mathfrak{X}}_m$. Pink a montré que pour une correspondance f générale qui **stabilise l'ouvert** $\mathfrak{X}_\emptyset$ (et quitte à remplacer f par sa transformée par une puissance assez grande de $\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}$), les nombres d'intersection $\mathrm{cl}(\widetilde{\delta_x^s}) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{f}))$ des transformés stricts dans $\widetilde{Z}$ sont concentrés dans l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset \times_S \mathfrak{X}_\emptyset$.

Dans notre situation, la correspondance de Hecke f ne stabilise pas $\mathfrak{X}_\emptyset$. Mais on remarque que l'argument géométrique de Pink reste valable si l'on suppose seulement que f “stabilise $\mathfrak{X}_\emptyset$ au voisinage de ses points fixes” au sens qu'il existe un ouvert U de $\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X} = Z$, contenant toutes les intersections de f avec les graphes des puissances de Frob et tel que, si p'_f et p''_f désignent les deux projections sur $\mathfrak{X}$ de la correspondance f, on ait

$$U \cap {p'_f}^{-1}(\mathfrak{X}_\emptyset) \subseteq U \cap {p''_f}^{-1}(\mathfrak{X}_\emptyset).$$

Or on démontre que les correspondances de Hecke f dans $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ vérifient cette propriété de stabilisation locale de $\mathfrak{X}_\emptyset$. L'argument pour cela est une généralisation en rang r arbitraire de la proposition 7.2 de l'article [Drinfeld, 1989]. Il est fondé sur l'existence des "dégénérateurs" dans les strates de bord de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$.

En résumé, on a montré que pour $f \in \mathcal{H}_N^r$ fixée, il existe des correspondances cohomologiques u_I dans les strates de bord $\overline{\mathfrak{X}}_I$, $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $I \neq \emptyset$, telles que pour tout point fermé x de $(X - N) \times (X - N)$ et tout multiple s assez grand de $\deg(x)$, on ait

$$\mathrm{Tr}_{H_c^*(\mathfrak{X})}\left(f \times \mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right) + \sum_{I\neq\emptyset}(-1)^{|I|}\,\mathrm{Tr}_{H_c^*(\overline{\mathfrak{X}}_I)}\left(u_I \times \mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)$$
$$= \mathrm{Lef}_x\left(\mathrm{Frob}^s \times f\ ,\ \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}\right).$$

On a le même résultat quand $\mathfrak{X}$ n'est pas propre sur S. En plus des arguments précédents, il faut raisonner cette fois en termes de correspondances cohomologiques au sens de Grothendieck-Verdier sur l'espace de modules grossier de $\mathfrak{X}$ et appliquer la formule générale des traces de Grothendieck-Lefschetz-Verdier et le théorème de Fujiwara sur la conjecture de Deligne pour faire disparaître les termes à l'infini. La démonstration de Fujiwara utilise la cohomologie analytique rigide qui est développée seulement pour les schémas et non pour les espaces algébriques. Pour cette raison, on est aussi amené à montrer que les espaces algébriques grossiers associés aux $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ deviennent des schémas au moins après extension finie du corps de base $\mathbb{F}_q$.

Quand les deux projections ∞ et 0 de x sur X sont distinctes, on a calculé le nombre de Lefschetz $\mathrm{Lef}_x(\mathrm{Frob}^s \times f, \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ en termes automorphes. En utilisant encore une fois l'hypothèse de récurrence et des arguments de fonctions L de paires, on sépare dans la formule ci-dessus la partie essentielle de la partie négligeable et on obtient

$$\mathrm{Tr}\left(f \times \mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}, H_{N,\mathrm{ess}}\right) = q^{(r-1)s} \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{A}^r(F)\\ \chi_\pi(a)=1}} \mathrm{Tr}_\pi(f)$$
$$\left(z_1(\pi_\infty)^{-s/\deg(\infty)} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s/\deg(\infty)}\right)$$
$$\left(z_1(\pi_0)^{s/\deg(0)} + \cdots + z_r(\pi_0)^{s/\deg(0)}\right).$$

Cela suffit pour conclure.

Pour la commodité du lecteur, on peut préciser quelles sont les ressemblances et les différences entre la présente démonstration et celle de Drinfeld en rang $r = 2$.

Dans les espaces $\mathrm{Cht}^2/a^{\mathbb{Z}}$ ou $\mathrm{Cht}^2_N/a^{\mathbb{Z}}$ de chtoucas de rang 2, Drinfeld a d'abord défini des ouverts de type fini $\mathrm{Cht}^{2,m}/a^{\mathbb{Z}}$ ou $\mathrm{Cht}^{2,m}_N/a^{\mathbb{Z}}$ indexés par les entiers $m \in \mathbb{N}$ et que nos ouverts tronqués $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ généralisent (les entiers m sont les valeurs des polygones convexes $p : [0,2] \to \mathbb{R}_+$ en $s = 1$). Puis il a construit des compactifications $\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}}/a^{\mathbb{Z}}$ des $\mathrm{Cht}^{2,m}/a^{\mathbb{Z}}$ que nos compactifications sans niveau $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ généralisent encore : leur bord comprend une unique strate qui correspond à la partition $2 = 1 + 1$.

Dans le cas avec niveau, les normalisations $\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}}$ des $\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}}/a^{\mathbb{Z}}$ dans les $\mathrm{Cht}^{2,m}_N/a^{\mathbb{Z}}$ ne sont pas lisses mais Drinfeld a montré qu'elles sont "cohomologiquement lisses" au sens que le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ y est auto-dual (l'auteur ignore ce qu'il en est en rang $r \geq 3$) si bien que leur cohomologie ℓ-adique $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ vérifie la dualité de Poincaré.

Drinfeld a prouvé encore que les immersions ouvertes $\mathrm{Cht}^{2,m}_N/a^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathrm{Cht}^{2,m+1}_N/a^{\mathbb{Z}}$ induisent des morphismes birationnels partout bien définis dans l'autre sens $\overline{\mathrm{Cht}^{2,m+1}_N}/a^{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}}$ (ce qui n'est plus vrai dès le rang $r = 3$) et à partir de là toute son étude se concentre sur la tour des $\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}}$ et la limite inductive de dimension infinie $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,\cdot}_N}/a^{\mathbb{Z}}) = \varinjlim_m H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ munie du produit scalaire fourni par la dualité de Poincaré. Les correspondances de Hecke $f \in \mathcal{H}^2_N$ et les endomorphismes de Frobenius partiels $\mathrm{Frob}_\infty, \mathrm{Frob}_0$ étendus par normalisation induisent des endomorphismes de chaque $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ et Drinfeld prouve qu'ils définissent de nouveau une véritable action de $\mathcal{H}^2_N \times \mathbb{Z}$ sur la limite inductive $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,\cdot}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ (dans chaque $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ l'endomorphisme induit par une correspondance $f \in \mathcal{H}^2_N$ est le composé de celui dans $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,\cdot}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ et de la projection orthogonale sur le sous-espace de dimension finie $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ ce qui explique pourquoi, dès le rang $r = 2$, $\mathcal{H}^2_N$ n'agit pas sur $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}})$).

Enfin, Drinfeld calcule complètement $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,\cdot}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ muni de la triple action du groupe de Galois G_{F^2}, de $\mathcal{H}^2_N$ et de $\mathrm{Frob}_\infty, \mathrm{Frob}_0$. Il commence par étudier dans les $\overline{\mathrm{Cht}^{2,m}_N}/a^{\mathbb{Z}}$ une certaine famille infinie de cycles algébriques, les "horocycles", avec leurs nombres d'intersection mutuels et l'action sur eux de $\mathcal{H}^2_N$ et $\mathrm{Frob}_\infty, \mathrm{Frob}_0$; les classes de cohomologie de ces cycles engendrent une sous-représentation de $H^*_c(\overline{\mathrm{Cht}^{2,\cdot}_N}/a^{\mathbb{Z}})$ dont la structure est complètement explicite et qui est de codimension finie. La représentation quotient est la partie la plus intéressante (c'est elle qui contient la "cohomologie essentielle" en notre sens et donc réalise la correspondance de Langlands en rang 2) ; Drinfeld la calcule grâce à la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz dans les $H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{2,m}}/a^{\mathbb{Z}})$ en obtenant une formule de comptage des points fixes non seulement dans les ouverts tronqués $\mathrm{Cht}_N^{2,m}/a^{\mathbb{Z}}$ mais même dans leurs compactifications $\overline{\mathrm{Cht}_N^{2,m}}/a^{\mathbb{Z}}$. Cela utilise bien sûr la formule des traces de Selberg pour GL_2 et aussi (pour le comptage des points fixes au bord) un calcul explicite et une interprétation géométrique de tous ses termes spectraux non cuspidaux (que l'auteur ne saurait généraliser en rang $r \geq 3$ que dans le cas sans niveau c'est-à-dire sans opérateurs d'entrelacement locaux).

Donnons quelques indications sur le plan du présent travail.

La partie finale de la démonstration, celle où tous les acteurs entrent en scène, est donnée dans le chapitre VI, particulièrement aux paragraphes 2 et 3. Les cinq chapitres précédents et les deux appendices sont de nature préparatoire et rassemblent les différents types d'informations dont on a besoin.

Le chapitre I rappelle les formules de comptage des points fixes dans les ouverts tronqués des champs de chtoucas et les met sous la forme qui servira. Le chapitre II complète ce calcul quand le niveau comprend le zéro (ou le pôle) : on en aura besoin pour montrer que les strates de bord sont négligeables. Le chapitre III rappelle la forme des compactifications sans niveau et les munit de structures de niveau. Il montre que les ouverts $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'$ sont lisses. L'appendice A donne les propriétés de base de la cohomologie ℓ-adique du type de champs (algébriques au sens d'Artin avec groupes d'automorphismes finis) auquel appartiennent les champs de chtoucas et leurs compactifications. Le chapitre IV établit une formule générale des points fixes d'une correspondance dans un ouvert qu'elle ne stabilise pas globalement mais "localement au voisinage de ses points fixes", d'abord dans le cas propre puis dans le cas non propre. Le chapitre V montre que les correspondances de Hecke vérifient cette hypothèse de stabilité locale et qu'elles stabilisent globalement les ouverts $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$. Il montre aussi que les espaces algébriques grossiers des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$ deviennent sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ des schémas. L'appendice B rappelle les propriétés dont on a besoin des fonctions L de paires automorphes ainsi que le "théorème réciproque" de Piatetski-Shapiro.

Enfin, le chapitre VII est consacré à des applications : compatiblité entre correspondances de Langlands locales et globale, conséquences pour les faisceaux ℓ-adiques, plus quelques mots sur la correspondance de Langlands géométrique.

En terminant ce travail, je tiens à exprimer encore une fois ma profonde reconnaissance envers Gérard Laumon qui m'a initié aux chtoucas de Drinfeld et à la formule des traces d'Arthur-Selberg. Il n'a jamais cessé de m'encourager dans la voie de la correspondance de Langlands et je peux dire qu'au fil des ans il m'a consacré des centaines d'heures, soit pour me communiquer un peu de ses connaissances, soit pour m'écouter quand je faisais des progrès, soit pour me soutenir dans les périodes difficiles.

Je remercie aussi les nombreux mathématiciens avec qui j'ai eu l'occasion de parler, Laurent Clozel, Alain Genestier, Guy Henniart, Luc Illusie, Serge Lysenko, Ngo Bao Chau, Michel Raynaud et Jean-Loup Waldspurger ainsi que Christophe Soulé pour sa relecture attentive du manuscrit et ses nombreuses remarques et corrections.

J'ai été particulièrement sensible aux manifestations de soutien et d'amitié qui m'ont été témoignées dans la période très difficile pour moi de juin et juillet 2000. C'est pourquoi je veux renouveler mes remerciments les plus profonds, encore et toujours à Gérard Laumon, mais aussi à Michel Raynaud, Alain Genestier, Ngo Bao Chau, Luc Illusie et Laurent Clozel.

Je remercie aussi beaucoup Gerd Faltings, le rapporteur automorphe anonyme, Pierre Deligne, Vladimir Drinfeld et l'ensemble des rapporteurs pour leur travail de relecture critique des différentes parties. Ils m'ont permis de corriger quelques (petites) erreurs qui subsistaient et, je l'espère, d'améliorer la rédaction.

Enfin, j'adresse mes plus chaleureux remerciements à M$^{\text{me}}$ Bonnardel qui a assuré la frappe entière de la première mouture de ce texte comme de mes précédents articles et à M$^{\text{me}}$ Gourgues de l'I.H.E.S qui a réalisé la frappe des nouveaux paragraphes nécessités par la correction de mon erreur avec une rapidité et un soin extraordinaires.

Sommaire

Chapitre I

Rappels sur les chtoucas et leur comptage

Ce chapitre rassemble un certain nombre de résultats antérieurs dont on aura besoin dans la suite. On renvoie à l'article [Drinfeld, 1987] pour la définition des chtoucas et l'étude de leurs propriétés géométriques et au livre [Lafforgue, 1997] pour les troncatures et les formules de comptage.

Tous les schémas (et champs) considérés seront sur un même corps de base $\mathbb{F}_q$ fini à q éléments. On a fixé une fois pour toutes une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$. L'ensemble des points fermés de X est noté $|X|$; il s'identifie à celui des places du corps F des fonctions rationnelles sur X.

1) Les champs de chtoucas de Drinfeld

a) Définition. Morphisme de structure

Pour tout schéma (ou champ) S sur $\mathbb{F}_q$, on notera Frob_S l'endomorphisme de S d'élévation à la puissance q.

Définition I.1 (Drinfeld). – *Un chtouca (à droite)* [*resp. à gauche*] *de rang $r \geq 1$ sur un schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) consiste en*

- *un fibré $\mathcal{E}$ de rang r sur $X \times S$, autrement dit un $\mathcal{O}_{X\times S}$-Module localement libre de rang r,*
- *une modification (à droite)* [*resp. à gauche*] *de $\mathcal{E}$ c'est-à-dire un diagramme*

$$\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}'' \quad [\textit{resp. } \mathcal{E} \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}' \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}'']$$

  où $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ sont deux fibrés de rang r sur $X \times S$ et j, t sont deux homomorphismes injectifs dont les conoyaux sont supportés par les graphes de deux morphismes $\infty, 0 : S \to X$ appelés "pôle" et "zéro" et sont inversibles sur $\mathcal{O}_S$,
- *un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$.*

Pour $r \geq 1$ un entier, Cht^r [resp. ${}^r\mathrm{Cht}$] désigne le champ classifiant les chtoucas (à droite) [resp. à gauche] de rang r. Il est algébrique au sens de Deligne-Mumford. D'associer aux chtoucas leur pôle et leur zéro définit un morphisme

$$(\infty, 0) : \mathrm{Cht}^r \to X \times X \quad [\text{resp. } (\infty, 0) : {}^r\mathrm{Cht} \to X \times X]$$

qui est lisse de dimension relative $2r - 2$.

Définition I.2 (Drinfeld). – *Soit $N = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_N) \hookrightarrow X$ un niveau c'est-à-dire un sous-schéma fermé fini de X.*

Une structure de niveau N sur un chtouca $(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{E})$ de rang r sur un schéma S dont le pôle et le zéro évitent N consiste en un isomorphisme

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times S}} \mathcal{O}_{N\times S} \overset{u}{\underset{\sim}{\to}} \mathcal{O}_{N\times S}^r$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \arrow[r, "\sim"] \arrow[drr, "\sim"', "u"] & \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N & \mathcal{E}'' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \arrow[l, "\sim"'] & {}^\tau\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dl, "\sim"', "{}^\tau u"] \\
 & & \mathcal{O}_{N\times S}^r &
\end{tikzcd}$$

On note Cht_N^r le champ des chtoucas de rang r avec structures de niveau N. Il est muni d'un morphisme d'oubli des structures de niveau

$$\mathrm{Cht}_N^r \to \mathrm{Cht}^r \times_{X\times X} (X - N) \times (X - N)$$

qui est représentable fini étale galoisien de groupe de Galois $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$. Ainsi le morphisme de structure

$$(\infty, 0) : \mathrm{Cht}_N^r \to (X - N) \times (X - N)$$

est-il également lisse de dimension relative $2r - 2$.

b) Endomorphismes de Frobenius partiels

Sur la surface $X \times X$, on dispose des deux endomorphismes $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$. Le schéma intersection de tous les ouverts complémentaires des images réciproques de la diagonale par ces endomorphismes et leurs puissances est noté Λ.

Au-dessus de Λ, les champs Cht^r et Cht_N^r sont également munis chacun de deux endomorphismes dits "de Frobenius partiels" Frob_∞ et Frob_0 tels que

$$\mathrm{Frob}_\infty \circ \mathrm{Frob}_0 = \mathrm{Frob}_0 \circ \mathrm{Frob}_\infty = \mathrm{Frob}$$

et qui rendent commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \times_{X\times X} \mathrm{Cht}_N^r \arrow[r, "{\mathrm{Frob}_\infty, \mathrm{Frob}_0}"] \arrow[d] & \mathrm{Cht}_N^r \times_{X\times X} \Lambda \arrow[d] \\
\Lambda \times_{X\times X} \mathrm{Cht}^r \arrow[r, "{\mathrm{Frob}_\infty, \mathrm{Frob}_0}"] \arrow[d] & \mathrm{Cht}^r \times_{X\times X} \Lambda \arrow[d] \\
\Lambda \arrow[r, "{\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X, \mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X}"] & \Lambda
\end{tikzcd}$$

On renvoie par exemple au paragraphe I.1d de [Lafforgue, 1997] pour une définition des endomorphismes Frob_∞ et Frob_0. Précisons toutefois que dans toute la suite de cet article on ne se servira que de l'existence de telles paires d'endomorphismes vérifiant les propriétés ci-dessus (plus le fait qu'ils ne modifient pas les fibres génériques des chtoucas pour la démonstration des théorèmes de stabilité globale V.14(ii) et de stabilité locale V.18).

c) Correspondances de Hecke

On note $\mathbb{A} = \prod_{x \in |X|} F_x$ l'anneau des adèles du corps F des fonctions rationnelles sur la courbe X et $O_{\mathbb{A}} = \prod_{x \in |X|} O_x$ son sous-anneau des entiers.

Tout élément g d'un des $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ induit un fibré $\mathcal{E}^g$ de rang r sur X avec structures de niveaux arbitraires, et ce de manière compatible avec le produit tensoriel. Cela induit en particulier une action du groupe des idèles $\mathbb{A}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$

$$(g, \widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{E})) \mapsto \mathcal{E}^g \otimes \widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}^g \otimes \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^g \otimes \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}^g \otimes {}^\tau\mathcal{E})$$

sur le système projectif constitué de Cht^r et des Cht^r_N.

D'autre part, le groupe $\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) = \varprojlim_N \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ agit également sur les Cht^r_N.

Ces deux actions se prolongent par celle des "correspondances de Hecke".

On note $\mathcal{H}^r$ l'algèbre de Hecke des fonctions localement constantes à support compact sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ munies du produit de convolution pour la mesure de Haar dg qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $K = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$. Pour tout niveau $N = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_N) \hookrightarrow X$, on note $\mathcal{H}^r_N$ la sous-algèbre unitaire de $\mathcal{H}^r$ constituée des fonctions invariantes à gauche et à droite par le sous-groupe de congruence $K_N = \mathrm{Ker}[K \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)]$.

Soit donc f une fonction dans $\mathcal{H}^r_N$. Il existe un plus petit sous-ensemble fini T_f de $|X|$ contenant les points de N et tel que, pour toute place $x \notin T_f$, f contienne en facteur la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}_r(O_x)} = f_x^0$ de $\mathrm{GL}_r(O_x)$ dans $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

La fonction f s'écrit comme une combinaison linéaire finie

$$f = \sum_i \lambda_i \cdot \mathbb{1}_{K_N g_i K_N}$$

de fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{K_N g_i K_N}$ de doubles classes $K_N g_i K_N$ de $K_N \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) / K_N$. Les g_i qui apparaissent ici sont dans $\prod_{x \notin T_f} \mathrm{GL}_r(O_x) \times$

$\prod_{x \in T_f} \mathrm{GL}_r(F_x)$ donc, d'après la proposition 3 du paragraphe I.4c de [Lafforgue, 1997], ils définissent des champs $\Gamma_N^r(g_i)$ représentables finis sur $\mathrm{Cht}_N^r \times \mathrm{Cht}_N^r \times_{(X\times X)\times(X\times X)} (X - T_f) \times (X - T_f)$ (mais qui en général ne sont pas des sous-champs) dont les deux projections sur $\mathrm{Cht}_N^r \times_{X\times X} (X - T_f) \times (X - T_f)$ sont représentables, étales et finies. Ainsi, chaque $\Gamma_N^r(g_i)$ est une correspondance étale relative dans Cht_N^r au-dessus de $(X - T_f) \times (X - T_f)$.

On associe alors à la fonction f la somme formelle

$$\sum_i dg(K_N)\lambda_i \cdot \left[\Gamma_N^r(g_i)\right]$$

dans l'algèbre des classes de correspondances étales (au sens du paragraphe I.4c de [Lafforgue, 1997]) dans Cht_N^r au-dessus de $(X - T_f) \times (X - T_f)$.

D'après le théorème 5 du paragraphe I.4c de [Lafforgue, 1997], ceci définit un homomorphisme de l'algèbre unitaire $\mathcal{H}_N^r$ dans l'algèbre des classes de correspondances étales dans la fibre de Cht_N^r au-dessus du point générique de $X \times X$. Cette action de $\mathcal{H}_N^r$ commute avec celle des endomorphismes de Frobenius partiels Frob_∞ et Frob_0.

Dans toute la suite de cet article, la définition précise des correspondances de Hecke que rappellent par exemple les paragraphes I.1e et I.4c de [Lafforgue, 1997] n'interviendra qu'au travers des propriétés que nous venons de rappeler, du fait que les correspondances de Hecke ne modifient pas les fibres génériques des chtoucas et bien sûr des formules de comptage des points fixes rassemblées dans les théorèmes I.5 et I.7 ci-dessous.

d) Troncatures

Soit α un élément de $\mathbb{R}$.

On considère $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E})$ un point du champ Cht^r à valeurs dans le spectre S d'un corps algébriquement clos (contenant $\mathbb{F}_q$). Si $\alpha \notin [0, 1]$, on suppose que le pôle $\overline{\infty}$ et le zéro $\overline{0}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ dans $X(S)$ ne sont images l'un de l'autre par aucune puissance de Frob c'est-à-dire que $(\overline{\infty}, \overline{0}) \in \Lambda(S)$.

On appelle sous-objet $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ la donnée de deux sous-fibrés $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ de même rang et maximaux (au sens que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ sont sans torsion) et tels que j et t envoient $\mathcal{F}$ et ${}^\tau\mathcal{F} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$. A un tel sous-objet, on peut associer son rang

$$\mathrm{rg}\, \widetilde{\mathcal{F}} = \mathrm{rg}\, \mathcal{F} = \mathrm{rg}\, \mathcal{F}'$$

et aussi son degré d'indice α

$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} = (1 - \alpha) \deg \mathcal{F} + \alpha \ \deg \mathcal{F}'.$$

(Remarque : Par rapport à [Lafforgue, 1997], on change ici α en $1 - \alpha$.)

Si maintenant $0 = \widetilde{\mathcal{F}}_0 \subsetneq \widetilde{\mathcal{F}}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \widetilde{\mathcal{F}}_k = \widetilde{\mathcal{E}}$ est une filtration croissante de $\widetilde{\mathcal{E}}$ par des sous-objets, on peut lui associer son polygone qui est la fonction affine par morceaux

$$p : [0, r] \to \mathbb{R}\,,\ \text{avec } p(0) = p(r) = 0\,,$$

dont les seules ruptures de pente sont en les entiers rg $\widetilde{\mathcal{F}}_e$ et qui en ces entiers-là vaut

$$p(\mathrm{rg}\ \widetilde{\mathcal{F}}_e) = \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}}_e - \frac{\mathrm{rg}\ \widetilde{\mathcal{F}}_e}{r} \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}}\,,\ 0 \leq e \leq k\,.$$

On prouve que parmi tous les polygones attachés aux filtrations de $\widetilde{\mathcal{E}}$ il en est un plus grand que tous les autres. C'est le polygone canonique de Harder-Narasimhan $\overline{p}_\alpha^{\widetilde{\mathcal{E}}}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$. La filtration la moins fine qui le définit est appelée la filtration canonique de Harder-Narasimhan (d'indice α) de $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Nous rappelons (voir le théorème 8 du paragraphe II.2b de [Lafforgue, 1997]) :

Proposition I.3. – *Etant donné α un réel* [*resp. un réel dans* $[0, 1]$] *et $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone convexe de troncature, il existe dans le champ* $\mathrm{Cht}^r \times_{X \times X} \Lambda$ [*resp.* Cht^r] *un unique ouvert* $\mathrm{Cht}^{r, \overline{p}_\alpha \leq p}$ *tel qu'un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ de ce champ est dans l'ouvert* $\mathrm{Cht}^{r, \overline{p}_\alpha \leq p}$ *si et seulement si son polygone canonique $\overline{p}_\alpha^{\widetilde{\mathcal{E}}}$ est majoré par p.* □

Le champ Cht^r s'écrit comme une somme disjointe

$$\mathrm{Cht}^r = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Cht}^{r,d}$$

où les $\mathrm{Cht}^{r,d}$ classifient les chtoucas $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{E})$ de degré $\deg\ \mathcal{E} = d$.

Chaque $\mathrm{Cht}^{r,d}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et est localement de type fini puisque lisse sur $X \times X$ mais il n'est pas de type fini si $r \geq 2$. En revanche, les ouverts $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}_\alpha \leq p} = \mathrm{Cht}^{r,d} \cap \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}$ sont de type fini.

Le groupe $\mathbb{A}^\times$ agissant sur Cht^r stabilise chaque ouvert $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}$. Choisissant un idèle $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, on peut considérer le quotient

$$\mathrm{Cht}^r / a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{0 \leq d < r|\deg(a)|} \mathrm{Cht}^{r,d}$$

qui donc est réunion filtrante des ouverts de type fini

$$\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p} / a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{0 \leq d < r|\deg(a)|} \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}_\alpha \leq p}\,.$$

Pour $N = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_N) \hookrightarrow X$ un niveau, on notera Cht_N^r, $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}$ et $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}_\alpha \leq p}$ les images réciproques par le morphisme d'oubli des structures de niveau $\mathrm{Cht}_N^r \to \mathrm{Cht}^r$ des ouverts $\mathrm{Cht}^{r,d}$, $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}$ et $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}_\alpha \leq p}$.

Sur $\mathrm{Cht}^r/a^{\mathbb{Z}}$ et les $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$, il y a bien sûr une action de $\mathbb{A}^\times/a^{\mathbb{Z}}$, de $\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$ et des endomorphismes de Frobenius partiels Frob_∞ et Frob_0.

Et pour $N \hookrightarrow X$ un niveau, il y a une action par correspondances étales dans la fibre de $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus du point générique de $X \times X$ de l'algèbre $\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ quotient de $\mathcal{H}_N^r$ par $a^{\mathbb{Z}}$ (laquelle s'identifie à l'algèbre des fonctions à support compact sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ invariantes des deux côtés par K_N).

Cependant, les ouverts de type fini $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ ne sont pas stabilisés par Frob_∞ ou Frob_0 et un $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ n'est stabilisé par la correspondance de Hecke associée à une fonction $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ que si celle-ci est supportée par $\mathbb{A}^\times \cdot K$.

e) Nombres de Lefschetz

Considérons f une fonction dans $\mathcal{H}_N^r$, ∞ et 0 deux places distinctes en dehors de T_f, $\overline{\infty}$ et $\overline{0}$ deux points géométriques dans $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus de ∞ et 0, et $s', u' \geq 1$ deux entiers. On écrit à nouveau

$$f = \sum_i \lambda_i \cdot \mathbb{1}_{K_N g_i K_N}.$$

Les puissances $\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'}$ et $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}$ stabilisent la fibre de $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $(\overline{\infty}, \overline{0})$ et on peut considérer dans cette fibre les correspondances composées

$$\Gamma_N^r(g_i) \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}.$$

Elles coupent transversalement la diagonale, c'est-à-dire que leurs produits fibrés avec celle-ci sont étales sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ et finis sur $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X \times X} (\overline{\infty}, \overline{0})$. Ils deviennent finis absolument si on les restreint aux ouverts de type fini

$$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}/a^{\mathbb{Z}}$$

et, comptant chaque point fixe avec sa multiplicité égale à l'inverse du nombre fini de ses automorphismes, on peut alors introduire leurs cardinaux notés

$$\mathrm{Lef}_{\overline{\infty},\overline{0}}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}\left(g_i \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}\right).$$

Puis on pose

$$\begin{aligned}&\mathrm{Lef}_{\overline{\infty},\overline{0}}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}\left(f \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}\right)\\ &= \sum_i dg(K_N)\lambda_i \cdot \mathrm{Lef}_{\overline{\infty},\overline{0}}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}\left(g_i \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}\right).\end{aligned}$$

2) Comptage des points fixes et expression spectrale

a) Variantes des traces tronquées d'Arthur

On fixe un niveau N.

On considère f une fonction dans $\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ et $\infty, 0$ deux places distinctes dans $|X| - T_f$. Par définition de T_f, la fonction f se factorise en $f = f^{\infty,0} \otimes f_\infty^0 \otimes f_0^0$ où f_∞^0 et f_0^0 désignent les fonctions caractéristiques de $\mathrm{GL}_r(O_\infty)$ et $\mathrm{GL}_r(O_0)$ dans $\mathrm{GL}_r(F_\infty)$ et $\mathrm{GL}_r(F_0)$.

Etant donnés encore $s', u' \geq 1$ deux entiers, on introduit la fonction $f_{s',u'} = f^{\infty,0} \otimes f_\infty^{-s'} \otimes f_0^{u'}$ où $f_\infty^{-s'}$ et $f_0^{u'}$ sont les fonctions sphériques de Drinfeld de niveaux $-s'$ et u' en ∞ et 0 (voir par exemple la définition 7 du paragraphe III.6c de [Lafforgue, 1997] ou bien le corollaire I.8 du paragraphe 2d ci-dessous qui peut être considéré comme une définition équivalente).

On dispose des traces tronquées d'Arthur

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}(f_{s',u'}) = \mathrm{Tr}^{\leq p}\left(f^{\infty,0} \otimes f_\infty^{-s'} \otimes f_0^{u'}\right)$$

pour $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone convexe de troncature.

Nous allons rappeler comment elles sont définies. On note $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques standards de $\mathrm{GL}_r = G$ et, pour $P \in \mathcal{P}_0$, on note N_P son radical unipotent, M_P son sous-groupe de Lévi, $|P|$ le nombre de facteurs de M_P et dn_P la mesure de Haar sur $N_P(\mathbb{A})$ qui attribue le volume 1 à $N_P(O_{\mathbb{A}})$.

Pour tout $P \in \mathcal{P}_0$, on considère l'opérateur de convolution à droite par $f_{s',u'}$ dans l'espace des fonctions localement intégrables sur $M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$. Cet opérateur admet le noyau

$$K_{f_{s',u'},P} : (g, g') \mapsto \sum_{\gamma \in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot f_{s',u'}(g'^{-1}\gamma n_P g).$$

D'autre part, on a une application naturelle

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to N_P(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) \xrightarrow{\sim} M_P(\mathbb{A})/M_P(O_{\mathbb{A}}) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}^{|P|}$$

et on note $g \mapsto \mathbb{1}(p_P^g >_P p)$ la fonction caractéristique du sous-ensemble des $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})$ dont l'image $(d_1, \ldots, d_{|P|})$ dans $\mathbb{Z}^{|P|}$ vérifie

$$d_1+\cdots+d_j - \frac{r_1 + \cdots + r_j}{r}(d_1+\cdots+d_{|P|}) > p(r_1+\cdots+r_j)\,,\ 1 \leq j < |P|$$

(si $r_1, \ldots, r_{|P|}$ désignent les rangs des facteurs de M_P).

Les traces tronquées d'Arthur sont les intégrales convergentes

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}(f_{s',u'}) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \sum_{P \in \mathcal{P}_0} (-1)^{|P|-1} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}\left(p_P^{\delta g} >_P p\right) K_{f_{s',u'},P}(\delta g, \delta g).$$

Or notre fonction $f_{s',u'}$ contient en facteur la fonction sphérique de Drinfeld $f_\infty^{-s'}$ (ainsi que $f_0^{u'}$). Ceci va nous permettre de définir des variantes $\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(f_{s',u'})$ de $\mathrm{Tr}^{\leq p}(f_{s',u'})$ indexées par les $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord, en toute place $x \in |X|$, les fonctions sphériques de Drinfeld f_x^t ($t \in \mathbb{Z} - \{0\}$) et les fonctions caractéristiques f_x^0 de $\mathrm{GL}_r(O_x)$ dans $\mathrm{GL}_r(F_x)$ en les différents rangs r sont reliées de la façon suivante :

Proposition I.4. *– Etant donnés $P \in \mathcal{P}_0$ un sous-groupe parabolique standard de $\mathrm{GL}_r = G$ et $x \in |X|$ une place de F, munissons $N_P(F_x)$ de la mesure de Haar dn_x qui attribue le volume 1 à $N_P(O_x)$ et notons ρ_P la racine carrée du caractère modulaire de $N_P(F_x)$.*

Alors pour tout $t \in \mathbb{Z} - \{0\}$ et tout $(m^1, \dots, m^{|P|}) \in M_P(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{r_{|P|}}(\mathbb{A})$, on a

$$\rho_P(m^1, \dots, m^{|P|}) \int_{N_P(F_x)} f_x^t\big((m^1, \dots, m^{|P|})n_x\big) \cdot dn_x$$
$$= \sum_{1\leq i\leq |P|} q^{\deg(x)\frac{r-r_i}{2}|t|} f_x^t(m^i) \prod_{j\neq i} f_x^0(m^j).$$

Démonstration : Voir [Laumon, 1996] volume I, proposition 4.2.5. □

En appliquant cette proposition au facteur $f_\infty^{-s'}$ de $f_{s',u'}$, on détermine pour tout $P \in \mathcal{P}_0$ une décomposition du noyau $K_{f_{s',u'},P}$ en une somme

$$K_{f_{s',u'},P} = \sum_{1\leq i\leq |P|} K^i_{f_{s',u'},P}\ .$$

D'autre part, si $P \in \mathcal{P}_0$ est un sous-groupe parabolique standard de $\mathrm{GL}_r = G$ et $\underline{r} = (r_1, \dots, r_k)$, $r_1 + \cdots + r_k = r$, est la suite des rangs des facteurs de M_P, on introduit pour tout indice i, $1 \leq i \leq k$, le polygone $p_P^i = p_{\underline{r}}^i : [0, r] \to \mathbb{R}$ qui est affine sur chaque intervalle $[r_1 + \cdots + r_{j-1}, r_1 + \cdots + r_j]$ et vérifie

$$p_P^i(r_1 + \cdots + r_j) = \begin{cases} -\frac{r_1+\cdots+r_j}{r} & \text{si } 0 \leq j < i\ , \\ 1 - \frac{r_1+\cdots+r_j}{r} & \text{si } i \leq j \leq k\ . \end{cases}$$

Ceci étant posé, on définit pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les variantes suivantes des traces tronquées d'Arthur

$$\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(f_{s',u'}) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{P\in\mathcal{P}_0} (-1)^{|P|-1} \sum_{1\leq i\leq |P|} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}$$
$$\mathbb{1}\big(p_P^{\delta g} >_P p - \alpha p_P^i\big) K^i_{f_{s',u'},P}(\delta g, \delta g).$$

(Remarque : Par rapport à [Lafforgue, 1997], on a changé ici p_P^i en $\frac{1}{r} p_P^i$ ou, ce qui revient au même, α en $\frac{\alpha}{r}$.)

Il est évident sur la définition que $\mathrm{Tr}_0^{\leq p}(f_{s',u'}) = \mathrm{Tr}^{\leq p}(f_{s',u'})$ et d'après [Lafforgue, 1997, paragraphe VI.2f, théorème 11], on sait que la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(f_{s',u'})$ est en escalier et périodique de période $r!r$ (et même en fait $r!$).

b) Egalité en moyenne sur les $\alpha \in \mathbb{R}$

On rappelle que, parlant d'un polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}$, l'expression "si p est assez convexe" signifie "si toutes les différences de pentes $[p(r') - p(r'-1)] - [p(r'+1) - p(r')]$, $1 \leq r' < r$, sont supérieures à un nombre réel assez grand".

Nous pouvons maintenant reproduire le résultat central de [Lafforgue, 1997] (c'est le théorème 1 du paragraphe V.2a) :

Théorème I.5. – *Soient $N \hookrightarrow X$ un niveau, $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ une fonction, ∞ et 0 deux places distinctes dans $|X| - T_f$ avec donc $f = f^{\infty,0} \otimes f_\infty^0 \otimes f_0^0$ et $u', s' \geq 1$ deux entiers.*

On suppose que $\deg(0)$ *et* $\deg(\infty)$ *sont assez grands en fonction du support de f et de $t =$ $\deg(0)u' - \deg(\infty)s'$ (cette condition étant vide si f est supportée par $\mathbb{A}^\times \cdot \mathrm{GL}_r(O_\mathbb{A})$ et si $t = 0$).*

Enfin, soit $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone de troncature assez convexe en fonction de N et du support de f.

Alors, pour $\overline{\infty}$ et $\overline{0}$ deux points de $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus de ∞ et 0, la fonction sur $\mathbb{R}$

$$\alpha \mapsto \mathrm{Lef}_{\overline{\infty},\overline{0}}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}\left(f \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}\right)$$

est en escalier et périodique (de période le p.g.c.d de $\deg(\infty)$ *et* $\deg(0)$*) et sa moyenne est égale à celle de la fonction également en escalier et périodique*

$$\alpha \mapsto \mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}\left(f^{\infty,0} \otimes f_\infty^{-s'} \otimes f_0^{u'}\right).$$

□

c) Egalité en moyenne sur les $\overline{\infty}$ ou les $\overline{0}$

On s'aperçoit qu'on peut remplacer la moyenne sur les $\alpha \in \mathbb{R}$ par une moyenne sur les $\overline{\infty}$ (ou les $\overline{0}$) au-dessus de la place ∞ (ou 0) fixée. Nous aurons besoin dans la suite de cette adaptation.

On commence par :

Lemme I.6. – *Soient un niveau $N \hookrightarrow X$, une fonction $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$, deux points $\overline{\infty}, \overline{0} \in X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus de deux places distinctes $\infty, 0 \in |X| - T_f$ et deux entiers $s', u' \geq 1$.*

Alors pour tout polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *les suites*

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto \mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\mathrm{Frob}^n(\overline{\infty}),\overline{0}} \left(f \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)s'}\right)$$
$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto \mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\overline{\infty},\mathrm{Frob}^n(\overline{0})} \left(f \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)s'}\right)$$

sont périodiques de période le p.g.c.d de $\deg(\infty)$, $\deg(0)$ *et* $r!$.

Démonstration : Ces deux suites se déduisent l'une de l'autre par le changement de variables $n \mapsto -n$. La première est périodique de période $\deg(\infty)$ et la seconde de période $\deg(0)$ car $\mathrm{Frob}^{\deg(\infty)}(\overline{\infty}) = \overline{\infty}$ et $\mathrm{Frob}^{\deg(0)}(\overline{0}) = \overline{0}$. Il reste seulement à prouver que $r!$ est aussi une période.

On se reporte pour cela à la formule intégrale pour le nombre des points fixes qui est énoncée dans la proposition 2 du paragraphe III.6b de [Lafforgue, 1997]. Bien sûr, les domaines d'intégration sont limités aux $(m_{\tilde{\infty}}, g_\infty^{\tilde{\infty}}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde{0}}, m_{\tilde{0}})$ dont le polygone α-canonique est majoré par p. Le sens de ces conditions est explicité dans le lemme 1(vi)(vii) du même paragraphe III.6b. On voit d'après cela qu'il suffit de montrer que $r!$ appartient à l'image de l'homomorphisme de degré

$$\mathrm{End}(E')^\times_{\gamma'}(\mathbb{A}^{\infty,0}) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

pour tout élément $(u' \deg(0), s' \deg(\infty))$-admissible $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ dans $\mathrm{GL}_r(F)$. Or, étant donné un tel élément $\gamma = (\gamma', \gamma'')$, $F' = F[\gamma']$ est un corps extension de F de degré $\leq r$, le corps des constantes de F' est une extension de $\mathbb{F}_q$ de degré $h \leq r$ et l'image de l'homomorphisme deg ci-dessus est $h\mathbb{Z}$. D'où la conclusion. □

On a la variante suivante du théorème I.5 :

Théorème I.7. *– Soient un niveau* $N \hookrightarrow X$, *une fonction* $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$, *deux points* $\overline{\infty}, \overline{0} \in X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ *au-dessus de deux places distinctes* $\infty, 0 \in |X| - T_f$ *et deux entiers* $s', u' \geq 1$.

On suppose que $\deg(0)$ *et* $\deg(\infty)$ *sont assez grands en fonction du support de* f *et de* $t = \deg(0)u' - \deg(\infty)s'$ *(cette condition étant vide si* f *est supportée par* $\mathbb{A}^\times \cdot \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$ *et si* $t = 0$*).*

Enfin, soient $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ *un polygone de troncature assez convexe en fonction de* N *et du support de* f *et* α *un nombre réel.*

Alors les deux suites périodiques

$$n \mapsto \mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\mathrm{Frob}^n(\overline{\infty}),\overline{0}} \left(f \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}\right)$$
$$n \mapsto \mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\overline{\infty},\mathrm{Frob}^n(\overline{0})} \left(f \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}\right)$$

ont la même moyenne que la suite également périodique

$$n \mapsto \mathrm{Tr}^{\leq p}_{\alpha+n}\left(f^{\infty,0} \otimes f_\infty^{-s'} \otimes f_0^{u'}\right).$$

Démonstration : Il faut reprendre la démonstration du théorème I.5 telle qu'elle est exposée dans [Lafforgue, 1997]. Il n'y a à changer qu'une partie du paragraphe V.2d, pages 243 à 247. L'argument est essentiellement le même :

On voit apparaître des expressions de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\cap I}\int_{H(\mathbb{A})} dh\cdot\varphi(h)\mathbb{1}(\deg(h)=n)$$

avec H un sous-groupe de GL_r, φ une fonction sur $H(\mathbb{A})$ muni d'une mesure de Haar dh, $h\mapsto \mathbb{1}(\deg(h)=n)$ les fonctions caractéristiques des ensembles d'éléments de $H(\mathbb{A})$ de degré $n\in\mathbb{Z}$ et I un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Or, de la suite

$$n\mapsto\int_{H(\mathbb{A})} dh\cdot\varphi(h)\mathbb{1}(\deg(h)=n)$$

qui est périodique de période $r!$, on ne connaît que la valeur moyenne.

Cependant, de remplacer $\overline{\infty}$ par $\mathrm{Frob}(\overline{\infty})$ ou $\overline{0}$ par $\mathrm{Frob}(\overline{0})$ ou encore α par $\alpha+1$ a toujours pour effet de translater I par 1 ou -1. Cela permet de terminer le calcul de la même façon, qu'on fasse une moyenne sur les $\overline{\infty}$, sur les $\overline{0}$ ou sur les α. □

d) Valeurs propres de Hecke

Etant donnée $x\in|X|$ une place de F, on note $\mathcal{H}_x^r$ l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact sur $\mathrm{GL}_r(F_x)=G(F_x)$ pour la mesure de Haar dg_x qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $\mathrm{GL}_r(O_x)=K_x$.

D'après Satake et notant toujours f_x^0 la fonction caractéristique de K_x dans $\mathrm{GL}_r(F_x)$, la sous-algèbre $f_x^0\mathcal{H}_x^r f_x^0$ de $\mathcal{H}_x^r$ constituée des fonctions invariantes à gauche et à droite par K_x est commutative et elle est canoniquement isomorphe à l'algèbre de polynômes symétriques

$$\mathbb{C}\big[Z_1,Z_1^{-1},\ldots,Z_r,Z_r^{-1}\big]^{\mathfrak{S}_r}.$$

On a comme conséquence de la proposition I.4 :

Corollaire I.8. – *Pour tout $t\in\mathbb{Z}-\{0\}$, la fonction sphérique de Drinfeld $f_x^t\in f_x^0\mathcal{H}_x^r f_x^0$ de niveau t correspond, via l'isomorphisme de Satake, au polynôme symétrique*

$$q^{\deg(x)\frac{r-1}{2}|t|}\big(Z_1^t+\cdots+Z_r^t\big).$$

Démonstration : Voir [Laumon, 1996] volume I, corollaire 4.2.6. □

Si π_x est une représentation admissible irréductible de $\mathcal{H}_x^r$ qui est non ramifiée c'est-à-dire telle que $\pi_x \cdot f_x^0 \neq 0$, alors le module $\pi_x \cdot f_x^0$ sur l'algèbre commutative $f_x^0 \mathcal{H}_x^r f_x^0$ est lui-même irréductible donc de dimension 1 et il existe r nombres complexes $z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$, bien déterminés à permutation près, tels que, pour tout $t \in \mathbb{Z} - \{0\}$, l'action de f_x^t sur π_x soit égale à la multiplication par $q^{\deg(x)\frac{r-1}{2}|t|}(z_1(\pi_x)^t + \cdots + z_r(\pi_x)^t)$. Ces nombres sont appelés les "valeurs propres de Hecke" de la représentation non ramifiée π_x.

Bien sûr, si π_x est ramifiée c'est-à-dire si $\pi_x \cdot f_x^0 = 0$, les actions sur π_x des fonctions sphériques et en particulier des f_x^t sont nulles.

e) La formule des traces d'Arthur-Selberg

En combinant la proposition I.4 et le corollaire I.8 ci-dessus avec le théorème 12' du paragraphe VI.2f de [Lafforgue, 1997], on obtient :

Théorème I.9. – *Etant donnés une fonction $f \in \mathcal{H}^r/a^{\mathbb{Z}}$, deux places distinctes $\infty, 0 \in |X| - T_f$ et deux entiers $s', u' \geq 1$, on a pour tout polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ et tout réel α*

$$\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}\left(f^{\infty,0} \otimes f_\infty^{-s'} \otimes f_0^{u'}\right) = \sum_{(P,\pi,\sigma,\lambda_\pi)} \frac{1}{|\operatorname{Fixe}(P,\pi,\sigma,\lambda_\pi)|}\frac{1}{|\sigma|}$$
$$q^{\deg(0)\frac{r-1}{2}u'} q^{\deg(\infty)\frac{r-1}{2}s'} \sum_{1\leq i,j\leq |P|} \left(z_1\left(\pi_\infty^i\right)^{-s'} + \cdots + z_r\left(\pi_\infty^i\right)^{-s'}\right)$$
$$\left(z_1\left(\pi_0^j\right)^{u'} + \cdots + z_r\left(\pi_0^j\right)^{u'}\right) \mathrm{tr}_\alpha^{\leq p}\left(f_{s',u'}^{i,j}\right)_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}$$

où

$$\mathrm{tr}_\alpha^{\leq p}\left(f_{s',u'}^{i,j}\right)_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi} = \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma \cdot \sum_{\lambda_\pi^\sigma} \frac{\left(\left(\lambda_\pi^\sigma\right)^j \left(\lambda_\sigma\right)^{j_\sigma}\right)^{\deg(0)u'}}{\left(\left(\lambda_\pi^\sigma\right)^i \left(\lambda_\sigma\right)^{i_\sigma}\right)^{\deg(\infty)s'}}$$
$$\lim_{\substack{\mu_\sigma \mapsto 1\\ \mu_\sigma \in \Lambda_{P_\sigma}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}}\left(\mu_\sigma \sigma\left(\lambda_\pi^\sigma\right)/\lambda_\pi^\sigma \sigma(\lambda_\pi)\right)$$
$$\mathrm{Tr}_{L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}\left[\left(M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}\left(\cdot, \lambda_\pi^\sigma \lambda_\sigma\right)\tau\sigma(\lambda_\pi)\right)^{-1}\right.$$
$$\left.\circ\, M_{P,\tau}^{\tau(P)}\left(\cdot, \lambda_\pi^\sigma \lambda_\sigma/\mu_\sigma\right) \circ f\left(\cdot, \lambda_\pi^\sigma \lambda_\sigma/\mu_\sigma\right)\right].$$

Commentaire : Les notations sont les mêmes que dans [Lafforgue, 1997]. En particulier, les $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ sont des bons "quadruplets discrets" constitués de

- une "paire discrète" (P, π) c'est-à-dire un sous-groupe parabolique standard P de GL_r et une représentation automorphe discrète $\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^{|P|})$ de $M_P(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{r_{|P|}}(\mathbb{A})$,

- un fixateur (σ, λ_π) de (P, π) c'est-à-dire une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{|P|}$ de $\{1, 2, \ldots, |P|\}$ et un caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$ vérifiant $\sigma(\pi \otimes \lambda_P) = \pi$.

N'apparaissent que les (P, π) dont les facteurs $\pi^1, \ldots, \pi^{|P|}$ sont non ramifiés en dehors de T_f, si bien que les valeurs propres de Hecke $z_1(\pi_\infty^i)$, $\ldots, z_{r_i}(\pi_\infty^i)$ et $z_1(\pi_0^j), \ldots, z_{r_j}(\pi_0^j)$ des composantes π_∞^i et π_0^j des facteurs π^i et π^j en ∞ et 0 sont bien définies.

Enfin, il a fallu rajouter dans la formule un facteur $\frac{1}{|\sigma|}$ (où $|\sigma|$ désigne le produit des cardinaux des orbites de la permutation σ) qui manquait dans les énoncés des théorèmes 11, 12 et 12' du paragraphe VI.2f de [Lafforgue, 1997] : la faute se situe dans la démonstration du théorème 11 à partir du lemme 9 du paragraphe VI.2e où on procède à un changement de variables d'intégration qui induit en vérité ce facteur $\frac{1}{|\sigma|}$. (Mais cela n'a pas d'importance pour la suite du livre). $\square$

f) Forme des résidus

Nous allons préciser la forme des termes $\mathrm{tr}_\alpha^{\leq p}(f_{s',u'}^{i,j})_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}$ qui apparaissent dans l'expression du théorème I.9.

Proposition I.10. – *Fixons une fonction $f \in \mathcal{H}^r/a^{\mathbb{Z}}$, un entier $t \in \mathbb{Z}$, un polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}$, un réel α, un bon quadruplet discret $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ et deux indices $i, j \in \{1, 2, \ldots, |P|\}$.*

Alors il existe un ensemble fini de constantes c_ι, d'entiers $m_\iota \geq 0$ et de scalaires λ_ι tels que pour toutes places distinctes $\infty, 0 \in |X| - T_f$ et tous entiers $s', u' \geq 1$ vérifiant $\deg(0)u' - \deg(\infty)s' = t$, on ait

$$\mathrm{tr}_\alpha^{\leq p}\left(f_{s',u'}^{i,j}\right)_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi} = \sum_\iota c_\iota(\deg(\infty)s')^{m_\iota}\lambda_\iota^{\deg(\infty)s'}$$

dès lors que $\deg(\infty)s'$ ou $\deg(0)u'$ est assez grand en fonction de t et du support de f.

Démonstration : Si $i_\sigma = j_\sigma$, c'est immédiat. Dans le cas contraire, nous allons déplacer le contour d'intégration $\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}$ dans l'opérateur $\displaystyle\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma\cdot$ de façon à faire tendre le quotient $(\lambda_\sigma)^{j_\sigma}/(\lambda_\sigma)^{i_\sigma}$ vers 0.

On sait que la fonction sur Λ_{P_σ}

$$\lambda_\sigma \mapsto R(\lambda_\sigma) = \lim_{\substack{\mu_\sigma \mapsto 1 \\ \mu_\sigma \in \Lambda_{P_\sigma}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}}\left(\mu_\sigma\sigma\left(\lambda_\pi^\sigma\right)/\lambda_\pi^\sigma\sigma\left(\lambda_\pi\right)\right)$$

$$\mathrm{Tr}_{L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}\left[\left(M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}\left(\cdot, \lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma\right)\tau\sigma(\lambda_\pi)\right)^{-1} \circ M_{P,\tau}^{\tau(P)}\left(\cdot, \lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma\right) \circ f\left(\cdot, \lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma\right)\right]$$

est une fraction rationnelle dont les pôles sont supportés par des hyperplans de la forme

$$\lambda_\sigma^k / \lambda_\sigma^\ell = \lambda \text{ avec } k, \ell \in \{1, \ldots, |P_\sigma|\} \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}^\times .$$

Si $\deg(\infty)s'$ ou $\deg(0)u'$ est assez grand, les résidus à l'infini s'annulent et il ne reste plus que les résidus à distance finie lesquels sont de la forme

$$\operatorname*{Res}_{\frac{(\lambda_\sigma)^{k_{|P_\sigma|-1}}}{(\lambda_\sigma)^{\ell_{|P_\sigma|-1}}} = \lambda_{k_{|P_\sigma|-1}}} \cdots \operatorname*{Res}_{\frac{(\lambda_\sigma)^{k_1}}{(\lambda_\sigma)^{\ell_1}} = \lambda_1} \left[\frac{\left(\left(\lambda_\pi^\sigma\right)^j (\lambda_\sigma)^{j_\sigma} \right)^{\deg(0)u'}}{\left(\left(\lambda_\pi^\sigma\right)^i (\lambda_\sigma)^{i_\sigma} \right)^{\deg(\infty)s'}} R(\lambda_\sigma) \right]$$

où les notations "Res" désignent les opérateurs de résidus le long d'hyperplans $\frac{(\lambda_\sigma)^{k_e}}{(\lambda_\sigma)^{\ell_e}} = \lambda_e$, $1 \leq e < |P_\sigma|$, qui se coupent proprement dans Λ_{P_σ} (autrement dit, tels que les couples (k_e, ℓ_e), $1 \leq e < |P_\sigma|$, fassent de l'ensemble d'indices $\{1, 2, \ldots, |P_\sigma|\}$ un arbre connexe).

La proposition résulte alors du lemme suivant appliqué $|P_\sigma| - 1$ fois :

Lemme I.11. – *Soient K un corps, $R(z)$ une fraction rationnelle à coefficients dans K et $z_0 \in K^\times$ un pôle non nul d'ordre $m_0 \geq 1$ de R. Alors la suite*

$$m_0 \leq n \mapsto \operatorname*{Res}_{z=z_0} R(z) z^n dz$$

est une combinaison linéaire des suites

$$m_0 \leq n \mapsto n^m z_0^n \,, \; 0 \leq m < m_0 \,.$$

Démonstration : Il suffit d'écrire $z^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (z - z_0)^k z_0^{n-k}$ et de remarquer que la forme $R(z)(z - z_0)^k dz$ n'a pas de pôle en z_0 et donc pas de résidu si $k \geq m_0$. □

g) Allure des nombres de Lefschetz

On rappelle le résultat suivant :

Théorème I.12. – *Pour toute représentation automorphe discrète π d'un groupe linéaire adélique $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, $n \geq 1$, il existe des représentations automorphes cuspidales $\pi^1, \ldots, \pi^k$ de groupes linéaires $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{A}), \ldots, \mathrm{GL}_{n_k}(\mathbb{A})$ avec $n_1 + \cdots + n_k = n$ telles que, en toute place $x \in |X|$ où π est non ramifiée, les $\pi^1, \ldots, \pi^k$ sont elles-mêmes non ramifiées et la famille des valeurs propres de Hecke*

$$z_1(\pi_x), \ldots, z_n(\pi_x)$$

est la réunion disjointe sur les i, $1 \leq i \leq k$, des familles de valeurs propres de Hecke

$$z_1\left(\pi_x^i\right), \ldots, z_{n_i}\left(\pi_x^i\right).$$

Démonstration : C'est une forme faible de la construction générale due à Langlands des spectres discrets par résidus. On renvoie par exemple au théorème VI.2.2 de [Moeglin et Waldspurger, 1994].

Dans leur article aux Annales de l'E.N.S., Moeglin et Waldspurger ont complètement déterminé le spectre discret des groupes GL_n, mais le résultat moins précis ci-dessus nous suffira. □

En combinant ce théorème avec le théorème I.7, le théorème I.9 et la proposition I.10, on obtient :

Théorème I.13. – *Fixons un niveau $N \hookrightarrow X$, une fonction $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ et un entier $t \in \mathbb{Z}$.*

Notons $\{\pi\}_N^r$ l'ensemble fini des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})$ qui apparaissent dans la décomposition spectrale de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N \cdot a^{\mathbb{Z}})$.

Soit $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone de troncature assez convexe en fonction de N et du support de f et soit α un nombre réel.

Alors il existe un ensemble fini de constantes c_ι, d'entiers $m_\iota \geq 0$, de scalaires λ_ι et de représentations automorphes cuspidales π^ι et π'^ι de groupes linéaires adéliques $\mathrm{GL}_{r_\iota}(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_{r'_\iota}(\mathbb{A})$ de rangs $r_\iota, r'_\iota < r$ tels qu'on ait la formule suivante :

Pour tous points $\overline{\infty}, \overline{0} \in X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus de deux places distinctes $\infty, 0 \in |X| - T_f$ et pour tous entiers $s', u' \geq 1$ vérifiant $\deg(0)u' - \deg(\infty)s' = t$, la moyenne de chacune des deux suites périodiques

$$n \mapsto \mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\mathrm{Frob}^n(\overline{\infty}),\overline{0}}\left(f \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}\right)$$
$$n \mapsto \mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\overline{\infty},\mathrm{Frob}^n(\overline{0})}\left(f \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'}\right)$$

est égale à

$$\sum_{\pi \in \{\pi\}_N^r} \mathrm{Tr}_\pi(f) q^{\deg(0)\frac{r-1}{2}u'} q^{\deg(\infty)\frac{r-1}{2}s'} \left(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}\right)$$
$$\left(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}\right)$$
$$+ \sum_\iota c_\iota (\deg(\infty)s')^{m_\iota} \lambda_\iota^{\deg(\infty)s'} \left(z_1\left(\pi'^\iota_\infty\right)^{-s'} + \cdots + z_{r'_\iota}\left(\pi'^\iota_\infty\right)^{-s'}\right)$$
$$\left(z_1\left(\pi^\iota_0\right)^{u'} + \cdots + z_{r_\iota}\left(\pi^\iota_0\right)^{u'}\right)$$

dès lors que $\deg(\infty)$ *et* $\deg(0)$ *sont assez grands (condition qui est vide si f est supportée par $\mathbb{A}^\times \cdot \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$ et si $t = 0$) et que* $\deg(\infty)s'$ *ou* $\deg(0)u'$ *est assez grand en fonction du support de f et de t.*

Remarque : La démonstration de la proposition I.10 un peu plus haut est semblable à celle du lemme 11 du paragraphe VI.3f de [Lafforgue, 1997]. Cela signifie en particulier que dans l'énoncé dudit lemme 11 on a oublié d'éventuelles puissances de $u = \deg(\infty)s'$ apparaissant en facteurs des exponentielles λ^u. Mais la suite du livre reste valable car, quand on fait la somme sur tous les bons quadruplets discrets à la page 325 (ou comme dans le théorème I.13 ci-dessus) et qu'on identifie le résultat obtenu à une trace en cohomologie, on voit que nécessairement tous les termes où apparaissent des puissances positives de $\deg(\infty)s'$ se simplifient les uns les autres. D'ailleurs, nous nous servirons plus loin de cet argument.

Notons aussi que lorsque $N = \emptyset$ c'est-à-dire qu'il n'y a pas de niveau, on peut montrer que dans l'énoncé de la proposition I.10 et donc du théorème I.13 tous les entiers m_ι valent 0 : on se sert de ce que les opérateurs d'entrelacement de Langlands attachés à des représentations partout non ramifiées sont scalaires si bien qu'on peut leur appliquer la "combinatoire des (G, M)-familles" d'Arthur.

Signalons d'autre part que dans la suite nous n'utiliserons le théorème I.13 ci-dessus qu'avec $t = 0$ et $\alpha = 0$ (avec la notation $\overline{p} = \overline{p}_0$). $\square$

Chapitre II

Compléments quand le niveau comprend le zéro

Dans le livre [Lafforgue, 1997] et comme rappelé au chapitre I, nous avons compté les chtoucas munis d'une structure de niveau N en dehors de leur pôle et de leur zéro. Mais nous verrons au chapitre III que lorsqu'on compactifie les champs $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$, on fait apparaître au bord des strates qui classifient des familles de chtoucas de rangs $< r$, munis de structures de niveau N et dont les pôles et zéros peuvent rencontrer N. Afin d'étudier la cohomologie de ces strates on est donc amené à compter aussi les chtoucas munis d'une structure de niveau N et dont le zéro (ou le pôle) est contenu dans N. C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre, après avoir défini une première notion de structure de niveau (naïve) en le zéro (ou le pôle) d'un chtouca.

1) Chtoucas avec structures de niveau en le zéro

a) Restriction des chtoucas à un niveau

On fixe toujours une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini de base $\mathbb{F}_q$ et $r \geq 1$ un entier.

On fixe aussi un niveau c'est-à-dire un sous-schéma fermé fini $N = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_N) \hookrightarrow X$ de la courbe X.

On note $\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{r,N}$ [resp. ${}^r\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{N}$] le champ algébrique (au sens d'Artin) qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde des diagrammes

$$\mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{F}' \xleftarrow{t} {}^{\tau}\mathcal{F}$$

$$\left[\text{resp.} \quad \mathcal{F} \xleftarrow{t} \mathcal{F}' \xrightarrow{j} {}^{\tau}\mathcal{F}\right]$$

où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules localement libres de rang r, ${}^{\tau}\mathcal{F}$ désigne $(\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F}$ et j, t sont deux homomorphismes dont les conoyaux admettent localement sur S un générateur comme $\mathcal{O}_S$-Modules.

En associant à tout chtouca à droite $(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow {}^{\tau}\mathcal{E})$ [resp. à gauche $(\mathcal{E} \hookleftarrow \mathcal{E}' \hookrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E})$] de rang r sur un schéma S le diagramme

$$\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N \to \mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N \leftarrow {}^{\tau}\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N$$

$$\left[\text{resp.} \quad \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N \leftarrow \mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N \to {}^{\tau}\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N\right],$$

on définit un morphisme de champs algébriques

$$\mathrm{Cht}^r \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N} \overline{\mathfrak{C}}^{r,N}_{\emptyset}$$

$$\left[\text{resp.} \quad {}^r\mathrm{Cht} \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N} {}^r\overline{\mathfrak{C}}^{N}_{\emptyset}\right]$$

qu'on appellera le morphisme de restriction des chtoucas de X à N.

On note $\mathbb{G}_m^N$ et $\mathbb{A}^N$ les schémas déduits du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ et de la droite affine $\mathbb{A}^1$ par restriction des scalaires à la Weil de $\mathcal{O}_N$ à $\mathbb{F}_q$. Le champ quotient $\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N$ associe à tout schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) le groupoïde des $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules inversibles sur $N \times S$ qui sont munis d'une section globale.

En associant à tout diagramme $\mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{F}' \xleftarrow{t} {}^\tau\mathcal{F}$ [resp. $\mathcal{F} \xleftarrow{t} \mathcal{F}' \xrightarrow{j} {}^\tau\mathcal{F}$] les déterminants de j et t, on définit un morphisme de $\overline{\mathfrak{C}}^{r,N}_{\emptyset}$ [resp. ${}^r\overline{\mathfrak{C}}^{N}_{\emptyset}$] dans $(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N) \times (\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N)$.

Par ailleurs, N plongé diagonalement dans $X \times N$ est un diviseur de Cartier et donc induit un morphisme

$$X \to \mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N$$

qui est lisse de dimension relative 1.

Il est clair que les carrés

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cht}^r & \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N} & \overline{\mathfrak{C}}^{r,N}_{\emptyset} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X \times X & \longrightarrow & \left(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N\right) \times \left(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
{}^r\mathrm{Cht} & \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N} & {}^r\overline{\mathfrak{C}}^{N}_{\emptyset} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X \times X & \longrightarrow & \left(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N\right) \times \left(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N\right)
\end{array}$$

sont commutatifs.

Lemme II.1. – *Pour tout entier $r \geq 1$, les morphismes*

$$\mathrm{Cht}^r \to \overline{\mathfrak{C}}^{r,N}_{\emptyset} \times_{\left(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N\right)\times\left(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N\right)} (X \times X)$$

$${}^r\mathrm{Cht} \to {}^r\overline{\mathfrak{C}}^{N}_{\emptyset} \times_{\left(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N\right)\times\left(\mathbb{G}_m^N\backslash\mathbb{A}^N\right)} (X \times X)$$

sont lisses de dimension relative $2r - 2$.

Démonstration : Comme les isomorphismes de passage aux duaux échangent $\mathrm{Cht}^r \to \overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{r,N}$ et ${}^r\mathrm{Cht} \to {}^r\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{N}$ et préservent pôles et zéros des chtoucas, on peut se limiter au champ Cht^r des chtoucas à droite.

Soit He_N^r [resp. He^r] le champ qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe le groupoïde des diagrammes

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} \widetilde{\mathcal{E}}$$

où $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \widetilde{\mathcal{E}}$ sont trois $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules [resp. $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modules] localement libres de rang r sur $N \times S$ [resp. $X \times S$] et j, t sont deux homomorphismes dont les conoyaux admettent localement sur S un générateur comme $\mathcal{O}_S$-Modules [resp. deux plongements dont les conoyaux sont supportés par les graphes de deux morphismes $\infty, 0 : S \to X$ et sont inversibles sur $\mathcal{O}_S$].

On remarque qu'ici encore on a un morphisme

$$\mathrm{He}_N^r \to \left(\mathbb{G}_m^N \backslash \mathbb{A}^N\right) \times \left(\mathbb{G}_m^N \backslash \mathbb{A}^N\right)$$

défini par

$$(\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} \widetilde{\mathcal{E}}) \mapsto (\det j, \det t).$$

Soit aussi Vec_N^r [resp. Vec_X^r] le champ qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe le groupoïde des $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules [resp. $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modules] localement libres de rang r sur $N \times S$ [resp. $X \times S$].

On a deux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}^r & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_X^r \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Id},\mathrm{Frob})} \\ \mathrm{He}^r & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_X^r \times \mathrm{Vec}_X^r \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{r,N} & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_N^r \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Id},\mathrm{Frob})} \\ \mathrm{He}_N^r & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_N^r \times \mathrm{Vec}_N^r \end{array}$$

D'après la proposition 1 du paragraphe I.2 de [Lafforgue, 1997], il suffit de prouver :

Lemme II.2. – *Pour tout entier $r \geq 1$, le morphisme représentable*

$$\mathrm{He}^r \to \left(\mathrm{He}_N^r \times_{\mathrm{Vec}_N^r} \mathrm{Vec}_X^r\right) \times_{\left(\mathbb{G}_m^N \backslash \mathbb{A}^N\right) \times \left(\mathbb{G}_m^N \backslash \mathbb{A}^N\right)} (X \times X)$$

est lisse de dimension relative $2r - 2$.

Démonstration : Les deux côtés étant lisses, il suffit de prouver que toutes les fibres géométriques de ce morphisme sont non vides et lisses de dimension $2r - 2$.

Soit donc $(\mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{B}' \xleftarrow{t} \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mathcal{E}}, \infty, 0)$ un point du champ

$$\left(\mathrm{He}_N^r \times_{\mathrm{Vec}_N^r} \mathrm{Vec}_X^r\right) \times_{\left(\mathbb{G}_m^N \backslash \mathbb{A}^N\right) \times \left(\mathbb{G}_m^N \backslash \mathbb{A}^N\right)} (X \times X)$$

à valeurs dans un corps.

Si ∞ et 0 sont dans $X - N$, on sait d'après le lemme 8 du paragraphe I.2 de [Lafforgue, 1997] que la fibre au-dessus de ce point est projective lisse de dimension $2r - 2$.

Si ∞ est dans $X - N$ et 0 figure dans N avec une multiplicité égale à 1 [resp. plus grande que 1], cette fibre est représentable par le produit de l'espace projectif $\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{E}}_\infty)$ de dimension $r-1$ (associé à la fibre $\widetilde{\mathcal{E}}_\infty$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ en ∞) et du groupe des automorphismes de $\mathcal{B}'$ qui induisent l'identité sur $\operatorname{Im} t$ et dont le déterminant est 1, lequel groupe est isomorphe à $\operatorname{Ker}[\mathbb{A}^{r-1} \rtimes \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m] \cong \mathbb{A}^{r-1}$ [resp. à $\operatorname{Ker}[\mathbb{A}^r \to \mathbb{A}^1] \cong \mathbb{A}^{r-1}$].

De même, si 0 est dans $X - N$ et ∞ figure dans N, cette fibre est représentable par le produit de l'espace projectif $\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{E}}_0^\vee)$ de dimension $r - 1$ (associé au dual de la fibre $\widetilde{\mathcal{E}}_0$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ en 0) et du groupe des automorphismes de $\mathcal{B}$ qui induisent l'identité sur $\operatorname{Ker} j$ et ont 1 pour déterminant, lequel groupe est isomorphe à $\mathbb{A}^{r-1}$ dans tous les cas.

Enfin, si ∞ et 0 figurent tous deux dans N, cette fibre est représentable par le produit de deux groupes isomorphes à $\mathbb{A}^{r-1}$.

Ceci termine la démonstration du lemme II.2 et donc aussi du lemme II.1. □

b) Choix d'un modèle

Fixons un point fermé 0 de la courbe X qui est supporté par le niveau $N = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_N) \hookrightarrow X$.

Le corps résiduel $\kappa(0)$ de 0 est une extension finie de $\mathbb{F}_q$ de dimension $\deg(0)$. Choisissant une uniformisante ϖ_0 en 0, l'anneau local complété O_0 de X en 0 et son corps des fractions F_0 (qui est le complété du corps des fonctions F de X en la place 0) sont isomorphes à $\kappa(0)[[\varpi_0]]$ et $\kappa(0)((\varpi_0))$ respectivement. Si m_0 désigne la multiplicité du point 0 dans le niveau N, celui-ci s'écrit $N = N' \amalg \operatorname{Spec}(O_0/\varpi_0^{m_0})$ où $N' = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{N'})$ est la partie de N supportée par le complémentaire de 0.

Considérons $\widetilde{\mathcal{F}}$ un point du champ $\overline{\mathcal{C}}_\emptyset^{r,N}$ à valeurs dans $\kappa(0)$ qui n'a pas de pôle mais a un zéro en 0. C'est un diagramme de $\mathcal{O}_{N\otimes\kappa(0)}$-Modules libres de rang r

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}' \leftarrow {}^\tau\mathcal{F},$$

où ${}^\tau\mathcal{F}$ désigne toujours $(\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_{\kappa(0)})^*\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$ est un isomorphisme et ${}^\tau\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un homomorphisme dont le conoyau est supporté par 0 et de dimension 1 sur $\kappa(0)$.

La partie $\widetilde{\mathcal{F}}' = \widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_N} \mathcal{O}_{N'}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ en dehors de 0 peut être identifiée au fibré trivial $\mathcal{O}_{N'\otimes\kappa(0)}^r$. Et il existe un entier h_0, $1 \le h_0 \le r$, tel que la partie $\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_N} O_0/\varpi_0^{m_0}$ concentrée en 0 se décompose en une somme directe

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \widetilde{\mathcal{F}}_0^{\text{ét}} \oplus \widetilde{\mathcal{F}}_0^c\,,$$

où $\widetilde{\mathcal{F}}_0^{\text{ét}}$ s'identifie à $(O_0/\varpi_0^{m_0} \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa(0))^{r-h_0}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_0^c = ({}^\tau \mathcal{F}_0^c \to \mathcal{F}_0^c)$ admet une base $n_1, n_2, \dots, n_{h_0}$ sur laquelle $\tau^{\deg(0)}$ agit par

$$n_2 \mapsto n_1 \ , \ n_3 \mapsto n_2, \dots, n_{h_0} \mapsto n_{h_0-1} \ , \ n_1 \mapsto \varpi_0 n_{h_0}.$$

Le schéma en groupes $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}$ des automorphismes de $\widetilde{\mathcal{F}}$ se décompose naturellement en produit

$$\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}} = \operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}' \times \operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^{\text{ét}} \times \operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c$$

avec $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}'$ et $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^{\text{ét}}$ des groupes discrets respectivement isomorphes à $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{N'})$ et $\mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0/\varpi_0^{m_0})$. Le troisième facteur $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c$ a une composante neutre $(\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c)^{\text{cont}}$ qui est une extension de h_0 groupes $\mathbb{A}_1$ (sauf un $\mathbb{G}_m$ si $m_0 = 1$).

Afin de décrire la partie discrète $(\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c)^{\text{disc}} = \operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c / (\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c)^{\text{cont}}$ de $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c$, introduisons le F_0-module de Dieudonné $N_{h_0,1} = (F_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q)^{h_0}$ muni de la base canonique $n_1, n_2, \dots, n_{h_0}$ sur laquelle on fait agir $\tau^{\deg(0)}$ par

$$n_2 \mapsto n_1 \ , \ n_3 \mapsto n_2, \dots, n_{h_0} \mapsto n_{h_0-1} \ , \ n_1 \mapsto \varpi_0 n_{h_0}.$$

D'après Drinfeld (voir le théorème 6 du paragraphe III.1 de [Lafforgue, 1997]), il est irréductible de rang h_0 et son algèbre des endomorphismes est une algèbre à division centrale simple D_0 de dimension h_0^2 sur F_0 et d'invariant $-\frac{1}{h_0} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

La valuation 0 sur le corps local complet F_0 se prolonge de manière unique à D_0 où elle définit un homomorphisme de groupes

$$0 : D_0 - \{0\} = D_0^\times \to \frac{1}{h_0}\mathbb{Z}$$

dont le noyau $\mathcal{D}_0^\times$ est compact.

Pour tout $m \in \frac{1}{h_0}\mathbb{Z}, m > 0$, on peut définir le sous-groupe de $\mathcal{D}_0^\times = \mathcal{D}_0^{\times 0}$ d'indice fini

$$\mathcal{D}_0^{\times m} = \{\delta \in D_0 \mid 0(1-\delta) \geq m\}.$$

On a :

Lemme II.3. – *La partie discrète* $(\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c)^{\text{disc}} = \operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c / (\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c)^{\text{cont}}$ *du groupe* $\operatorname{Aut} \widetilde{\mathcal{F}}_0^c$ *des automorphismes de* $\widetilde{\mathcal{F}}_0^c$ *s'identifie au quotient* $\mathcal{D}_0^\times / \mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}$. □

c) Structures de niveau naïves en le zéro

Sont toujours fixés un point 0 supporté par le niveau N et un "modèle" c'est-à-dire un point $\widetilde{\mathcal{F}} = (\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}' \leftarrow {}^\tau \mathcal{F})$ du champ $\overline{\mathcal{C}}_\emptyset^{r,N}$ à valeurs dans $\kappa(0)$ qui n'a pas de pôle mais a un zéro en 0.

On rappelle que pour tout degré $d \in \mathbb{Z}$ et tout polygone convexe de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ désigne le champ algébrique au sens de Deligne-Mumford qui classifie les chtoucas de rang r, de degré d et dont le polygone canonique de Harder-Narasimhan $\overline{p}$ est majoré par p.

Nous nous intéressons au produit fibré :

$$\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times_{\overline{\mathcal{C}}^{r,N}_{\emptyset}} \widetilde{\mathcal{F}}.$$

C'est un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford et de type fini ; il classifie les chtoucas $\widetilde{\mathcal{E}}$ dans $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ munis d'un isomorphisme $\widetilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \cong \widetilde{\mathcal{F}}$. De tels chtoucas $\widetilde{\mathcal{E}}$ ont leur zéro en 0 et leur pôle dans $X - N$ et, d'après le lemme II.1, $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times_{\overline{\mathcal{C}}^{r,N}_{\emptyset}} \widetilde{\mathcal{F}}$ est lisse sur $(X - N) \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa(0)$. De plus, ce champ est muni d'une action du groupe algébrique $\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}$ des automorphismes de $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Au paragraphe précédent on a introduit la composante neutre $(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}_0)^{\mathrm{cont}}$ du groupe algébrique $\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}$ et on peut former le champ quotient

$$\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}} = \left(\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times_{\overline{\mathcal{C}}^{r,N}_{\emptyset}} \widetilde{\mathcal{F}}\right)/(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}_0)^{\mathrm{cont}}.$$

Proposition II.4. – *Le champ* $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}$ *est algébrique au sens de Deligne-Mumford, de type fini et lisse sur* $(X - N) \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa(0)$.

Il est muni d'une action du groupe fini $(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}})^{\mathrm{disc}} = \mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}' \times \mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}_0^{\acute{e}t} \times (\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}_0^{c})^{\mathrm{disc}} = \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{N'}) \times \mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0/\varpi_0^{m_0}) \times (\mathcal{D}_0^{\times}/\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)})$.

Enfin, le produit fibré $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times_{\overline{\mathcal{C}}^{r,N}_{\emptyset}} \widetilde{\mathcal{F}}$ *est un torseur sous le groupe algébrique* $(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}_0^{c})^{\mathrm{cont}}$ *au-dessus de* $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}$ *qui est localement trivial pour la topologie de Zariski.*

Démonstration : Le groupe $(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}_0^{c})^{\mathrm{cont}}$ est une extension de groupes isomorphes à $\mathbb{A}^1$ (ou éventuellement à $\mathbb{G}_m$ si $m_0 = 1$) donc tout torseur sous $(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{F}}_0^{c})^{\mathrm{cont}}$ est localement trivial pour la topologie de Zariski. □

Les champs $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}$ peuvent être appelés champs de chtoucas avec structures de niveau naïves comprenant le zéro. On qualifie ces structures de niveau de naïves car elles sont définies en fixant un "modèle" c'est-à-dire un point $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ alors que le champ $\overline{\mathcal{C}}^{r,N}_{\emptyset}$, tout en étant connexe, compte plusieurs points sans pôle et avec un zéro en 0.

On note $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}} = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}$. Il est muni d'une action de $\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}$ et fixant comme au chapitre I un élément $a \in \mathbb{A}^{\times}$ de degré non nul, on peut considérer le champ de type fini

$$\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\leq d\leq r|\deg(a)|} \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}\,.$$

Dans la suite, nous aurons besoin de contrôler la cohomologie ℓ-adique de la fibre des $\mathrm{Cht}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ au-dessus du point générique de $X - N$. Dans ce but, nous allons compter les points dans les fibres des $\mathrm{Cht}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus des points géométriques de $X - N$.

Pour $\overline{\infty} \in (X - N)(\overline{\mathbb{F}}_q)$ un point géométrique de $X - N$ supporté par un point fermé $\infty \in |X - N|$ et $s \geq 1$ un multiple de $\deg(\infty)$, considérons donc

$$\mathrm{Lef}_{N,\widetilde{\mathcal{F}},\overline{\infty}}^{r,\overline{p}\leq p}(\mathrm{Frob}^s)$$

le nombre de points fixes (comptés avec multiplicités) de Frob^s agissant sur la fibre $(\mathrm{Cht}_{N,\widetilde{\mathcal{F}}}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}) \times_{(X-N)} \overline{\infty}$.

Il nous suffira de calculer ce nombre lorsque s est un multiple non seulement de $\deg(\infty)$ mais aussi de $\deg(0)h_0$.

d) Expression intégrale des nombres de Lefschetz

On conserve toutes les notations des paragraphes précédents et en particulier m_0 la multiplicité du zéro 0 dans le niveau N, l'entier $h_0 \in \{1, \dots, r\}$ déterminé par le choix du modèle $\widetilde{\mathcal{F}}$, le point fermé $\infty \in |X-N|$ supportant $\overline{\infty} \in (X - N)(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et $s \geq 1$ un entier divisible à la fois par $\deg(\infty)$ et $\deg(0)h_0$.

On choisit $\overline{0} \in X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ un point géométrique de X qui s'envoie sur 0 ; ainsi les points géométriques de $(X-N)\otimes_{\mathbb{F}_q}\kappa(0)$ au-dessus de $\overline{\infty} \in (X-N)(\overline{\mathbb{F}}_q)$ sont-ils les $(\overline{\infty}, \mathrm{Frob}^n(\overline{0}))$, $0 \leq n < \deg(0)$.

La description adélique des chtoucas de zéro 0 et de pôle ∞ qui est faite dans le chapitre III de [Lafforgue, 1997] permet de donner pour $\mathrm{Lef}_{N,\widetilde{\mathcal{F}},\overline{\infty}}^{r,\overline{p}\leq p}$ une expression intégrale semblable à celle de la proposition 2 du paragraphe III.6b de [Lafforgue, 1997].

L'expression de cette proposition doit être modifiée essentiellement en la place 0. Il faut restreindre la sommation sur les γ aux représentants des classes de conjugaison d'éléments (s, s)-admissibles de $\mathrm{GL}_r(F)$ tels que $G_0^{\tilde{0}} = \mathrm{GL}_{r-h_0}(F_0)$. L'intégrale orbitale de la fonction $f_0^{\tilde{0}} = \mathbb{1}_{\mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0)}$ doit être remplacée par celle de la fonction caractéristique du sous-groupe de congruence $\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0) \to \mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0/\varpi_0^{m_0})]$. Et la sommation sur les $\deg(0)m_{\tilde{0}} \in \deg(0)\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = D_0^\times/\mathcal{D}_0^\times$ doit être remplacée par une intégrale orbitale sur les $g_{\tilde{0}}^{-1}\gamma g_{\tilde{0}}$, $g_{\tilde{0}} \in D_0^\times$, de la fonction caractéristique du sous-groupe d'indice fini $\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}$ de $\mathcal{D}_0^\times$ décalé par multiplication par $\varpi_0^{s/\deg(0)h_0}$.

Dans la fonction de troncature qu'on a écrite

$$\mathbb{1}\left(\overline{p}_{\gamma,\alpha}^{(m_{\tilde{\infty}}, g_{\infty}^{\tilde{\infty}}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde{0}}, m_{\tilde{0}})} \leq p\right)$$

il faut alors remplacer la variable $m_{\tilde{0}} \in \mathbb{Z}$ par $\dfrac{\deg(g_{\tilde{0}})}{\deg(0)} \in \dfrac{1}{\deg(0)}\mathbb{Z}$ et poser $\alpha = 1$. On peut garder γ en indice car la filtration canonique de Harder-Narasimhan de tout chtouca fixé par Frob^s est automatiquement respectée par le fixateur γ.

Enfin, il faut prendre pour $f^{\infty,0}$ la fonction caractéristique du sous-groupe de congruence $\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}^{\infty,0}}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{N'})]$.

Comme ici on n'a pas normalisé les $\mathrm{Lef}^{r,\overline{p}\leq p}_{N,\tilde{\widetilde{\mathcal{F}}},\overline{\infty}}(\mathrm{Frob}^s)$ en les multipliant par les mesures de Haar des sous-groupes de congruence considérés, on obtient :

Proposition II.5. – *Pour tout polygone convexe de troncature* $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$, *tout point géométrique* $\overline{\infty} \in (X-N)(\overline{\mathbb{F}}_q)$ *au-dessus d'un point fermé* $\infty \in |X-N|$ *et tout multiple* $s \geq 1$ *de* $\deg(\infty)$ *et* $\deg(0)h_0$, *on a*

$$
\begin{aligned}
& dg^{\infty,0}\big(K^{\infty,0}_{N'}\big)dg^{\tilde{0}}_0\big(K^{\tilde{0}}_{0,m_0}\big)dg_{\tilde{0}}\big(\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}\big)\,\mathrm{Lef}^{r,\overline{p}\leq p}_{N,\tilde{\widetilde{\mathcal{F}}},\overline{\infty}}(\mathrm{Frob}^s)\\
&= \sum_{\gamma}\int_{\Delta_\gamma^\times a^{\mathbb{Z}}\backslash\left[\mathbb{Z}\times G^{\tilde{\infty}}_\infty\times G^{\infty,0}\times G^{\tilde{0}}_0\times D_0^\times\right]} dm_{\tilde{\infty}}\cdot dg^{\tilde{\infty}}_\infty\cdot dg^{\infty,0}\cdot dg^{\tilde{0}}_0\cdot dg_{\tilde{0}}\cdot\\
&\quad \mathbb{1}_{K^{\tilde{\infty}}_\infty}\big((g^{\tilde{\infty}}_\infty)^{-1}\gamma g^{\tilde{\infty}}_\infty\big)\ \mathbb{1}_{K^{\infty,0}_{N'}}\big((g^{\infty,0})^{-1}\gamma g^{\infty,0}\big)\ \mathbb{1}_{K^{\tilde{0}}_{0,m_0}}\big((g^{\tilde{0}}_0)^{-1}\gamma g^{\tilde{0}}_0\big)\\
&\quad \mathbb{1}_{\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}}\big(g_{\tilde{0}}^{-1}\gamma g_{\tilde{0}}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}\big)\ \mathbb{1}\big(\overline{p}_\gamma^{(m_{\tilde{\infty}},g^{\tilde{\infty}}_\infty,g^{\infty,0},g^{\tilde{0}}_0,\deg(g_{\tilde{0}}))}\leq p\big)
\end{aligned}
$$

où :

- γ *décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison d'éléments* (s,s)*-admissibles* (*comme dans le théorème* 5 *du paragraphe* III.4 *de* [*[Lafforgue,* 1997]) *de* $\mathrm{GL}_r(F)$ *dont le polynôme caractéristique* χ_γ *a* $r-h_0$ *racines de valuation* 0 *en* 0 *et* h_0 *racines de même valuation* >0 *en* 0 *;*
- $dm_{\tilde{\infty}}$ *est la mesure de comptage sur* $\mathbb{Z}$ *et* $dg^{\tilde{\infty}}_\infty$, $dg^{\infty,0}$, $dg^{\tilde{0}}_0$, $dg_{\tilde{0}}$ *sont les mesures de Haar sur* $G^{\tilde{\infty}}_\infty = \mathrm{GL}_{r-h_\infty}(F_\infty)$, $G^{\infty,0} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^{\infty,0})$, $G^{\tilde{0}}_0 = \mathrm{GL}_{r-h_0}(F_0)$ *et* $D_0^\times$ *qui attribuent le volume* 1 *aux sous-groupes* $K^{\tilde{\infty}}_\infty = \mathrm{GL}_{r-h_\infty}(O_\infty)$, $K^{\infty,0} = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}^{\infty,0}})$, $K^{\tilde{0}}_0 = \mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0)$ *et* $\mathcal{D}_0^\times$ *;*
- $\mathbb{1}_{K^{\tilde{\infty}}_\infty}$, $\mathbb{1}_{K^{\infty,0}_{N'}}$, $\mathbb{1}_{K^{\tilde{0}}_{0,m_0}}$ *et* $\mathbb{1}_{\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}}$ *désignent les fonctions caractéristiques des sous-groupes* $K^{\tilde{\infty}}_\infty$, $K^{\infty,0}_{N'} = \mathrm{Ker}[K^{\infty,0} \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{N'})]$, $K^{\tilde{0}}_{0,m_0} = \mathrm{Ker}[K^{\tilde{0}}_0 \to \mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0/\varpi_0^{m_0})]$ *et* $\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}$ *;*
- *la fonction de troncature* $\mathbb{1}\big(\overline{p}_\gamma^{(m_{\tilde{\infty}},g^{\tilde{\infty}}_\infty,g^{\infty,0},g^{\tilde{0}}_0,\deg(g_{\tilde{0}}))}\leq p\big)$ *est égale à la fonction de troncature* $\mathbb{1}\big(\overline{p}_{\gamma,1}^{(m_{\tilde{\infty}},g^{\tilde{\infty}}_\infty,g^{\infty,0},g^{\tilde{0}}_0,\frac{\deg(g_{\tilde{0}})}{\deg(0)})}\leq p\big)$ *explicitée dans le paragraphe* III.6a *de* [*Lafforgue,* 1997]. □

On rappelle qu'à tout élément $\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)$ qui est (s,s)-admissible est associée une F-algèbre $\Delta = \Delta' \times \Delta''$. On note Δ_γ la sous-algèbre des commutateurs de γ et $\Delta_\gamma^\times$ son groupe des éléments inversibles.

La composante γ' de γ dans Δ' est elliptique au sens que $F' = F[\gamma']$ est un corps. Dans l'extension finie F' de F il existe au-dessus des places ∞ et 0 deux places uniques ∞' et $0'$ telles que $\infty'(\gamma') \neq 0$, $0'(\gamma') \neq 0$.

Comme dans le paragraphe III.6 de [Lafforgue, 1997], on a pu choisir chaque représentant γ de façon que les complétés $F'_{\infty'}$ et $F'_{0'}$ soient plongés dans $M_{h_\infty}(F_\infty)$ et $M_{h_0}(F_0)$; les images de γ' dans $\mathrm{GL}_{h_\infty}(F_\infty)$ et $\mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$ sont notées $\gamma'_{\infty'}$ et $\gamma'_{0'}$.

Proposition II.6. – *Dans la situation de la proposition* II.4*, chacune des intégrales*

$$\int_{\Delta_\gamma^\times a^{\mathbb{Z}} \backslash \left[\mathbb{Z} \times G_\infty^{\tilde\infty} \times G^{\infty,0} \times G_0^{\tilde 0} \times D_0^\times\right]} dm_{\tilde\infty} \cdot dg_\infty^{\tilde\infty} \cdot dg^{\infty,0} \cdot dg_0^{\tilde 0} \cdot dg_{\tilde 0} \cdot$$

$$\mathbb{1}_{K_\infty^{\tilde\infty}}\left(\left(g_\infty^{\tilde\infty}\right)\gamma g_\infty^{\tilde\infty}\right) \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}}\left(\left(g^{\infty,0}\right)^{-1}\gamma g^{\infty,0}\right) \mathbb{1}_{K_{0,m_0}^{\tilde 0}}\left(\left(g_0^{\tilde 0}\right)^{-1}\gamma g_0^{\tilde 0}\right)$$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}}\left(g_{\tilde 0}^{-1}\gamma g_{\tilde 0}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}\right) \mathbb{1}\left(\overline{p}_\gamma^{(m_{\tilde\infty}, g_\infty^{\tilde\infty}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde 0}, \deg(g_{\tilde 0}))} \leq p\right)$$

ne peut être non nulle que si $0(\gamma'_{0'}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0} - 1) \geq m_0 - 1$ *quand* $m_0 > 1$ [*resp.* $0(\gamma'_{0'}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}) = 0$ *quand* $m_0 = 1$].

Et dans ce cas elle vaut

$$\sum_{\substack{1 \leq m_{\infty'} \leq \frac{\deg(\infty')}{\deg(\infty)} \\ 1 \leq m_{0'} \leq \frac{\deg(0')}{\deg(0)}}} \mu_\infty \mu_0 \int_{\mathrm{GL}_r(F)_\gamma a^{\mathbb{Z}} \backslash \left[G_{\gamma\infty'} \times G_\infty^{\infty'} \times G^{\infty,0} \times G_0^{0'} \times G_{\gamma 0'}\right]} dg_{\gamma\infty'} \cdot dg_\infty^{\infty'} \cdot dg^{\infty,0} \cdot$$

$$dg_0^{0'} \cdot dg_{\gamma 0'} \cdot \mathbb{1}_{K_\infty^{\infty'}}\left(\left(g_\infty^{\infty'}\right)^{-1}\gamma g_\infty^{\infty'}\right) \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}}\left(\left(g^{\infty,0}\right)^{-1}\gamma g^{\infty,0}\right) \mathbb{1}_{K_{0,m_0}^{0'}}\left(\left(g_0^{0'}\right)^{-1}\gamma g_0^{0'}\right)$$

$$\mathbb{1}\left(\overline{p}_\gamma^{(m_{\infty'} - \frac{\deg(\infty')}{\deg(\infty)}\infty'(\det g_{\gamma\infty'}), g_\infty^{\infty'}, g^{\infty,0}, g_0^{0'}, m_{0'} + \frac{\deg(0')}{\deg(0)}0'(\det g_{\gamma 0'}))} \leq p\right)$$

où :

- $dg_\infty^{\infty'}$, $dg^{\infty,0}$ *et* $dg_0^{0'}$ *sont les mesures de Haar sur* $G_\infty^{\infty'} = \mathrm{GL}_{r-h_\infty}(F_\infty)$, $G^{\infty,0} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^{\infty,0})$ *et* $G_0^{0'} = \mathrm{GL}_{r-h_0}(F_0)$ *qui attribuent le volume* 1 *aux sous-groupes ouverts compacts maximaux* $K_\infty^{\infty'} = \mathrm{GL}_{r-h_\infty}(O_\infty)$, $K^{\infty,0} = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}^{\infty,0}})$ *et* $K_0^{0'} = \mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0)$ *;*
- $dg_{\gamma\infty'}$ *et* $dg_{\gamma 0'}$ *sont les mesures de Haar sur les sous-groupes de commutateurs* $G_{\gamma\infty'} = \mathrm{GL}_{h_\infty}(F_\infty)_{\gamma'_{\infty'}}$ *et* $G_{\gamma 0'} = \mathrm{GL}_{h_0}(F_0)_{\gamma'_{0'}}$ *des éléments elliptiques* $\gamma'_{\infty'}$ *et* $\gamma'_{0'}$ *qui attribuent le volume* 1 *aux sous-groupes ouverts compacts maximaux ;*
- $\mathrm{GL}_r(F)_\gamma$ *désigne le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_r(F)$ *des commutateurs de l'élément* γ *;*
- $\mathbb{1}_{K_\infty^{\infty'}}$, $\mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}}$ *et* $\mathbb{1}_{K_{0,m_0}^{0'}}$ *sont les fonctions caractéristiques des sous-groupes* $K_\infty^{\infty'}$, $K_{N'}^{\infty,0} = \mathrm{Ker}[K^{\infty,0} \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{N'})]$ *et* $K_{0,m_0}^{0'} = \mathrm{Ker}[K_0^{0'} \to \mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0/\varpi_0^{m_0})]$ *;*

- *on a posé*

$$\mu_\infty = (q^{\deg(\infty')}-1)(q^{2\deg(\infty')}-1)\cdots\big(q^{\left(\frac{h_\infty}{[F'_{\infty'}:F_\infty]}-1\right)\deg(\infty')}-1\big),$$
$$\mu_0 = (q^{\deg(0')}-1)(q^{2\deg(0')}-1)\cdots\big(q^{\left(\frac{h_0}{[F'_{0'}:F_0]}-1\right)\deg(0')}-1\big).$$

Démonstration : Cela se prouve de la même façon que la proposition 6 du paragraphe III.6b de [Lafforgue, 1997] une fois qu'on a remarqué que

$$\mathbb{1}_{\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}}\big(g_{\tilde{0}}^{-1}\gamma g_{\tilde{0}}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}\big) = 1$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} & 0\big(\gamma'_{0'}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}-1\big) \geq m_0-1 \quad \text{quand } m_0>1 \\ [\text{resp.}\quad & 0\big(\gamma'_{0'}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}\big) = 0 \quad \text{quand } m_0=1] \end{aligned}$$

comme il résulte de la caractérisation

$$\mathcal{D}_0^{\times m} = \{\delta\in D_0 \mid 0(1-\delta)\geq m\} \text{ pour } m>0 \text{ et}$$
$$\mathcal{D}_0^{\times 0} = \mathcal{D}_0^{\times} = \{\delta\in D_0 \mid 0(\delta)=0\}.$$

□

2) Calcul des nombres de Lefschetz et expression spectrale

a) Fonctions de Kottwitz

Nous allons nous servir des résultats du chapitre 5 de [Laumon, 1996, volume I]. Dans le paragraphe 5.1 de ce chapitre est définie une "fonction d'Euler-Poincaré"

$$\mathrm{GL}_{h_0}(F_0)\to\mathbb{Q}$$

qui est localement constante, invariante par $F_0^\times$ et à support compact modulo $F_0^\times$. Ses principales propriétés sont données dans le théorème 5.1.3 (dû à Kottwitz pour les parties (i) et (iii) sur les intégrales orbitales et à Laumon aidé de Waldspurger pour la partie (ii) sur les termes constants) que nous recopions en utilisant les notations propres à notre situation :

Théorème II.7. *– Il existe une fonction* (*dite d'Euler-Poincaré ou de Kottwitz*)

$$f_{0'}:\mathrm{GL}_{h_0}(F_0)\to\mathbb{Q}$$

localement constante, invariante par $F_0^\times$ et à support compact modulo $F_0^\times$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) *Pour tout élément $\gamma'_{0'} \in \mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$ qui est elliptique c'est-à-dire tel que $F'_{0'} = F_0[\gamma'_{0'}]$ soit un corps (local complet, extension finie de F_0), on a*

$$\int_{G_{\gamma 0'}\backslash G_{0'}} \frac{dg_{0'}}{dg_{\gamma 0'}} \cdot f_{0'}\big(g_{0'}^{-1}\gamma'_{0'}g_{0'}\big) = \frac{\deg(0')}{h_0\deg(0)}(-1)^{\frac{h_0}{[F'_{0'}:F_0]}-1}\mu_0$$
$$= \frac{1}{h_0}(1-q^{\deg(0')})(1-q^{2\deg(0')})\cdots\big(1-q^{\left(\frac{h_0}{[F'_{0'}:F_0]}-1\right)\deg(0')}\big)\frac{\deg(0')}{\deg(0)}$$

en notant $dg_{0'}$ et $dg_{\gamma 0'}$ les mesures de Haar sur $\mathrm{GL}_{h_0}(F_0) = G_{0'}$ et le sous-groupe $\mathrm{GL}_{h_0}(F_0)_{\gamma'_{0'}} = G_{\gamma 0'}$ des commutateurs de $\gamma'_{0'}$ qui attribuent le volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux.

(ii) *Pour tout sous-groupe parabolique standard $P \subsetneq \mathrm{GL}_{h_0}$ de sous-groupe de Lévi M_P et de radical unipotent N_P, on a*

$$\int_{N_P(F_0)} dn_{0'} \cdot \int_{K_{0'}} dk_{0'} \cdot f_{0'}\big(k_{0'}^{-1}m_{0'}n_{0'}k_{0'}\big) = 0\ ,\ \forall m_{0'} \in M_P(F_0),$$

en notant $dn_{0'}$ une mesure de Haar sur $N_P(F_0)$ et $dk_{0'}$ la restriction à $K_{0'} = \mathrm{GL}_{h_0}(O_0)$ de la mesure de Haar $dg_{0'}$ sur $G_{0'} = \mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$.

(iii) *Pour tout élément $\gamma'_{0'} \in \mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$ qui n'est pas elliptique et si $dg_{\gamma 0'}$ désigne une mesure de Haar sur le groupe $G_{\gamma 0'} = \mathrm{GL}_{h_0}(F_0)_{\gamma'_{0'}}$ des commutateurs de $\gamma'_{0'}$, on a*

$$\int_{G_{\gamma 0'}\backslash G_{0'}} \frac{dg_{0'}}{dg_{\gamma 0'}} \cdot f_{0'}\big(g_{0'}^{-1}\gamma'_{0'}g_{0'}\big) = 0\ .$$

□

Soit donc $f_{0'}$ une telle fonction de Kottwitz. Quitte à la remplacer par la fonction

$$\mathrm{GL}_{h_0}(F_0) \ni g_{0'} \mapsto \int_{K_{0'}} dk_{0'} \cdot f_{0'}\big(k_{0'}^{-1}g_{0'}k_{0'}\big),$$

on peut la supposer invariante par conjugaison par $K_{0'} = \mathrm{GL}_{h_0}(O_0)$.

Notant toujours $m_0 \geq 1$ la multiplicité du point 0 dans le niveau N, on introduit la fonction produit

$$\mathrm{GL}_{h_0}(F_0) \ni g_{0'} \mapsto f_{0',m_0}(g_{0'}) = f_{0'}(g_{0'})\mathbb{1}_{m_0}(g_{0'})$$

où $\mathbb{1}_{m_0}$ désigne la fonction caractéristique du sous-ensemble des éléments de $\mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$ dont le polynôme caractéristique $\chi_{0'}$ vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

- toutes les racines $\gamma'_{0'}$ de $\chi_{0'}$ satisfont

$$0(\gamma'_{0'} - 1) \geq m_0 - 1 \quad \text{quand } m_0 > 1$$
$$[\text{resp.} \quad 0(\gamma'_{0'}) = 0 \quad \text{quand } m_0 = 1],$$

- on a $\chi_{0'}(1+T) = T^{h_0} + \sum\limits_{0 \leq i < h_0} b_i T^i$

$$\text{avec } 0(b_i) \geq (h_0 - i)(m_0 - 1),\ 0 \leq i < h_0 \text{ quand } m_0 > 1$$

[resp. on a $\chi_{0'}(T) = T^{h_0} + \sum\limits_{0 \leq i < h_0} a_i T^i$

$$\text{avec } 0(a_i) \geq 0\ ,\ 0 < i < h_0\ , \textit{et } 0(a_0) = 0 \text{ quand } m_0 = 1].$$

Du théorème II.7, on déduit aussitôt :

Corollaire II.8. – *La fonction f_{0',m_0} sur* $\mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$ *est localement constante, à support compact et invariante par conjugaison par $K_{0'} = \mathrm{GL}_{h_0}(O_0)$.*

Elle vérifie les propriétés (ii) *et* (iii) *du théorème* II.7.

Enfin, pour $\gamma'_{0'}$ un élément elliptique de $\mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$*, l'intégrale orbitale de f_{0',m_0} en $\gamma'_{0'}$ a la même valeur que dans le théorème* II.7(i) *si le polynôme caractéristique $\chi_{0'}$ de $\gamma'_{0'}$ vérifie les conditions ci-dessus et elle est nulle sinon.* □

b) Amplification à partir d'un sous-groupe de Lévi

On conserve toutes les notations du précédent paragraphe.

Procédant comme dans le paragraphe 10 de [Harris, Taylor], on définit pour tout multiple $s \geq 1$ de $\deg(0)h_0$ une fonction localement constante à support compact

$$f^s_{h_0,m_0} : \mathrm{GL}_r(F_0) \to \mathbb{Q}$$

en spécifiant de la manière suivante la valeur des éléments $\gamma_0 \in \mathrm{GL}_r(F_0)$:

- S'il existe

$$\begin{aligned} & k_0 \in K_0 = \mathrm{GL}_r(O_0), \\ & \gamma_0^{0'} \in K^{0'}_{0,m_0} = \mathrm{Ker}\left[\mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0) \to \mathrm{GL}_{r-h_0}\left(O_0/\varpi_0^{m_0}\right)\right], \\ \text{et} \quad & \gamma'_{0'} \in \mathrm{GL}_{h_0}(F_0) \end{aligned}$$

tels que $k_0^{-1}\gamma_0 k_0 = (\gamma_0^{0'}, \gamma'_{0'})$ et $f_{0',m_0}(\gamma'_{0'}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}) \neq 0$, on pose

$$f^s_{h_0,m_0}(\gamma_0) = f_{0',m_0}\left(\gamma'_{0'}\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}\right)$$

(définition qui ne dépend pas du choix de $k_0 \in K_0$).
- Dans tous les autres cas, on pose

$$f^s_{h_0,m_0}(\gamma_0) = 0\ .$$

Lemme II.9. – *Il existe un sous-groupe ouvert (d'indice fini) de* $K_0 = \mathrm{GL}_r(O_0) \subset \mathrm{GL}_r(F_0)$*, ne dépendant que de la multiplicité* m_0*, par lequel soient invariantes à droite et à gauche toutes les fonctions*

$$f^s_{h_0,m_0} : \mathrm{GL}_r(F_0) \to \mathbb{Q}$$

associées aux multiples $s \geq 1$ *de* $\deg(0)h_0$.

Démonstration : Soit γ_0 un élément du support d'une des fonctions $f^s_{h_0,m_0}$. Il s'agit de prouver que si v, v' sont deux éléments d'un sous-groupe ouvert V de K_0 assez petit (indépendamment de s), alors $v\gamma_0 v'$ est encore dans le support de $f^s_{h_0,m_0}$ et même $f^s_{h_0,m_0}(v\gamma_0 v') = f^s_{h_0,m_0}(\gamma_0)$.

Par définition des $f^s_{h_0,m_0}$, il existe $k_0 \in K_0 = \mathrm{GL}_r(O_0)$, $\gamma_0^{0'} \in K^{0'}_{0,m_0} \subset K_0^{0'} = \mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0)$ et un élément $\gamma'_{0'}$ du support compact de f_{0',m_0} dans $\mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$ tels que $\gamma_0 = k_0(\gamma_0^{0'}, \varpi_0^{s/\deg(0)h_0}\gamma'_{0'})k_0^{-1}$.

Le polynôme caractéristique χ_0 de γ_0 s'écrit

$$\chi_0(T) = \chi_0^{0'}(T)\varpi_0^{s/\deg(0)}\chi_{0'}\big(\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}T\big)$$

avec $\chi_0^{0'}$ et $\chi_{0'}$ deux polynômes unitaires de degrés $r - h_0$ et h_0 dont les racines sont de valuation 0 (ou, ce qui est équivalent, dont les coefficients sont entiers et le coefficient constant entier inversible).

On voit d'autre part que les coefficients des matrices γ_0 et $\varpi_0^{s/\deg(0)h_0}\gamma_0^{-1}$ restent dans un compact de F_0 indépendant de s. Il en est de même des coefficients de $v\gamma_0 v'$ et $\varpi_0^{s/\deg(0)h_0}(v\gamma_0 v')^{-1}$ et pour V assez petit (indépendamment de s) ils sont arbitrairement proches de ceux de γ_0 et $\varpi_0^{s/\deg(0)h_0}\gamma_0^{-1}$.

Par conséquent, le polynôme caractéristique $\widetilde{\chi}_0$ de $v\gamma_0 v'$ s'écrit lui aussi sous la forme

$$\widetilde{\chi}_0(T) = \widetilde{\chi}_0^{0'}(T)\varpi_0^{s/\deg(0)}\widetilde{\chi}_{0'}\big(\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}T\big)$$

avec $\widetilde{\chi}_0^{0'}$ et $\widetilde{\chi}_{0'}$ deux polynômes unitaires de degrés $r - h_0$ et h_0 dont les coefficients sont arbitrairement proches de ceux de $\chi_0^{0'}$ et $\chi_{0'}$.

La matrice

$$\varpi_0^{s/\deg(0)}\widetilde{\chi}_{0'}\big(\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}(v\gamma_0 v')\big)$$

a des coefficients arbitrairement proches de ceux de

$$\varpi_0^{s/\deg(0)}\chi_{0'}\big(\varpi_0^{-s/\deg(0)h_0}\gamma_0\big)$$

et elle a le même rang $r - h_0$. Son noyau et son image sont arbitrairement proches de ceux de la seconde matrice.

Pour V assez petit (indépendamment de s), il existe donc un élément $\widetilde{k}_0 \in K_0 = \mathrm{GL}_r(O_0)$ arbitrairement proche de k_0 et des éléments $\widetilde{\gamma}_0^{0'} \in \mathrm{GL}_{r-h_0}(F_0)$ et $\widetilde{\gamma}'_{0'} \in \mathrm{GL}_{h_0}(F_0)$ de polynômes caractéristiques $\widetilde{\chi}_{0'}^{0}$ et $\widetilde{\chi}_{0'}$ tels que

$$v\gamma_0 v' = \widetilde{k}_0\big(\widetilde{\gamma}_0^{0'}, \varpi_0^{s/\deg(0)h_0}\widetilde{\gamma}'_{0'}\big)\widetilde{k}_0^{-1}.$$

De plus, $\widetilde{\gamma}_0^{0'}$ et $\widetilde{\gamma}'_{0'}$ sont arbitrairement proches de $\gamma_0^{0'}$ et $\gamma'_{0'}$. □

c) Transfert

Comme dans les paragraphes précédents, on a fixé le niveau $N = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_N) \hookrightarrow X$ et le point 0 de N de multiplicité m_0 et on a noté $N' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{N'})$ la partie de N en dehors de 0.

On considère un point fermé $\infty \in |X - N|$ en dehors du niveau N. Pour tout multiple $s \geq 1$ de $\deg(\infty)$ et $\deg(0)h_0$, on dispose de la fonction sphérique de Drinfeld

$$f_\infty^{-s'} : \mathrm{GL}_r(F_\infty) \to \mathbb{Q}$$

de niveau $-s' = -\frac{s}{\deg(\infty)}$ sur $\mathrm{GL}_r(F_\infty)$ (voir la définition 7 du paragraphe III.6c de [Lafforgue, 1997]). Elle est invariante des deux côtés par le sous-groupe ouvert compact maximal $K_\infty = \mathrm{GL}_r(O_\infty)$.

Sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(F_\infty) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times \mathrm{GL}_r(F_0)$, on peut former la fonction localement constante à support compact

$$f_\infty^{-s'} \otimes \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}} \otimes f_{h_0,m_0}^s : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{Q}\ ,$$

où $f_{h_0,m_0}^s : \mathrm{GL}_r(F_0) \to \mathbb{Q}$ est la fonction construite au paragraphe précédent et $\mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}}$ désigne la fonction caractéristique du sous-groupe de congruence $K_{N'}^{\infty,0} = \mathrm{Ker}[K^{\infty,0} = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}^{\infty,0}}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{N'})]$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^{\infty,0})$.

D'après le lemme II.9, la fonction $f_\infty^{-s'} \otimes \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}} \otimes f_{h_0,m_0}^s$ est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert (d'indice fini) de $K = \mathrm{GL}_r(O_\mathbb{A})$ qui ne dépend pas de s mais seulement du niveau N.

Pour tout polygone convexe de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$, on dispose alors de la trace tronquée d'Arthur

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}\left(f_\infty^{-s'} \otimes \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}} \otimes f_{h_0,m_0}^s\right).$$

Comme les fonctions $f_\infty^{-s'} \otimes \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}} \otimes f_{h_0,m_0}^s$ contiennent en facteurs en la place ∞ les fonctions sphériques de Drinfeld $f_\infty^{-s'}$, on peut aussi définir à la façon du paragraphe I.2a des variantes des traces tronquées d'Arthur

$$\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}\left(f_\infty^{-s'} \otimes \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}} \otimes f_{h_0,m_0}^s\right)$$

indexées par les $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions sur $\mathbb{R}$

$$\alpha \mapsto \mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}\left(f_\infty^{-s'} \otimes \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}} \otimes f_{h_0,m_0}^s\right)$$

sont en escalier et périodiques de période $r!$

Rappelant que $\widetilde{\mathcal{F}}$ désigne un “modèle” dans $\overline{\mathcal{C}}_\emptyset^{r,N}$ sans pôle et avec zéro en 0 et que h_0 est le rang de la partie non triviale $\widetilde{\mathcal{F}}_0^c$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ en 0, nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème II.10. – *Pour tout polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ assez convexe en fonction du niveau N, tout point géométrique $\overline{\infty} \in (X - N)(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus d'un point fermé $\infty \in |X - N|$ et tout multiple $s = \deg(\infty)s'$ de* $\deg(\infty)$ *et* $\deg(0)h_0$*, le nombre de Lefschetz*

$$\mathrm{Lef}^{r,\overline{p}\leq p}_{N,\mathcal{F},\overline{\infty}}(\mathrm{Frob}^s)$$

multiplié par la constante

$$dg^{\infty,0}\big(K^{\infty,0}_{N'}\big)\, dg^{\tilde{0}}_0\big(K^{\tilde{0}}_{0,m_0}\big)\, dg_{\tilde{0}}\big(\mathcal{D}_0^{\times(m_0-1)}\big)/h_0 \deg(0)$$

est égal à la moyenne de la suite périodique

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto \mathrm{Tr}^{\leq p}_n\left(f^{-s'}_\infty \otimes \mathbb{1}_{K^{\infty,0}_{N'}} \otimes f^s_{h_0,m_0}\right).$$

Démonstration : Ce théorème se prouve à partir des propositions II.5 et II.6 exactement de la même façon que dans [Lafforgue, 1997] le théorème 1 du paragraphe V.2a à partir des propositions 2 et 6 du paragraphe III.6b.

On a besoin de deux types d'informations en chacune des places ∞ et 0 : d'une part des propriétés d'annulation de termes constants de façon à pouvoir appliquer le théorème 10 du paragraphe V.2d de [Lafforgue, 1997], et d'autre part des formules pour les intégrales orbitales d'éléments elliptiques.

En la place ∞ rien n'est changé et les propriétés voulues des fonctions sphériques de Drinfeld $f^{-s'}_\infty$ ont été prouvées dans [Lafforgue, 1997] à partir des lemmes 8 et 9 du paragraphe III.6c. En la place 0 les propriétés voulues des fonctions $f^s_{h_0,m_0} : \mathrm{GL}_r(F_0) \to \mathbb{Q}$ résultent du corollaire II.8 étant donnée la manière dont elles ont été construites au paragraphe II.2b ci-dessus à partir de la fonction $f_{0',m_0} : \mathrm{GL}_{h_0}(F_0) \to \mathbb{Q}$.

Dans l'énoncé du théorème, on n'a besoin de prendre p assez convexe qu'en fonction de N seulement car toutes les $f^{-s'}_\infty \otimes \mathbb{1}_{K^{\infty,0}_{N'}} \otimes f^s_{h_0,m_0}$ sont invariantes des deux côtés par un sous-groupe ouvert qui ne dépend que de N et pas de s. □

d) Forme de l'action des fonctions $f^s_{h_0,m_0}$

Si P est un sous-groupe parabolique semi-standard de GL_r, on note N_P son radical unipotent et $M_P = M^1_P \times \cdots \times M^{|P|}_P = \mathrm{GL}_{r_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{r_{|P|}}$ son sous-groupe de Lévi. On désigne par $\Lambda_{P(F_0)}$ le tore complexe des caractères $M_P(F_0) \to \mathbb{C}$ qui se factorisent à travers deg : $M_P(F_0) = M^1_P(F_0) \times \cdots \times M^{|P|}_P(F_0) \to (\deg(0)\mathbb{Z})^{|P|}$.

Nous allons démontrer :

Proposition II.11. – *Soient P un sous-groupe parabolique semi-standard de $G = \mathrm{GL}_r$ et $\pi_0 = \pi^1_0 \times \cdots \times \pi^{|P|}_0$ une représentation lisse admissible irréductible unitaire de $M_P(F_0) = \mathrm{GL}_{r_1}(F_0) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{r_{|P|}}(F_0)$.*

Alors l'action des fonctions $f^s_{h_0,m_0}$ *(pour* $s \geq 1$ *multiple assez grand de* $\deg(0)h_0$*) sur les induites normalisées*

$$\mathrm{Ind}_{P(F_0)}^{G(F_0)}(\pi_0 \otimes \lambda_0)\ ,\ \lambda_0 \in \Lambda_{P(F_0)}\ ,$$

est de la forme

$$\sum_{\iota=1}^{\iota_0} s^{m_\iota} \chi_\iota(\lambda_0)^s R_\iota(\lambda_0) u_\iota$$

où les u_ι *sont des opérateurs de rang fini dans* $\mathrm{Ind}_{P(F_0)}^{G(F_0)}(\pi_0)$*, les* $R_\iota : \Lambda_{P(F_0)} \to \mathbb{C}$ *sont des fonctions rationnelles, les* $\chi_\iota : \Lambda_{P(F_0)} \to \mathbb{C}^\times$ *sont des fonctions monomiales et les* m_ι *sont des entiers* ≥ 0.

Démonstration : Il existe un sous-groupe parabolique semi-standard $Q \subseteq P$ (avec donc $M_Q \subseteq M_P$) et une représentation lisse admissible supercuspidale π'_0 de $M_Q(F_0)$ tels que π_0 soit un sous-quotient de l'induite normalisée $\mathrm{Ind}_{(M_P\cap Q)(F_0)}^{M_P(F_0)}(\pi'_0)$. Comme la forme donnée dans l'énoncé de la proposition est automatiquement préservée par passage à n'importe quel sous-quotient, on voit qu'on peut supposer $\pi_0 = \pi_0^1 \times \cdots \times \pi_0^{|P|}$ supercuspidale.

Afin de calculer l'action des fonctions $f^s_{h_0,m_0}$ sur les induites $\mathrm{Ind}_{P(F_0)}^{G(F_0)}(\pi_0 \otimes \lambda_0)$, on procède comme dans la démonstration du lemme 7.5.7 de [Laumon, 1996, volume I].

On note W l'espace de la représentation π_0 et ρ l'action sur W qui définit π_0 ; pour tout $\lambda_0 \in \Lambda_{P(F_0)}$, l'espace de la représentation $\pi_0 \otimes \lambda_0$ s'identifie à W et l'action qui la définit est $\lambda_0\rho$.

Soit alors V l'espace vectoriel des fonctions localement constantes

$$v : K_0 = \mathrm{GL}_r(O_0) \to W$$

telles que

$$v(g_0 n_0 k_0) = \rho(g_0)(v(k_0)),\ \forall g_0 \in M_P(O_0),\ \forall n_0 \in N_P(O_0),\ \forall k_0 \in K_0\ .$$

Pour tout $\lambda_0 \in \Lambda_{P(F_0)}$, l'espace de la représentation $\mathrm{Ind}_{P(F_0)}^{G(F_0)}(\pi_0 \otimes \lambda_0)$ s'identifie à V et l'action des fonctions $f^s_{h_0,m_0}$ est donnée par

$$v \mapsto \Big(K_0 \ni k_0 \mapsto \int_{K_0} (\lambda_0\rho)\big(\psi^s_{k_0,k'_0}\big)\big(v(k'_0)\big) \cdot dk'_0\Big)$$

où les $\psi^s_{k_0,k'_0}$ sont les fonctions sur $M_P(F_0)$ définies par

$$\psi^s_{k_0,k'_0}(g_0) = \rho_{P(F_0)}(g_0) \int_{N_P(F_0)} dn_0 \cdot f^s_{h_0,m_0}\big(k_0^{-1} g_0 n_0 k'_0\big)\ ;$$

ici, dk'_0 est la mesure de Haar de volume 1 sur $K_0 = \mathrm{GL}_r(O_0)$, dn_0 est la mesure de Haar sur $N_P(F_0)$ qui attribue le volume 1 à $N_P(O_0)$ et $\rho_{P(F_0)}$ désigne la racine carrée du caractère modulaire de $P(F_0)$.

D'après le lemme II.9, il existe un entier $m'_0 \geq 1$ ne dépendant que de la multiplicité m_0 de 0 dans N tel que toutes les fonctions $f^s_{h_0,m_0}$ soient invariantes à gauche et à droite par le sous-groupe de congruence $K_{0,m'_0} = \mathrm{Ker}[K_0 = \mathrm{GL}_r(O_0) \to \mathrm{GL}_r(O_0/\varpi_0^{m'_0})]$. Comme K_{0,m'_0} est distingué dans K_0, toutes les fonctions

$$M_P(F_0) \ni g_0 \mapsto \psi^s_{k_0,k'_0}(g_0)$$

sont invariantes à gauche et à droite par $K_{0,m'_0} \cap M_P(O_0)$.

Or on sait que les pseudo-coefficients des représentations supercuspidales des groupes $\mathrm{GL}_{r'}(F_0)$ sont à support compact modulo le centre $F_0^\times$. C'est en particulier le cas pour les facteurs $\pi_0^1, \ldots, \pi_0^{|P|}$ de la représentation π_0 de $M_P(F_0) = \mathrm{GL}_{r_1}(F_0) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{r_{|P|}}(F_0)$.

Par conséquent, il existe des parties compactes $S_1, \ldots, S_{|P|}$ de $\mathrm{GL}_{r_1}(F_0)$, $\ldots$, $\mathrm{GL}_{r_{|P|}}(F_0)$, stables à gauche et à droite par $\mathrm{GL}_{r_1}(O_0), \ldots, \mathrm{GL}_{r_{|P|}}(O_0)$, telles que si $\mathbb{1}_{\varpi_0^{\mathbb{Z}} S_1 \times \cdots \times \varpi_0^{\mathbb{Z}} S_{|P|}}$ désigne la fonction caractéristique de $\varpi_0^{\mathbb{Z}} S_1 \times \cdots \times \varpi_0^{\mathbb{Z}} S_{|P|}$ dans $\mathrm{GL}_{r_1}(F_0) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{r_{|P|}}(F_0)$, on ait les égalités

$$(\lambda_0 \rho)\big(\psi^s_{k_0,k'_0}\big) = (\lambda_0 \rho)\big(\psi^s_{k_0,k'_0} \mathbb{1}_{\varpi_0^{\mathbb{Z}} S_1 \times \cdots \times \varpi_0^{\mathbb{Z}} S_{|P|}}\big)$$

entre opérateurs de l'espace W des représentations $\pi_0 \otimes \lambda_0$, $\lambda_0 \in \Lambda_{P(F_0)}$. On peut supposer que tous les éléments $g_1, \ldots, g_{|P|}$ de $S_1 \subset \mathrm{GL}_{r_1}(F_0), \ldots, S_{|P|} \subset \mathrm{GL}_{r_{|P|}}(F_0)$ sont à coefficients entiers et que leurs valuations $0(g_1), \ldots, 0(g_{|P|})$ (c'est-à-dire les plus petites valuations de leurs coefficients dans O_0) valent 0.

La proposition II.11 résulte du lemme suivant :

Lemme II.12. – *Soient $g_1^0, \ldots, g_{|P|}^0$ des éléments de $S_1, \ldots, S_{|P|}$ et k_0, k'_0 deux éléments de $K_0 = \mathrm{GL}_r(O_0)$.*

On considère l'expression

$$\psi^s_{k_0,k'_0}\big(\varpi_0^{d_1} g_1^0, \ldots, \varpi_0^{d_{|P|}} g_{|P|}^0\big)$$

comme fonction du multiple $s = \deg(0) h_0 s'$ de $\deg(0) h_0$ et d'entiers $d_1, \ldots, d_{|P|} \in \mathbb{Z}$.

Alors il existe un ensemble fini d'inégalités de la forme

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_{|P|} d_{|P|} + c' s' + c \geq 0$$

(où $c_1, c_2, \ldots, c_{|P|}, c, c'$ sont des entiers fixés) telles que dans chacune des parties du réseau des $(d_1, \ldots, d_{|P|}, s')$ définies en demandant que chacune de ces inégalités soit vérifiée ou ne le soit pas, l'expression

$$\psi^s_{k_0,k'_0}\big(\varpi_0^{d_1} g_1^0, \ldots, \varpi_0^{d_{|P|}} g_{|P|}^0\big)$$

s'écrive

$$\sum_{\iota} c_\iota d_1^{m_{1,\iota}} \dots d_{|P|}^{m_{|P|,\iota}} s'^{m_\iota} q_{1,\iota}^{d_1} \dots q_{|P|,\iota}^{d_{|P|}} q_\iota^{s'}$$

où les $m_{1,\iota}, \dots , m_{|P|,\iota}, m_\iota$ *sont des entiers fixés et les* $c_\iota, q_{1,\iota}, \dots , q_{|P|,\iota}, q_\iota$ *sont des constantes.*

En particulier, pour que $\psi^s_{k_0,k'_0}(\varpi_0^{d_1} g_1^0, \dots , \varpi_0^{d_{|P|}} g_{|P|}^0) \neq 0$*, il faut*

$$0 \leq d_1 \leq s', \dots , 0 \leq d_{|P|} \leq s' .$$

Démonstration du lemme II.12 : Il s'agit de comprendre la dépendance des intégrales

$$\int_{N_P(F_0)} dn_0 \cdot f^s_{h_0,m_0}\big(k_0^{-1}\big(\varpi_0^{d_1} g_1^0, \dots , \varpi_0^{d_{|P|}} g_{|P|}^0\big)n_0 k'_0\big)$$

en $s = \deg(0)h_0 s'$ et $d_1, \dots , d_{|P|}$.

Il existe un entier $m \geq 1$ tel que si $g_1 \in M_{r_1}(O_0), \dots , g_{|P|} \in M_{r_{|P|}}(O_0)$ vérifient

$$g_1 \equiv g_1^0, \dots , g_{|P|} \equiv g_{|P|}^0 \quad \text{modulo } \varpi_0^m ,$$

alors $g_1, \dots , g_{|P|}$ sont dans $S_1, \dots , S_{|P|}$ et on a toujours

$$\begin{aligned}&\int_{N_P(F_0)} f^s_{h_0,m_0}\big(k_0^{-1}\big(\varpi_0^{d_1} g_1, \dots , \varpi_0^{d_{|P|}} g_{|P|}\big)n_0 k'_0\big) \cdot dn_0 \\ &= \int_{N_P(F_0)} f^s_{h_0,m_0}\big(k_0^{-1}\big(\varpi_0^{d_1} g_1^0, \dots , \varpi_0^{d_{|P|}} g_{|P|}^0\big)n_0 k'_0\big) \cdot dn_0 .\end{aligned}$$

On est ramené à comprendre le comportement des intégrales

$$\int f^s_{h_0,m_0}\big(k_0^{-1}\big(\varpi_0^{d_1} g_1, \dots , \varpi_0^{d_{|P|}} g_{|P|}\big)n_0 k'_0\big) \cdot dn_0 dg_1 \dots dg_{|P|}$$

où $g_1, \dots , g_{|P|}$ décrivent maintenant des classes de congruence modulo ϖ_0^m.

On a besoin de savoir déterminer les valeurs $f^s_{h_0,m_0}(g)$ des fonctions $f^s_{h_0,m_0}$ en les éléments $g \in \mathrm{GL}_r(F_0)$:

Lemme II.13. *– Soit* $s = \deg(0)h_0 s'$, $s' \geq 1$*, un multiple de* $\deg(0)h_0$ *et* g *un élément de* $\mathrm{GL}_r(F_0)$ *:*

(i) *Pour que* $f^s_{h_0,m_0}(g) \neq 0$*, il faut que* g *vérifie les conditions suivantes :*
- $0(\det g) = h_0 s'$,
- *g est à coefficients entiers,*
- *l'image et le noyau de la réduction modulo* $\varpi_0^{s'}$ *de* g *sont libres de rangs* $r - h_0$ *et* h_0 *sur* $O_0/\varpi_0^{s'}$*,*
- *l'image et le noyau de la réduction modulo* ϖ_0 *de* g *sont en somme directe.*

(ii) *Si les conditions de* (i) *sont vérifiées, on a*
- $\varpi_0^{s'} g^{-1}$ *est à coefficients entiers,*
- *la matrice* $\varpi_0^{-s'} \cdot \Lambda^{r-h_0+1} g$ *est à coefficients entiers et l'image de sa réduction modulo* $\varpi_0^{s'}$ *est libre de rang* h_0 *sur* O_0/ϖ_0.

(iii) *Si l'entier* m *a été choisi assez grand, si* $s' > m$ *et si* g *vérifie les conditions de* (i) *et donc aussi de* (ii)*, la valeur* $f^s_{h_0,m_0}(g)$ *ne dépend que des réductions modulo* ϖ_0^m *des matrices* g *et* $\varpi_0^{-s'} \cdot \Lambda^{r-h_0+1} g$.

Démonstration du lemme II.13 : Rappelons comment la fonction $f^s_{h_0,m_0}$ a été définie. Il existe une fonction localement constante et invariante par conjugaison

$$f_{0',m_0} \ : \mathrm{GL}_{h_0}(O_0) \to \mathbb{Q}$$

telle que, pour tout $g \in \mathrm{GL}_r(F_0)$, on a

$$f^s_{h_0,m_0}(g) = f_{0',m_0}(g'')$$

s'il existe $k \in \mathrm{GL}_r(O_0)$ vérifiant

$$(*) \qquad k^{-1} g k = \left(g', \varpi_0^{s'} g''\right) \quad \text{avec} \quad g' \in \mathrm{GL}_{r-h_0}(O_0),\, g'' \in \mathrm{GL}_{h_0}(O_0)$$

et sinon

$$f^s_{h_0,m_0}(g) = 0\,.$$

Pour g donné, l'existence d'un $k \in \mathrm{GL}_r(O_0)$ vérifiant $(*)$ est équivalente aux conditions de (i) et elle implique les conditions de (ii).

Il reste à prouver (iii).

On peut supposer que l'entier $m \geq 1$ a été choisi assez grand pour que la fonction $\mathrm{GL}_{h_0}(O_0) \ni g'' \mapsto f_{0',m_0}(g'')$ ne dépende que des classes de congruence modulo ϖ_0^m des éléments g''.

Considérons donc un élément g qui vérifie les conditions de (i) c'est-à-dire s'écrit $g = k(g', \varpi_0^{s'} g'')k^{-1}$. La réduction modulo ϖ_0^m de $\varpi_0^{-s'} \cdot \Lambda^{r-h_0+1} g$ se factorise en

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{r-h_0+1}(O_0/\varpi_0^m)^r \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \Lambda^{r-h_0+1}(O_0/\varpi_0^m)^r \\
\begin{array}{c}\det((O_0/\varpi_0^m)^r/\mathrm{Ker}_m(g)) \\ \otimes\, \mathrm{Ker}_m(g)\end{array} \arrow[r, "\sim"] & \begin{array}{c}\det(\mathrm{Im}_m(g)) \\ \otimes\, (O_0/\varpi_0^m)^r/\mathrm{Im}_m(g)\end{array} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

(où $\mathrm{Ker}_m(g)$ et $\mathrm{Im}_m(g)$ désignent le noyau et l'image de g réduit modulo ϖ_0^m).

Si on tensorise avec l'inverse de l'isomorphisme

$$\det\left(\left(O_0/\varpi_0^m\right)^r/\mathrm{Ker}_m(g)\right) \xrightarrow{\sim} \det(\mathrm{Im}_m(g))$$

déduit de g par réduction modulo ϖ_0^m, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}_m(g) \xrightarrow{\sim} \left(O_0/\varpi_0^m\right)^r/\mathrm{Im}_m(g)$$

qu'on peut toujours composer avec l'inverse de la projection

$$\mathrm{Ker}_m(g) \hookrightarrow \left(O_0/\varpi_0^m\right)^r \twoheadrightarrow \left(O_0/\varpi_0^m\right)^r/\mathrm{Im}_m(g)$$

pour obtenir un automorphisme

$$\mathrm{Ker}_m(g) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}_m(g)\,.$$

Celui-ci est conjugué à g'' et donc il détermine la valeur $f^s_{h_0,m_0}(g)$. □

Suite de la démonstration du lemme II.12 : Pour alléger, notons désormais $k = |P|$ et revenons aux intégrales

$$\int f^s_{h_0,m_0}\big(k_0^{-1}\big(\varpi_0^{d_1} g_1, \ldots, \varpi_0^{d_k} g_k\big)n_0k_0'\big)\cdot dn_0 dg_1 \ldots dg_k\,.$$

On voit déjà que pour avoir

$$f^s_{h_0,m_0}\big(k_0^{-1}\big(\varpi_0^{d_1} g_1, \ldots, \varpi_0^{d_k} g_k\big)n_0k_0'\big) \neq 0\,,$$

il faut

$$0 \leq d_1 \leq s', \ldots, 0 \leq d_k \leq s'$$

et

$$r_1d_1 + \cdots + r_kd_k + (v_1 + \cdots + v_k) = h_0s'$$

où $v_1, \ldots, v_k$ désignent les valuations des déterminants de $g_1, \ldots, g_k$ (elles sont fixées car ne dépendent que des classes de congruence modulo ϖ_0^m de ceux-ci). Dorénavant, on supposera ces conditions vérifiées.

Récrivons les éléments $(\varpi_0^{d_1} g_1, \ldots, \varpi_0^{d_k} g_k)n_0 = g$ sous la forme :

$$g = \begin{pmatrix} \varpi_0^{d_1} g_1 & n_{1,2} & \ldots & n_{1,k} \\ 0 & \varpi_0^{d_2} g_2 & n_{2,3} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & n_{k-1,k} \\ 0 & \ldots & 0 & \varpi_0^{d_k} g_k \end{pmatrix}$$

D'après le lemme II.13, on est ramené au problème de calculer en fonction de s' et $d_1, d_2, \ldots, d_k$ le volume de l'ouvert des $g_1, \ldots, g_k$ et $n_{i,j}$, $0 < i < j \leq k$, qui vérifient les conditions suivantes :

(1) Les $g_1, \ldots, g_k$ sont dans des classes de congruence fixées modulo ϖ_0^m.
(2) Tous les $n_{i,j}$ sont à coefficients entiers et ils sont dans des classes de congruence fixées modulo ϖ_0^m.
(3) Modulo $\varpi_0^{s'}$, la matrice g a un noyau libre de rang h_0 sur $O_0/\varpi_0^{s'}$.
(4) La matrice $\varpi_0^{-s'} \cdot \Lambda^{r-h_0+1} g$ (qui est automatiquement à coefficients entiers) est dans une classe de congruence fixée modulo ϖ_0^m.

Comme la matrice g a une image libre de rang $r - h_0$ modulo $\varpi_0^{s'}$, on peut choisir une famille de $r - h_0$ vecteurs colonnes de g qui forment une base de l'image. L'ensemble $\mathcal{B} \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$ de leurs indices peut être choisi indépendamment de g car g est dans une classe de congruence fixée modulo ϖ_0^m (on décide que chaque d_i et $s' - d_i$ ou bien est fixé à une valeur $< m$ ou bien est variable $\geq m$).

Ces $r - h_0$ vecteurs colonnes forment une matrice à r vecteurs lignes dont on note $\ell_1, \ldots, \ell_r$ les réductions dans $(O_0/\varpi_0^{s'+m})^{r-h_0}$ et $\bar{\ell}_1, \ldots, \bar{\ell}_r$ celles dans $(O_0/\varpi_0^{s'})^{r-h_0}$.

On note $E_{r-1}, E_{r-2}, \ldots, E_0$ les sous-modules de $(O_0/\varpi_0^{s'+m})^{r-h_0}$ engendrés par $\ell_r, (\ell_r, \ell_{r-1}), \ldots, (\ell_r, \ell_{r-1}, \ldots, \ell_1)$ et $\bar{E}_{r-1}, \bar{E}_{r-2}, \ldots, \bar{E}_0$ leurs images dans $(O_0/\varpi_0^{s'})^{r-h_0}$. On a

$$0 = E_r \subseteq E_{r-1} \subseteq E_{r-2} \subseteq \ldots \subseteq E_0 = \left(O_0/\varpi_0^{s'+m}\right)^{r-h_0}$$

et on peut choisir un ensemble d'indices (ici encore indépendant de g) $\mathcal{A} \subseteq \{1, \ldots, r\}$ de cardinal $r - h_0$ tel que les ℓ_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, forment une base de $(O_0/\varpi_0^{s'+m})^{r-h_0} = E_0$.

Pour tout α, $0 \leq \alpha \leq r - 1$, il existe des entiers $v_{\alpha,d}$, $1 \leq d \leq r - \alpha$, $0 \leq v_{\alpha,d} \leq s' + m$, tels que pour tout entier v, $0 \leq v < s' + m$, on a l'équivalence

$$\dim \left(E_\alpha \cap \left(\varpi_0^v \cdot O_0\right)^{r-h_0}\right)/\left(E_\alpha \cap \left(\varpi_0^{v+1} \cdot O_0\right)^{r-h_0}\right) \geq d$$
$$\Longleftrightarrow v \geq v_{\alpha,d}\,.$$

Les entiers $\bar{v}_{\alpha,d} = \min\{v_{\alpha,d}, s'\}$ sont tels que pour tout entier $v \leq s'$, on a

$$\dim \left(\bar{E}_\alpha \cap \left(\varpi_0^v \cdot O_0\right)^{r-h_0}\right)/\left(\bar{E}_\alpha \cap \left(\varpi_0^{v+1} \cdot O_0\right)^{r-h_0}\right) \geq d$$
$$\Longleftrightarrow v \geq \bar{v}_{\alpha,d}\,.$$

Ceux des entiers $v_{\alpha,d}$ qui sont $< m$ sont fixés puisque g et donc les $\ell_1, \ldots, \ell_r$ sont dans une classe de congruence modulo ϖ_0^m fixée. On décide de fixer aussi ceux des entiers $s' + m - v_{\alpha,d}$ qui sont $< m$.

Considérons maintenant un vecteur colonne arbitraire c_β, $1 \leq \beta \leq r$, dans la matrice g. Soit i, $1 \leq i \leq k$, l'unique entier tel que

$$\beta^- = r_1 + \cdots + r_{i-1} < \beta \leq r_1 + \cdots + r_i = \beta^+\,.$$

Ce vecteur doit vérifier les conditions suivantes :

- d'une part, (3) signifie que, modulo $\varpi_0^{s'}$, il est lié aux $r - h_0$ vecteurs colonnes $c_{\beta'}$, $\beta' \in \mathcal{B}$;
- d'autre part, si on note $(x_1, \ldots, x_r)$ ses coordonnées, on a

$$x_\alpha = 0\,,\ \forall\, \alpha > \beta^+\,.$$

(On oublie provisoirement la condition (4).)

On considère la matrice formée des $r - h_0$ colonnes $c_{\beta'}$, $\beta' \in \mathcal{B}$, et de la colonne c_β. La première condition se représente en disant que pour tout α, $1 \leq \alpha \leq r$, $\alpha \notin \mathcal{A}$, la matrice carrée $M_{\alpha,\beta}$ d'ordre $r - h_0 + 1$ formée des vecteurs lignes indexés par les $\alpha' \in \mathcal{A}$ et par α a un déterminant qui s'annule à l'ordre $\varpi_0^{s'}$.

Notons $\overline{\ell}_{\mathcal{A}}$ la matrice carrée formée par les vecteurs lignes $\overline{\ell}_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{A}$, et pour tous indices $\alpha \notin \mathcal{A}$, $\alpha' \in \mathcal{A}$, notons $\overline{\ell}^{\alpha'}_{\alpha,\mathcal{A}}$ la matrice déduite de $\overline{\ell}_{\mathcal{A}}$ en enlevant la ligne d'indice α' et en la remplaçant par le vecteur ligne $\overline{\ell}_\alpha$.

On obtient les équations

$$(\det \overline{\ell}_{\mathcal{A}})x_\alpha - \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}} \left(\det \overline{\ell}^{\alpha'}_{\alpha,\mathcal{A}}\right) x_{\alpha'} \equiv 0 \quad \left[\varpi_0^{s'}\right].$$

Il résulte de la définition de $\mathcal{A}$ que $\det \overline{\ell}_{\mathcal{A}}$ est inversible. Pour tout α, le vecteur à $r - h_0$ coordonnées

$$\left(\frac{\det \overline{\ell}^{\alpha'}_{\alpha,\mathcal{A}}}{\det \overline{\ell}_{\mathcal{A}}}\right)_{\alpha' \in \mathcal{A}}$$

n'est autre que le vecteur des coordonnées de $\overline{\ell}_\alpha$ dans la base de $(O_0/\varpi_0^{s'})^{r-h_0}$ constituée des $\overline{\ell}_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{A}$.

Le fait que $x_\alpha = 0$, $\forall\, \alpha > \beta^+$, signifie exactement que le vecteur des $(x_{\alpha'})_{\alpha' \in \mathcal{A}}$ doit être dans l'orthogonal du sous-module $\bar{E}_{\beta^+}$ de $(O_0/\varpi_0^{s'})^{r-h_0}$. Autrement dit, le vecteur $(x_{\alpha'})_{\alpha' \in \mathcal{A}}$ est astreint à décrire le sous-espace des applications linéaires

$$\left(O_0/\varpi_0^{s'}\right)^{r-h_0} \longrightarrow O_0/\varpi_0^{s'}$$

qui s'annulent sur le sous-module $\bar{E}_{\beta^+}$. Quant aux autres coordonnées x_α, $\alpha \notin \mathcal{A}$, elles sont complètement déterminées (à l'ordre $\varpi_0^{s'}$) par celles-là.

Pour un i donné, $1 \leq i \leq k$, regardons maintenant simultanément tous les β tels que $r_1 + \cdots + r_{i-1} < \beta \leq r_1 + \cdots + r_i$ c'est-à-dire $\beta^+ = r_1 + \cdots + r_i$. L'ensemble des vecteurs colonnes c_β définit une application linéaire

$$\left(O_0/\varpi_0^{s'}\right)^{r-h_0} \longrightarrow \left(O_0/\varpi_0^{s'}\right)^{r_i}$$

qui s'annule sur le sous-module $\bar{E}_{r_1+\cdots+r_i}$. Les coordonnées des c_β dont l'indice α vérifie $r_1 + \cdots + r_{i-1} < \alpha \leq r_1 + \cdots + r_i$, soit $\alpha^+ = r_1 + \cdots + r_i$, définissent une application linéaire

$$\bar{E}_{r_1+\cdots+r_{i-1}}/\bar{E}_{r_1+\cdots+r_i} \longrightarrow \left(O_0/\varpi_0^{s'}\right)^{r_i}$$

qui donc s'identifie à la réduction modulo $\varpi_0^{s'}$ de $\varpi_0^{d_i} g_i$.

La longueur de $\bar{E}_{r_1+\cdots+r_{i-1}}/\bar{E}_{r_1+\cdots+r_i}$ est égale à

$$\left(\sum_{d\leq r_{i+1}+\cdots+r_k} \bar{v}_{r_1+\cdots+r_i,d}\right) - \left(\sum_{d\leq r_i+\cdots+r_k} \bar{v}_{r_1+\cdots+r_{i-1},d}\right)$$

et elle majore la longueur de son image qui est

$$r_i(s'-d_i)-v_i\,.$$

En faisant la somme sur tous les i, $1\leq i\leq k$, on obtient

$$(r-h_0)s' \geq (r_1+\cdots+r_k)s' - (r_1d_1+\cdots+r_kd_k) - (v_1+\cdots+v_k)$$

qui se récrit

$$(r_1d_1+\cdots+r_kd_k)+(v_1+\cdots+v_k)\geq h_0s'\,.$$

Or au début de la discussion on a imposé

$$(r_1d_1+\cdots+r_kd_k)+(v_1+\cdots+v_k)= h_0s'\,.$$

Toutes les inégalités ci-dessus doivent donc être des égalités et

$$\bar{E}_{r_1+\cdots+r_{i-1}}/\bar{E}_{r_1+\cdots+r_i} \hookrightarrow \left(O_0/\varpi_0^{s'}\right)^{r_i}$$

doit être un plongement.

Pour tout indice α, $r_1+\cdots+r_{i-1}<\alpha\leq r_1+\cdots+r_i$, notons m_α, $0<m_\alpha\leq m$, la longueur du quotient dans $(O_0/\varpi_0^m)^{r_i}$ du sous-module engendré par les vecteurs lignes de g_i d'indices $\geq\alpha$ par le sous-module engendré par ceux d'indices $>\alpha$. C'est un entier fixé. Alors on a pour tout α

$$\left(\sum_{d\leq r-\alpha} \bar{v}_{\alpha,d}\right) - \left(\sum_{d\leq r-\alpha+1} \bar{v}_{\alpha-1,d}\right) = (s'-d_i)+m_\alpha-m\,.$$

Nous décidons maintenant de fixer pour tout α, $1\leq\alpha\leq r$, la filtration croissante de $(O_0/\varpi_0^m)^{r-h_0}$ constituée par les images des $(E_\alpha\cap\varpi_0^v\cdot O_0^{r-h_0})/(E_\alpha\cap\varpi_0^{v+m}\cdot O_0^{r-h_0})$, $0\leq v\leq s'$.

En particulier, les modules $\bar{E}_\alpha$ sont entièrement déterminés modulo ϖ_0^m et il en est de même de leurs quotients

$$(\bar{E}_{r_1+\cdots+r_{i-1}}/\bar{E}_{r_1+\cdots+r_i})\otimes\left(O_0/\varpi_0^m\right).$$

Alors, pour tout $\beta\notin\mathcal{B}$, l'existence d'un vecteur colonne $c_\beta=(x_1,\ldots,x_r)$ c'est-à-dire d'une application linéaire

$$\left(O_0/\varpi_0^{s'}\right)^{r-h_0}/\bar{E}_{\beta^+} \longrightarrow \left(O_0/\varpi_0^{s'}\right)$$

compatible à la fois avec les conditions de congruence imposées aux

$$\varpi_0^{-d_i}(x_{\beta^-+1},\ldots,x_{\beta^+})$$

et aux

$$(x_1, x_2, \dots, x_\beta)$$

modulo ϖ_0^m, ne dépend que de toutes les classes de congruence modulo ϖ_0^m que nous avons fixées.

S'il y a compatibilité, le volume de l'ouvert des vecteurs colonnes

$$c_\beta\,,\;\beta \notin \mathcal{B}\,,$$

qui vérifient les conditions (1), (2) et (3) est égal à une constante multiplicative près à

$$\begin{aligned} V &= \prod_{1\le\beta\le r} q^{-\lg(\bar{E}_{\beta^+})} q^{-n_\beta s'} \\ &= \prod_{1\le i\le k} q^{-r_i \cdot \sum\limits_{d\le r_{i+1}+\cdots+r_k} \bar{v}_{r_1+\cdots+r_i,d}} \cdot \Bigg(\prod_{1\le\beta\le r} q^{-n_\beta} \Bigg)^{s'} \end{aligned}$$

où $\lg(\cdot)$ désigne la longueur d'un module et, pour tout indice β, $1 \le \beta \le r$, n_β est le cardinal de l'ensemble

$$\{\alpha \mid 1 \le \alpha \le \beta^+, \alpha \notin \mathcal{A}\}\,.$$

Il reste à imposer en plus la condition (4). Connaître l'homomorphisme $\varpi_0^{-s'} \cdot \Lambda^{r-h_0+1} g$ modulo ϖ_0^m est équivalent à connaître modulo $\varpi_0^{s'+m}$ la famille des déterminants

$$\det M_{\alpha,\beta}\,,\;\alpha \notin \mathcal{A}\,,\;\beta \notin \mathcal{B}\,,$$

qui s'annulent modulo $\varpi_0^{s'}$.

Pour tout indice β avec $\beta^- = r_1 + \cdots + r_{i-1} < \beta \le r_1 + \cdots + r_i = \beta^+$ et si $c_\beta = (x_1, \dots, x_r)$ est le vecteur colonne associé, on a pour tout indice $\alpha \notin \mathcal{A}$

$$\det M_{\alpha,\beta} \equiv (\det \ell_{\mathcal{A}}) x_\alpha - \sum_{\alpha'\in\mathcal{A}} \big(\det \ell_{\alpha,\mathcal{A}}^{\alpha'}\big) x_\alpha \qquad \big[\varpi_0^{s'+m}\big]$$

où $\ell_{\mathcal{A}}$ désigne la matrice carrée formée par les vecteurs lignes $\ell_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{A}$, et les $\ell_{\alpha,\mathcal{A}}^{\alpha'}$ sont déduites de $\ell_{\mathcal{A}}$ en remplaçant la ligne $\ell_{\alpha'}$ par ℓ_α.

En les indices $\alpha \le \beta^-$, les $\det M_{\alpha,\beta}$ peuvent prendre des valeurs arbitraires dans $\varpi_0^{s'} \cdot O_0 / \varpi_0^{s'+m} \cdot O_0 \cong O_0/\varpi_0^m$ et indépendantes des autres choix. Il en est de même en les indices α dans $]\beta^-, \beta^+]$ si $s' - d_i \ge m$.

Se donner la famille des $(\det M_{\alpha,\beta})_{\alpha>\beta^+}$ modulo $\varpi_0^{s'+m}$ est équivalent à se donner une application linéaire sur le module $E_{\beta^+} \cap \varpi_0^{s'} \cdot O_0^{r-h_0}$. Or celui-ci est complètement déterminé puisqu'on a fixé la filtration croissante de $(O_0/\varpi_0^m)^{r-h_0}$ par les images des $(E_{\alpha'} \cap \varpi_0^v \cdot O_0^{r-h_0})/(E_{\alpha'} \cap \varpi_0^{v+m} \cdot O_0^{r-h_0})$ et ceux des entiers $s' + m - v_{\alpha',d}$ qui sont $< m$.

De même, si $s' - d_i < m$, il est fixé et la famille des $(\det M_{\alpha,\beta})_{\alpha>\beta^-}$ peut prendre dans $(\varpi_0^{s'} \cdot O_0/\varpi_0^{s'+m} \cdot O_0)^{r-\beta^-} \cong (O_0/\varpi_0^m)^{r-\beta^-}$ des valeurs indépendantes des autres choix dans un ensemble de possibilités déterminé seulement par la classe de congruence modulo ϖ_0^m de g_i et le module fixé $E_\beta \cap \varpi_0^{s'} \cdot O_0^{r-h_0}$.

En définitive, le volume V' de l'ouvert des vecteurs colonnes c_β, $\beta \notin \mathcal{B}$, qui vérifient les conditions (1), (2), (3) et (4) (les autres vecteurs colonnes c_β, $\beta \in \mathcal{B}$, étant donnés) ne diffère du volume V de l'ouvert défini par les seules conditions (1), (2) et (3) que par une constante multiplicative, et la démonstration du lemme II.12 est ramenée au lemme facile suivant :

Lemme II.14. *– Les entiers r, h_0 et $m \geq 1$ étant fixés, on considère un entier variable $s' \geq m$ ainsi qu'une famille d'entiers variables $v_{\alpha,d}$, $0 \leq \alpha < r$, $1 \leq d \leq r - \alpha$, vérifiant $0 \leq v_{\alpha,d} \leq s' + m$.*

On considère le volume V de l'ouvert des familles de vecteurs $\ell_1, \dots, \ell_r$ dans des sous-espaces fixés (définis par l'annulation de certaines coordonnées) de $O_0^{r-h_0}$ tels que, si $E_{r-1}, \dots, E_0$ désignent les sous-modules de $(O_0/\varpi_0^{s'+m})^{r-h_0}$ engendrés par ℓ_r, $(\ell_r, \ell_{r-1}), \dots, (\ell_r, \dots, \ell_1)$, on ait :

- *les classes de congruence modulo ϖ_0^m de $\ell_1, \dots, \ell_r$ sont fixées,*
- *pour tout α, $1 \leq \alpha \leq r$, et si la valuation $0(\ell_\alpha)$ de ℓ_α est $\leq s'$, la classe de congruence modulo ϖ_0^m de $\varpi_0^{-0(\ell_\alpha)} \ell_\alpha$ est fixée,*
- *pour tout α, la filtration croissante de $(O_0/\varpi_0^m)^{r-h_0}$ définie par les images des $(E_\alpha \cap \varpi_0^v \cdot O_0^{r-h_0})/(E_\alpha \cap \varpi_0^{v+m} \cdot O_0^{r-h_0})$, $0 \leq v \leq s'$, est fixée,*
- *pour tout α, $0 \leq \alpha < r$, tout d, $1 \leq d \leq r - \alpha$ et tout v, $0 \leq v < s' + m$, l'inégalité $v \leq v_{\alpha,d}$ est vérifiée si et seulement si*

$$\dim \left(E_\alpha \cap \varpi_0^v \cdot O_0^{r-h_0} / E_\alpha \cap \varpi_0^{v+1} \cdot O_0^{r-h_0} \right) \geq d \,.$$

Alors il existe un ensemble fini d'inégalités de la forme

$$v_{\alpha,d} - v_{\alpha',d'} \geq c \,,$$

$$v_{\alpha,d} \geq c \,, \ s' - v_{\alpha,d} \geq c$$

(où les c sont des entiers fixés) tels que dans chacune des parties du réseau des $(s' \,;\, v_{\alpha,d})$ définies en demandant que chacune de ces inégalités soient vérifiées ou ne le soit pas, le volume V s'écrive

$$\sum_\iota c_\iota \, q^{-\left(\sum\limits_{\alpha,d} m_{\alpha,d,\iota} v_{\alpha,d} + m_\iota s'\right)}$$

où les $m_{\alpha,d,\iota}$ et m_ι sont des entiers fixés et les c_ι sont des constantes. $\square$

e) Allure des nombres de Lefschetz

Sont toujours fixés le niveau $N \hookrightarrow X$, le point 0 de N de multiplicité m_0 et un “modèle” $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}}$, autrement dit un point de $\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{r,N}$, qui n’a pas de pôle mais a un zéro en 0. Nous pouvons maintenant démontrer :

Théorème II.15. *– Pour tout polygone de troncature $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ assez convexe en fonction du niveau N, il existe un ensemble fini de constantes c_ι, d’entiers $m_\iota \geq 0$, de scalaires λ_ι et de représentations automorphes cuspidales π^ι de rangs $r_\iota \leq r$ non ramifiées sur $X - N$ telles qu’on ait la formule suivante :*

Pour tout point géométrique $\overline{\infty} \in (X-N)(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus d’une place $\infty \in |X-N|$ et pour tout multiple assez grand $s = \deg(\infty)s'$ de $\deg(\infty)$ et $\deg(0)h_0$, le nombre de Lefschetz

$$\mathrm{Lef}_{N,\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}},\overline{\infty}}^{r,\overline{p}\leq p}(\mathrm{Frob}^s)$$

est égal à

$$\sum_\iota c_\iota\, s^{m_\iota}\, \lambda_\iota^s \big(z_1(\pi_\infty^\iota)^{-s'} + \cdots + z_{r_\iota}(\pi_\infty^\iota)^{-s'}\big).$$

Démonstration : Elle est semblable à celle du théorème I.13.

On part de l’énoncé du théorème II.10.

Puis on écrit la moyenne de la suite périodique

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto \mathrm{Tr}_n^{\leq p}\left(f_\infty^{-s'} \otimes \mathbb{1}_{K_{N'}^{\infty,0}} \otimes f_{h_0,m_0}^s\right)$$

sous forme spectrale, en appliquant la formule des traces d’Arthur-Selberg (théorème 12’ du paragraphe VI.2f de [Lafforgue, 1997]).

Dans l’expression spectrale obtenue, la dépendance des termes de traces en la place ∞ et s' est donnée par la proposition I.4 et le corollaire I.8, exactement comme pour le théorème I.9.

D’autre part, la dépendance en s à la place 0 est précisée par la proposition II.11 ci-dessus.

Il reste à déplacer les contours d’intégration et à calculer les résidus qui apparaissent, ce qui se fait grâce au lemme I.11. □

Chapitre III

Compactifications des champs de chtoucas

Dans l'article [Lafforgue, 1998], on a construit des compactifications des champs de chtoucas de rang r sans structures de niveau qui généralisent celles de Drinfeld en rang $r = 2$. Ce sont les champs de chtoucas itérés $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$. Ils sont propres et lisses sur $X \times X$ et leurs bords sont des diviseurs à croisements normaux relatifs dont les strates classifient des familles de chtoucas de rangs strictement plus petits que r. Cette dernière propriété est essentielle dans la démonstration par récurrence de la correspondance de Langlands que nous allons exposer.

Pour $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N$ un niveau, c'est-à-dire un sous-schéma fermé fini de la courbe X, on peut définir des compactifications $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ des champs $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ de chtoucas avec structures de niveau N par normalisation au-dessus de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X - N) \times (X - N)$. Elles apparaissent aussi comme produits fibrés dans des carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_N^r \arrow[d] \\
\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X - N) \times (X - N) \arrow[r, "\cdot\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N"] & \mathcal{C}^{r,N}
\end{tikzcd}$$

où $\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N$ désigne le morphisme lisse de “restriction” des chtoucas itérés de X à N et $\mathcal{C}_N^r$ est le prolongement par normalisation au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$ du revêtement de Lang.

Chaque $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ est lisse sur $\mathcal{C}_N^r \times (X - N) \times (X - N)$ mais $\mathcal{C}_N^r$ n'est pas lisse. On exhibe toutefois un ouvert naturel $\mathcal{C}'^{r,N}$ dans $\mathcal{C}^{r,N}$ tel que les ouverts images réciproques $\mathcal{C}_N'^{\,r}$ dans $\mathcal{C}_N^r$ et $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ sont lisses. Ces derniers sont très importants et on vérifiera au chapitre V qu'ils sont stabilisés par les correspondances de Hecke.

Dans le dernier paragraphe et bien qu'en définitive cela ne soit pas nécessaire pour la suite, on construit des résolutions des singularités $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ des champs $\mathcal{C}_N^r$ dans le cas de niveaux N sans multiplicités. Par un simple changement de base, cela induit des résolutions des singularités $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$

des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ qui donc sont propres et lisses sur $(X-N)\times(X-N)$ et dont les bords sont des diviseurs à croisements normaux relatifs.

1) Les compactifications sans niveau

On rappelle dans ce paragraphe le procédé de construction et les principales propriétés des compactifications $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ des champs de chtoucas sans structures de niveau, tels qu'exposés dans l'article [Lafforgue, 1998]. On part du schéma des "homomorphismes complets" vu comme prolongement du schéma en groupes GL_r.

a) Le schéma des homomorphismes complets

Pour $r\geq 2$ un entier, on considère la suite exacte de tores

$$1\to\mathbb{G}_m^2\to\mathbb{G}_m^{r+1}\to\mathbb{G}_m^{r-1}\to 1$$

où $\mathbb{G}_m^2\to\mathbb{G}_m^{r+1}$ est $(\lambda_0,\lambda_1)\mapsto(\lambda_0\lambda_1^i)_{0\leq i\leq r}$ et $\mathbb{G}_m^{r+1}\to\mathbb{G}_m^{r-1}$ est $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}\mapsto(\lambda_{i-1}\lambda_i^{-2}\lambda_{i+1})_{1\leq i<r}$. Elle permet d'identifier le quotient $\mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m^2$ au tore $\mathcal{A}_\emptyset^{r,1}=\mathbb{G}_m^{r-1}$ de la variété torique $\mathcal{A}^{r,1}=\mathbb{A}^{r-1}$.

Dans $\mathcal{A}^{r,1}=\mathbb{A}^{r-1}$, les orbites de $\mathcal{A}_\emptyset^{r,1}$ sont naturellement indexées par les partitions $\underline{r}=(r_1,\dots,r_k)$, $r_1+\cdots+r_k=r$, de l'entier r. Ce sont les sous-schémas localement fermés $\mathcal{A}_{\underline{r}}^{r,1}$ constitués des points dont les coordonnées d'indices $r_1+\cdots+r_e$, $1\leq e<k$, sont nulles et les autres sont inversibles ; chacune contient un unique point $\alpha_{\underline{r}}$ dont toutes les coordonnées valent 0 ou 1.

On note encore $\mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m$ le quotient de $\mathbb{G}_m^{r+1}$ par $\mathbb{G}_m$ plongé diagonalement ; il agit sur $\mathcal{A}^{r,1}$ via son quotient $\mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m^2\cong\mathcal{A}_\emptyset^{r,1}$.

Proposition III.1. – *Pour tout entier $r\geq 2$, notons $\Omega^{r,1}$ l'adhérence schématique dans $\prod\limits_{1\leq s\leq r}(\mathrm{End}(\Lambda^s\mathbb{A}^r)-\{0\})$ de $\mathrm{GL}_r\times\mathbb{G}_m^{r-1}$ plongé par $(u,(\ell_t)_{1\leq t<r})\mapsto\left(\left(\prod\limits_{t<s}\ell_t^{(s-t)}\right)\cdot\Lambda^s u\right)_{1\leq s<r}$. Le schéma $\Omega^{r,1}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\Omega^{r,1}$ *est muni de deux actions à gauche et à droite de* GL_r *et d'une action du tore* $\mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m$ *qui commutent entre elles.*

(ii) $\Omega^{r,1}$ *est muni d'un morphisme équivariant* (*relativement à ces actions et à l'action triviale de* GL_r *sur* $\mathcal{A}^{r,1}$)

$$\Omega^{r,1}\to\mathcal{A}^{r,1}$$

qui est lisse de dimension relative r^2.

(iii) *La fibre* $\mathrm{Gr}_\emptyset^{r,1}$ *de* $\Omega^{r,1}$ *au-dessus du point unité* $\alpha_\emptyset$ *du tore* $\mathcal{A}_\emptyset^{r,1}$ *s'identifie à* GL_r.

Et plus généralement, si $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_k)$*,* $r_1 + \cdots + r_k = r$*, est une partition de l'entier* r*, la fibre* $\mathrm{Gr}_{\underline{r}}^{r,1}$ *de* $\Omega^{r,1}$ *au-dessus du point marqué* $\alpha_{\underline{r}}$ *de l'orbite* $\mathcal{A}_{\underline{r}}^{r,1}$ *classifie naturellement les familles constituées de*

- *une filtration décroissante* $\mathbb{A}^r = \overline{F}_0 \supsetneq \overline{F}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{F}_k = 0$ *de l'espace vectoriel* $\mathbb{A}^r$ *de dimension* r *dont les sous-quotients sont de dimensions* $r_1, r_2, \ldots, r_k$*,*
- *une filtration croissante* $0 = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k = \mathbb{A}^r$ *de* $\mathbb{A}^r$ *dont les sous-quotients sont de dimensions* $r_1, r_2, \ldots, r_k$*,*
- *des isomorphismes* $\overline{F}_{e-1}/\overline{F}_e \xrightarrow{\sim} F_e/F_{e-1}$*,* $1 \leq e \leq k$*.* □

L'action du tore $\mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m$ sur $\Omega^{r,1}$ est libre. Le schéma quotient $\overline{\Omega}^{r,1}$ est muni de deux actions à droite et à gauche de PGL_r et d'un morphisme lisse de dimension $r^2 - 1$ sur le "champ torique" $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$ quotient de la variété torique $\mathcal{A}^{r,1} = \mathbb{A}^{r-1}$ par son tore $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1} = \mathbb{G}_m^{r-1}$. L'ouvert dense de $\overline{\Omega}^{r,1}$ image réciproque du point ouvert dense $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$ s'identifie à PGL_r et on montre que $\overline{\Omega}^{r,1}$ est projectif. C'est la compactification de De Concini et Procesi de $\mathrm{PGL}_r \cong (\mathrm{PGL}_r \times \mathrm{PGL}_r)/\,\mathrm{PGL}_r$.

Scindons la suite exacte de tores $1 \to \mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m^2 \to 1$ au moyen de $\mathbb{G}_m^{r+1} \to \mathbb{G}_m^2 : (\lambda_i)_{0 \leq i \leq r} \mapsto (\lambda_0, \lambda_1\lambda_0^{-1})$. Cela définit une section $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1} = \mathbb{G}_m^{r-1} \cong \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m^2 \to \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m$ et donc une action de $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$ sur $\Omega^{r,1}$ qui est libre et relève celle sur $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$. Le schéma quotient $\Omega^r = \Omega^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$ est muni de deux actions à droite et à gauche de GL_r et d'un morphisme lisse de dimension r^2 sur le champ torique $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$ et il contient GL_r comme ouvert dense. C'est ce qu'on appelle le schéma des homomorphismes complets.

b) Le champ des chtoucas itérés

Le schéma Ω^r des homomorphismes complets de rang r est muni de deux actions à droite et à gauche de GL_r commutant entre elles. Cela permet de parler aussi d'homomorphismes complets entre deux fibrés localement libres de rang r sur un schéma. Comme ces deux actions de GL_r respectent le morphisme $\Omega^r \to \mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$, tout homomorphisme complet entre fibrés de rang r sur un schéma induit un point du champ torique $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1} = \mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1} = (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}$ à valeurs dans ce schéma.

On peut rappeler que le champ quotient $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$ est le classifiant des fibrés inversibles munis d'une section globale (pas nécessairement inversible).

Un homomorphisme complet entre deux fibrés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ localement libres de rang r au-dessus de la donnée de $r-1$ fibrés inversibles $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{r-1}$ munis de sections globales $\ell_1, \ldots, \ell_{r-1}$ consiste en une famille d'homomorphismes partout non nuls

$$u_s \; : \Lambda^s \mathcal{E} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)} \longrightarrow \Lambda^s \mathcal{F} \,, \; 1 \leq s \leq r \,,$$

qui vérifient en particulier les relations

$$\Lambda^s u_1 = \Bigg(\prod_{t<s} \ell_t^{(s-t)} \Bigg) u_s \,, \; 1 \leq s \leq r \,.$$

On notera $\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F}$ les homomorphismes complets entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

A partir de maintenant, on se réfère à nouveau à la courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur le corps de base fini à q éléments $\mathbb{F}_q$.

Un chtouca itéré de rang r sur un schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) consiste en

- un fibré $\mathcal{E}$ localement libre de rang r sur $X \times S$,
- une modification (à droite) de $\mathcal{E}$ c'est-à-dire un diagramme

$$\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}''$$

  où $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ sont deux autres fibrés de rang r sur $X \times S$ et j, t sont des homomorphismes injectifs dont les conoyaux sont supportés par les graphes de deux morphismes "pôle" et "zéro" $\infty, 0 : S \to X$ et sont inversibles sur $\mathcal{O}_S$,
- des fibrés inversibles $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{r-1}$ sur S munis de sections globales $\ell_1, \ldots, \ell_{r-1}$,
- un homomorphisme complet

$$^\tau\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{E}''$$

  dont l'image dans $(\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset})(X \times S)$ provient via la projection $X \times S \to S$ du point $((\mathcal{L}_1^{q-1}, \ell_1^{q-1}), \ldots, (\mathcal{L}_{r-1}^{q-1}, \ell_{r-1}^{q-1}))$ de $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}(S) = (\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset})(S)$.

Dans la définition, on impose à ces données un certain nombre de conditions ouvertes (voir la définition 3 et le lemme 6 du paragraphe 1 de [Lafforgue, 1998]) que nous ne recopions pas ici.

On note $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ le champ classifiant les chtoucas itérés de rang r. Il est algébrique au sens d'Artin et localement de type fini. Ses groupes d'automorphismes en tous points sont finis mais attention ! certains ont une partie ramifiée si bien que $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ n'est pas algébrique au sens de Deligne-Mumford (contrairement à ce qui est dit dans l'introduction de [Lafforgue, 1998]).

A tout chtouca itéré $(\mathcal{E}; \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''; \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{r-1}; \ell_1, \ldots, \ell_{r-1}; {}^\tau\mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{E}'')$, on peut associer d'une part le pôle et le zéro de la modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ et d'autre part la famille des fibrés inversibles munis de sections $(\mathcal{L}_1, \ell_1), \ldots, (\mathcal{L}_{r-1}, \ell_{r-1})$. Cela définit deux morphismes

$$\begin{aligned} (\infty, 0) : \overline{\mathrm{Cht}^r} &\to X \times X \\ \text{et} \qquad \overline{\mathrm{Cht}^r} &\to \mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}. \end{aligned}$$

L'image réciproque du point ouvert dense $\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$ de $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$ est le champ Cht^r des chtoucas de rang r.

Le champ $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ n'est pas séparé. Cela rend possible l'énoncé suivant qui est le résultat principal de l'article [Lafforgue, 1998] :

Théorème III.2. – *Pour tout entier $d \in \mathbb{Z}$ et tout polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ assez convexe (en fonction de la courbe X), il existe dans le champ $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ des chtoucas itérés de rang r un ouvert $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ tel que*

(i) *le morphisme $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to X \times X$ est propre (en particulier séparé et de type fini),*
(ii) *le morphisme $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to X \times X \times \mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$ est lisse de dimension relative $2r - 2$,*
(iii) *l'intersection $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \cap \mathrm{Cht}^r$ est le champ $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ des chtoucas de rang r, de degré d et dont le polygone canonique $\overline{p}$ est majoré par p.*

□

Le champ $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ est muni d'une action par produit tensoriel du groupe de Picard de X identifié à $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times$ qui stabilise les ouverts $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}} = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$.

Pour $a \in \mathbb{A}^\times$ un idèle de degré non nul, on dispose donc de

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\leq d\leq r|\deg(a)|} \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$$

qui est une compactification de $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ lisse sur $X \times X \times \mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$.

c) Description des strates de bord

Pour $d \in \mathbb{Z}$ un degré et $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone de troncature (assez convexe en fonction de X), nous rappelons comment décrire les strates de bord de la compactification $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ de $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$.

Dans la variété torique $\mathcal{A}^{r,1} = \mathbb{A}^{r,1}$, les orbites du tore $\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset} = \mathbb{G}_m^{r-1}$ sont indexées par les partitions $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ de l'entier r et sont notées $\mathcal{A}^{r,1}_{\underline{r}}$; l'adhérence $\overline{\mathcal{A}^{r,1}_{\underline{r}}}$ de chaque $\mathcal{A}^{r,1}_{\underline{r}}$ est la réunion disjointe des $\mathcal{A}^{r,1}_{\underline{r}'}$ quand $\underline{r}'$ décrit l'ensemble des partitions de r qui raffinent $\underline{r}$.

Comme $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ est lisse sur $X \times X \times \mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$, on voit que pour toute partition $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ de r, l'image réciproque $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{\underline{r}}$ de $\mathcal{A}^{r,1}_{\underline{r}}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$

dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ est lisse sur $X \times X$ de dimension $2r - k - 1$; il en est de même de son adhérence $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ qui est l'image réciproque de $\overline{\mathcal{A}_{\underline{r}}^{r,1}}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$ et aussi la réunion disjointe des $\mathrm{Cht}_{\underline{r}'}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ quand $\underline{r}'$ décrit l'ensemble des partitions de r qui raffinent $\underline{r}$.

Modifiant légèrement les notations de [Lafforgue, 1998], on désigne par $\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ le produit fibré

$$\mathrm{Cht}^{\underline{r}} = \mathrm{Cht}^{r_1} \times_X {}^{r_2}\mathrm{Cht} \times \cdots \times_X {}^{r_k}\mathrm{Cht} ;$$

il classifie les familles constituées d'un chtouca à droite de rang r_1 et de $k-1$ chtoucas à gauche de rangs $r_2, \ldots, r_k$ tels que le zéro de chacun se confonde avec le pôle du suivant.

On note encore $\underline{r}^- = \{0, r_1, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$ et $\underline{r}^+ = \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + \cdots + r_k = r\}$. Tout élément s de $\underline{r}^-$ a un successeur $s^+ \in \underline{r}^+$ et tout élément s de $\underline{r}^+$ a un prédécesseur $s^- \in \underline{r}^-$.

On désigne par $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{\underline{r}}$ le champ qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe le groupoïde des familles $((\widetilde{\mathcal{E}}_s)_{s\in\underline{r}^+}, (\mathcal{L}_s)_{s\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+})$ où :

- $\widetilde{\mathcal{E}}_{r_1} = (\mathcal{E}_{r_1} \hookrightarrow \mathcal{E}'_{r_1} \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{E}_{r_1})$ est un chtouca à droite de rang r_1,
- pour $s > r_1$, $\widetilde{\mathcal{E}}_s = (\mathcal{E}_s \hookleftarrow \mathcal{E}'_s \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}_s)$ est un chtouca à gauche de rang $s - s^-$,
- les $\mathcal{L}_s$ sont des fibrés inversibles sur S munis d'isomorphismes sur $X \times S$

$${}^\tau\mathcal{E}_{s^+}/\mathcal{E}'_{s^+} \cong \begin{cases} \left(\mathcal{E}'_{r_1}/{}^\tau\mathcal{E}_{r_1}\right) \otimes {}^\tau\mathcal{L}_{r_1} & \text{si } s = r_1 , \\ \left(\mathcal{E}_s/\mathcal{E}'_s\right) \otimes {}^\tau\mathcal{L}_s & \text{si } s > r_1 . \end{cases}$$

Si $\mathrm{B}\mathbb{G}_m$ désigne le champ classifiant du tore $\mathbb{G}_m$, le champ $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{\underline{r}}$ s'inscrit dans un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{Cht}}^{\underline{r}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Cht}^{\underline{r}} \arrow[d] \\ \mathrm{B}\mathbb{G}_m^{k-1} \arrow[r, "\mathrm{Frob}"] & \mathrm{B}\mathbb{G}_m^{k-1} \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de droite associe à toute famille de chtoucas $(\widetilde{\mathcal{E}}_s)_{s\in\underline{r}^+}$ comme ci-dessus la famille de fibrés inversibles sur S

$$\begin{cases} \left({}^\tau\mathcal{E}_{r_1^+}/\mathcal{E}'_{r_1^+}\right) \otimes \left(\mathcal{E}'_{r_1}/{}^\tau\mathcal{E}_{r_1}\right)^{-1} \\ \left({}^\tau\mathcal{E}_{s^+}/\mathcal{E}'_{s^+}\right) \otimes \left(\mathcal{E}_s/\mathcal{E}'_s\right)^{-1} , \quad s \in \underline{r}^- , \quad s > r_1 . \end{cases}$$

Le morphisme $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{\underline{r}} \to \mathrm{Cht}^{\underline{r}}$, qui se déduit de $\mathrm{B}\mathbb{G}_m^{k-1} \xrightarrow{\mathrm{Frob}} \mathrm{B}\mathbb{G}_m^{k-1}$ par changement de base, est un morphisme de gerbe dont le groupe de structure est le noyau $\mathbb{G}_m^{k-1}[\tau]$ de $\mathbb{G}_m^{k-1} \xrightarrow{\mathrm{Frob}} \mathbb{G}_m^{k-1}$ lequel est fini et radiciel.

D'après les propositions 7 et 9 du paragraphe 1 de [Lafforgue, 1998], on a :

Proposition III.3. – *Etant donnés d un entier et $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone assez convexe (en fonction de X), associons à tout entier r', $0 \leq r' \leq r$, l'unique entier $d(r')$ tel que*

$$d(r') - \frac{r'}{r} d \in \,]p(r') - 1, p(r')].$$

Alors, pour toute partition $\underline{r} = (r_1, \dots, r_k)$ de r, la strate $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p} \leq p}$ s'écrit naturellement comme une gerbe dont le groupe de structure est plat, fini et radiciel sur l'ouvert $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{\underline{r},d,\overline{p}\leq p}$ de $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{\underline{r}}$ image réciproque de l'ouvert $\mathrm{Cht}^{\underline{r},d,\overline{p}\leq p}$ de $\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ classifiant les familles de chtoucas $\widetilde{\mathcal{E}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{E}}_k$ de rangs $r_1, r_2, \dots, r_k$ qui vérifient :

- *Le chtouca à droite $\widetilde{\mathcal{E}}_1 = (\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}'_1 \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{E}_1)$ est de degré $d_1 = d(r_1)$ et ses sous-objets $(\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}' \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{F})$ sont de degrés $\deg(\mathcal{F}) \leq p(\mathrm{rg}\mathcal{F}) + \frac{\mathrm{rg}\mathcal{F}}{r} d$; autrement dit, son polygone canonique est majoré par $r' \mapsto p_1(r') = d(r') - \frac{r'}{r_1} d(r_1)$, $0 \leq r' \leq r_1$.*
- *Pour $1 < e \leq k$, le chtouca à gauche $\widetilde{\mathcal{E}}_e = (\mathcal{E}_e \hookleftarrow \mathcal{E}'_e \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}_e)$ est de degré $d(r_1 + \cdots + r_e) - d(r_1 + \cdots + r_{e-1})$ et ses sous-objets $(\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}' \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{F})$ sont de degrés $\deg(\mathcal{F}) \leq p(r_1 + \cdots + r_{e-1} + \mathrm{rg}\mathcal{F}) + \frac{r_1 + \cdots + r_{e-1} + \mathrm{rg}\mathcal{F}}{r} d - d(r_1 + \cdots + r_{e-1}) - 1$ quand $\deg(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}')$ et de degrés $\deg(\mathcal{F}) \leq p(r_1 + \cdots + r_{e-1} + \mathrm{rg}\mathcal{F}) + \frac{r_1 + \cdots + r_{e-1} + \mathrm{rg}\mathcal{F}}{r} d - d(r_1 + \cdots + r_{e-1})$ quand $\deg(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}') + 1$. Autrement dit, le chtouca à droite associé $(\mathcal{E}'_e \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}_e \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{E}'_e)$ est de degré $d_e = d(r_1 + \cdots + r_e) - d(r_1 + \cdots + r_{e-1}) - 1$ et son polygone canonique est majoré par $r' \mapsto p_e(r') = d(r_1 + \cdots + r_{e-1} + r') - d(r_1 + \cdots + r_{e-1}) - 1 - \frac{r'}{r_e}(d(r_1 + \cdots + r_e) - d(r_1 + \cdots + r_{e-1}) - 1)$, $1 \leq r' \leq r_e$.* □

Pour tout entier $r' \geq 1$, le morphisme

$${}^{r'}\mathrm{Cht} \to \mathrm{Cht}^{r'} : (\mathcal{E} \hookleftarrow \mathcal{E}' \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}) \mapsto (\mathcal{E}' \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E} \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{E}')$$

est représentable, fini, surjectif et radiciel et il s'inscrit dans un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
{}^{r'}\mathrm{Cht} \arrow[r] \arrow[d, "{(\infty,0)}"'] & \mathrm{Cht}^{r'} \arrow[d, "{(\infty,0)}"] \\
X \times X \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X"] & X \times X
\end{tikzcd}$$

On obtient donc :

Corollaire III.4. – *Dans la situation et avec les notations de la proposition* III.3*, on a pour toute partition non triviale $\underline{r} = (r_1, \dots, r_k)$ de l'entier r un morphisme naturel*

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \to \mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1} \times_X \mathrm{Cht}^{r_2,d_2,\overline{p}\leq p_2} \times_{X,\mathrm{Frob}} \cdots \times_{X,\mathrm{Frob}} \mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k}$$

au-dessus de l'endomorphisme $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ de $X \times X$; c'est le composé d'un morphisme de gerbe dont le groupe de structure est plat, fini et radiciel et d'un morphisme représentable, fini, surjectif et radiciel. □

2) Le morphisme de restriction associé à un niveau

A partir de maintenant, on fixe un niveau c'est-à-dire un sous-schéma fermé fini $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N$ de la courbe X.

a) Définition et propriétés

Soit $\overline{\mathcal{C}}^{r,N}$ le champ qui associe à tout schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) le groupoïde des familles constituées de

- trois $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ localement libres de rang r sur $N\times S$,
- deux homomorphismes de $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules $\mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'' \xrightarrow{t} \mathcal{F}'$ dont les conoyaux admettent localement sur S un générateur comme $\mathcal{O}_S$-Modules,
- des fibrés inversibles $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{r-1}$ sur S munis de sections globales $\ell_1, \dots, \ell_{r-1}$,
- un homomorphisme complet

$$^{\tau}\mathcal{F} = (\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}''$$

  dont l'image dans $(\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset})(X\times S)$ provient via la projection $N\times S \to S$ du point $((\mathcal{L}_1^{q-1}, \ell_1^{q-1}), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}^{q-1}, \ell_{r-1}^{q-1}))$ de $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}(S) = (\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset})(S)$.

Le champ $\overline{\mathcal{C}}^{r,N}$ est algébrique au sens d'Artin. Il est muni d'un morphisme sur $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$ qui est lisse puisque le schéma Ω^r des homomorphismes complets est lisse sur $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset} = \mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$. On peut remarquer que l'image réciproque par ce morphisme de structure du point ouvert dense $\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$ n'est autre que le champ $\overline{\mathcal{C}}^{r,N}_{\emptyset}$ introduit dans le paragraphe 1a du chapitre II.

Les foncteurs

$$(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'', {}^{\tau}\mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{E}'') \mapsto$$
$$\big(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \to \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \leftarrow \mathcal{E}'' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N, {}^{\tau}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \Longrightarrow \mathcal{E}'' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N\big)$$

induisent des morphismes

$$\overline{\mathrm{Cht}^r} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}^{r,N}$$
$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}^{r,N}$$

qui commutent avec les morphismes de structure sur $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$. On les appellera morphismes de restriction des chtoucas itérés à N.

En associant à tout point $(\mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{F}' \xleftarrow{t} \mathcal{F}''; \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{r-1}; \ell_1, \dots, \ell_{r-1}; {}^{\tau}\mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}'')$ les déterminants de j et t, on définit un morphisme

$$\overline{\mathfrak{C}}^{r,N} \to \left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2$$

où $\mathbb{A}^N$ et $\mathbb{G}_m^N$ désignent les schémas déduits de $\mathbb{A}^1$ et $\mathbb{G}_m$ par restriction des scalaires à la Weil de $\mathcal{O}_N$ à $\mathbb{F}_q$.

Par ailleurs, on rappelle que N plongé diagonalement dans $X \times N$ et vu comme diviseur de Cartier définit un morphisme

$$X \to \mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N$$

qui est lisse de dimension relative 1.

Il est clair que les carrés

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \arrow[r, "\cdot\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N"] \arrow[d, "(\infty,0)"'] & \overline{\mathfrak{C}}^{r,N} \arrow[d] \\
X \times X \arrow[r] & \left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Nous allons prouver :

Proposition III.5. – *Si le polygone de troncature p est assez convexe en fonction (de X et) de N, le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to \overline{\mathfrak{C}}^{r,N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X \times X)$$

est lisse de dimension relative $2r-2$.

Démonstration : Nous savons déjà d'après le lemme II.1 que pour tout entier $r' \leq r$ les morphismes de restriction à N

$$\mathrm{Cht}^{r'} \longrightarrow \overline{\mathfrak{C}}_{\emptyset}^{r',N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X \times X)$$
$${}^{r'}\mathrm{Cht} \longrightarrow {}^{r'}\overline{\mathfrak{C}}_{\emptyset}^{N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X \times X)$$

sont lisses de dimension relative $2r'-2$.

En utilisant la proposition III.3, nous allons voir au paragraphe suivant que cela implique le résultat annoncé. □

b) Vérification de ce que le morphisme de restriction est lisse

Démontrons la proposition III.5.

Les champs $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ et $\overline{\mathfrak{C}}^{r,N}$ sont lisses sur $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$ et $X \times X$ est lisse sur $(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N)^2$. En notant $\overline{\mathfrak{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$ les fibres de $\overline{\mathfrak{C}}^{r,N}$ au-dessus des strates

$\mathcal{A}_{\underline{r}}^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$ de $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,1}$, il suffit donc de prouver que pour toute partition $\underline{r}$ de l'entier r, le morphisme

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \to \overline{\mathfrak{C}}_{\underline{r}}^{r,N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X \times X)$$

est lisse de dimension relative $2r-2$.

Fixons une telle partition $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ et considérons les points $(\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \leftarrow \mathcal{F}''; \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{r-1}; \ell_1, \ldots, \ell_{r-1}; {}^\tau\mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}'')$ du champ $\overline{\mathfrak{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$ à valeurs dans les schémas S sur $\mathbb{F}_q$. Pour tout $s \notin \underline{r}^+$, on peut identifier $\mathcal{L}_s$ muni de la section inversible ℓ_s au fibré canonique $\mathcal{O}_S$ muni de la section 1. Et l'homomorphisme complet ${}^\tau\mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}''$ consiste en la donnée de

- une filtration croissante $0 = \mathcal{F}_0'' \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_s'' \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_r'' = \mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}''$ par des $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules $\mathcal{F}_s''$ localement libres de rangs s, $s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+$, tels que les quotients $\mathcal{F}''/\mathcal{F}_s''$ soient aussi localement libres,
- une filtration décroissante ${}^\tau\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{\mathcal{F}}_s \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{\mathcal{F}}_r = 0$ de ${}^\tau\mathcal{F}$ par des $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules $\overline{\mathcal{F}}_s$ localement libres, $s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+$, tels que les quotients $\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_s$ soient localement libres de rangs s,
- une famille d'isomorphismes

$$\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s \otimes {}^\tau\Big(\bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\Big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_s/\mathcal{F}_{s^-} \otimes \Big(\bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\Big),\ s \in \underline{r}^+ .$$

On note $\widetilde{\mathfrak{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$ le sous-champ ouvert de $\overline{\mathfrak{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$ qui est défini par les trois conditions suivantes :

(i) Chaque $\mathcal{F}_s' = \mathcal{F}_s''$, $s \in \underline{r}^-$, est plongé dans $\mathcal{F}'$ via $\mathcal{F}'' \to \mathcal{F}'$ et les quotients $\mathcal{F}'/\mathcal{F}_s'$ sont localement libres de rangs $r-s$.

(ii) Notant aussi $\mathcal{F}_r' = \mathcal{F}'$, chaque $\mathcal{F}_s'$, $s \in \underline{r}^+$, s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{F}')$ si bien que les images réciproques $\mathcal{F}_s$ des $\mathcal{F}_s'$ via $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ (et aussi $\mathcal{F}_0 = 0$) sont localement libres ainsi que les quotients $\mathcal{F}/\mathcal{F}_s$.

(iii) Pour tout $s \in \underline{r}^+$, on a

$$\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + {}^\tau\mathcal{F}_s = {}^\tau\mathcal{F}$$

et ${}^\tau\mathcal{F}/(\overline{\mathcal{F}}_s + {}^\tau\mathcal{F}_s)$ admet un générateur comme $\mathcal{O}_S$-Module localement sur S.

Ces conditions ouvertes sont le reflet dans N de celles introduites dans le lemme 6 du paragraphe 1c de [Lafforgue, 1998] pour définir les chtoucas itérés. Cela signifie que le morphisme de restriction à N

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \to \overline{\mathfrak{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$$

se factorise à travers l'ouvert $\widetilde{\mathfrak{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$.

Continuons notre description des points de $\widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$.

On note $\mathcal{A}_{r_1} = \mathcal{F}_{r_1}$ et $\mathcal{A}'_{r_1} = \mathcal{F}'_{r_1} = \mathcal{F}''_{r_1}$. Ils sont munis des homomorphismes $\mathcal{A}_{r_1} \to \mathcal{A}'_{r_1}$ et ${}^\tau\mathcal{A}_{r_1} \to {}^\tau\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_{r_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}''_{r_1} = \mathcal{A}'_{r_1}$.

Et pour $s \in \underline{r}^+$, $s > r_1 = 0^+$, on note $\mathcal{A}_s = \mathcal{F}_s/\mathcal{F}_{s^-} = \mathcal{F}'_s/\mathcal{F}'_{s^-}$ et $\mathcal{A}'_s = \overline{\mathcal{F}}_{s^-} \cap {}^\tau\mathcal{F}_s = \mathrm{Ker}[\overline{\mathcal{F}}_{s^-} \oplus {}^\tau\mathcal{F}_s \to {}^\tau\mathcal{F}]$. Ce sont des $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules localement libres de rangs $s - s^-$ et ils sont munis d'homomorphismes $\mathcal{A}'_s = \overline{\mathcal{F}}_{s^-} \cap {}^\tau\mathcal{F}_s \to {}^\tau\mathcal{F}_s/{}^\tau\mathcal{F}_{s^-} = {}^\tau\mathcal{A}_s$ et $\mathcal{A}'_s \otimes {}^\tau\Big(\bigotimes\limits_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\Big) \to$

$$\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s \otimes {}^\tau\Big(\bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\Big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}''_s/\mathcal{F}''_{s^-} \otimes \Big(\bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\Big) \to \mathcal{A}_s \otimes \Big(\bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\Big).$$

De plus, pour $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
&\det\big(\overline{\mathcal{F}}_s \oplus {}^\tau\mathcal{F}_s \to {}^\tau\mathcal{F}\big)\\
\cong&\det\big((\overline{\mathcal{F}}_s \oplus {}^\tau\mathcal{F}_s) \oplus (\overline{\mathcal{F}}_s \cap {}^\tau\mathcal{F}_{s^+}) \to (\overline{\mathcal{F}}_s \oplus {}^\tau\mathcal{F}_{s^+})\big)\\
\cong&\det\big(\overline{\mathcal{F}}_s \cap {}^\tau\mathcal{F}_{s^+} \to {}^\tau\mathcal{F}_{s^+}/{}^\tau\mathcal{F}_s\big)\\
\cong&\det\big(\mathcal{A}'_{s^+} \to {}^\tau\mathcal{A}_{s^+}\big)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\det\big(\overline{\mathcal{F}}_s \oplus {}^\tau\mathcal{F}_s \to {}^\tau\mathcal{F}\big)\\
\cong&\det\big((\overline{\mathcal{F}}_s \oplus {}^\tau\mathcal{F}_s) \oplus (\overline{\mathcal{F}}_{s^-} \cap {}^\tau\mathcal{F}_s) \to (\overline{\mathcal{F}}_{s^-} \oplus {}^\tau\mathcal{F}_s)\big)\\
\cong&\det\big(\overline{\mathcal{F}}_{s^-} \cap {}^\tau\mathcal{F}_s \to \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s\big)\\
=&\begin{cases}\det\big({}^\tau\mathcal{A}_{r_1} \to \mathcal{A}'_{r_1}\big) & \text{si } s = r_1\,,\\ \det\left(\mathcal{A}'_s \to \mathcal{A}_s \otimes {}^{1-\tau}\left(\bigotimes\limits_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\right)\right) & \text{si } s > r_1\,.\end{cases}
\end{aligned}$$

Si on pose $\mathcal{B}_s = \mathcal{A}_s \otimes \Big(\bigotimes\limits_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\Big)$ et $\mathcal{B}'_s = \mathcal{A}'_s \otimes {}^\tau\Big(\bigotimes\limits_{\substack{t\in\underline{r}^+\\ t<s}} \mathcal{L}_t\Big)$ pour tout $s \in \underline{r}^+$, on définit alors un morphisme de $\widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$ vers le champ algébrique $\overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N} = \overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{r_1,N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} {}^{r_2}\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{N} \times \cdots \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} {}^{r_k}\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{N}$ qui à tout schéma S associe le groupoïde des familles ainsi constituées :

- des $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules $\mathcal{B}_s$ et $\mathcal{B}'_s$, $s \in \underline{r}^+$, localement libres de rangs $s - s^-$,
- des homomorphismes $\mathcal{B}_{r_1} \to \mathcal{B}'_{r_1}$, ${}^\tau\mathcal{B}_{r_1} \to \mathcal{B}'_{r_1}$ et $\mathcal{B}'_s \to \mathcal{B}_s$, $\mathcal{B}'_s \to {}^\tau\mathcal{B}_s$ pour $s > r_1 = 0^+$, dont les conoyaux admettent un générateur comme $\mathcal{O}_S$-Modules localement sur S, et tels que pour tout $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$ le déterminant de $\mathcal{B}'_{s^+} \to {}^\tau\mathcal{B}_{s^+}$ est muni d'un isomorphisme avec celui de $\mathcal{B}'_s \to \mathcal{B}_s$ si $s > r_1$ [resp. de ${}^\tau\mathcal{B}_{r_1} \to \mathcal{B}'_{r_1}$ si $s = r_1$].

On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\le p} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X\times X) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{Cht}^{\underline{r},d,\overline{p}\le p} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X\times X)
\end{array}$$

où on rappelle que $\mathrm{Cht}^{\underline{r},d,\overline{p}\le p}$ est un ouvert de $\mathrm{Cht}^{\underline{r}} = \mathrm{Cht}^{r_1} \times_X {}^{r_2}\mathrm{Cht} \times_X \cdots \times_X {}^{r_k}\mathrm{Cht}$ et que $\overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N} \times_{(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N)^2} (X\times X) = X \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} \overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{r_1,N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} {}^{r_2}\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{N} \times \cdots \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} {}^{r_k}\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} X$. D'après le lemme II.1, la seconde flèche horizontale $\mathrm{Cht}^{\underline{r},d,\overline{p}\le p} \to \overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N} \times_{(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N)^2} (X\times X)$ est lisse de dimension relative $(2r_1-2)+\cdots+(2r_k-2)+(k-1) = 2r-k-1$.

D'autre part, on a le lemme suivant :

Lemme III.6. – *Le groupe G des automorphismes d'un point géométrique $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}} = (\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \leftarrow \mathcal{F}''; (\mathcal{L}_s)_{s\in \underline{r}^-\cap\underline{r}^+}, {}^\tau\mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}'')$ de $\widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$ au-dessus de son image dans $\overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N}$ s'inscrit dans une suite exacte naturelle*

$$1 \to \mathbb{G}_m^{k-1}[\tau] \times U[\tau] \to G \to G' \to 1$$

où $\mathbb{G}_m^{k-1}[\tau]$ et $U[\tau]$ désignent les noyaux de Frob *dans $\mathbb{G}_m^{k-1}$ et le groupe unipotent U associé à $\mathcal{F}$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_s)$ et où G' est composé de $k-1$ facteurs égaux à $\mathbb{G}_m$ ou $\mathbb{A}^1$.*

Démonstration : Le groupe G est le groupe des automorphismes de $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}}$ qui induisent l'identité du point image dans $\widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$. Celui-ci consiste en des $\mathcal{B}_s$ et $\mathcal{B}'_s$, $s\in\underline{r}^+$, reliés par différents homomorphismes. De plus, le point $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}}$ définit des isomorphismes entre les déterminants

$$\det\left(\mathcal{B}'_{s^+} \to {}^\tau\mathcal{B}_{s^+}\right) \cong \begin{cases} \det\left({}^\tau\mathcal{B}_{r_1}\otimes{}^\tau\mathcal{L}_{r_1} \to \mathcal{B}'_{r_1}\otimes{}^\tau\mathcal{L}_{r_1}\right) & \text{si } s=r_1\,,\\ \det\left(\mathcal{B}'_s\otimes{}^\tau\mathcal{L}_s \to \mathcal{B}_s\otimes{}^\tau\mathcal{L}_s\right) & \text{si } s>r_1 \end{cases}$$

indexés par l'ensemble $\{s\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+\}$ de cardinal $k-1$. Notons I [resp. J] le sous-ensemble des s tels que les deux déterminants ci-dessus soient nuls [resp. non nuls].

Le facteur $\mathbb{G}_m^{k-1}[\tau]$ est le groupe des automorphismes des $\mathcal{L}_s$, $s\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+$, qui induisent l'identité sur les ${}^\tau\mathcal{L}_s$.

Le quotient de G par $\mathbb{G}_m^{k-1}[\tau]\times U[\tau]$ contient un facteur $\mathbb{G}_m$ indexé par chaque élément $s\in I$ (c'est le groupe des automorphismes de ${}^\tau\mathcal{L}_s$ qui respectent l'isomorphisme entre déterminants nuls ci-dessus). Et il contient comme unique autre facteur le groupe $\mathrm{Aut}({}^\tau\mathcal{F})$ des automorphismes de ${}^\tau\mathcal{F}$ qui respectent les deux filtrations $({}^\tau\mathcal{F}_s)$ et $(\overline{\mathcal{F}}_s)$ et induisent l'identité sur les ${}^\tau\mathcal{F}_s/{}^\tau\mathcal{F}_{s^-}$, $\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s$ et $\overline{\mathcal{F}}_{s^-}\cap{}^\tau\mathcal{F}_s$ puisque ceux-ci peuvent être reconstitués par la donnée des $\mathcal{B}_s$, $\mathcal{B}'_s$ et $\mathcal{L}_t$. On est ramené à montrer que $\mathrm{Aut}({}^\tau\mathcal{F})$ est composé de $|J|$ facteurs égaux à $\mathbb{A}^1$.

Pour tout $s \in I$, ${}^\tau\mathcal{F}$ se décompose en somme directe ${}^\tau\mathcal{F} = {}^\tau\mathcal{F}_s \oplus \overline{\mathcal{F}}_s$ si bien qu'il suffit de traiter le cas où $I = \emptyset$ et $J = \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$. Considérant $r^- = r_1 + \cdots + r_{k-1}$ et $\mathrm{Aut}({}^\tau\mathcal{F}_{r^-})$ le groupe associé à ${}^\tau\mathcal{F}_{r^-}$ muni des deux filtrations par les ${}^\tau\mathcal{F}_s$ et les ${}^\tau\mathcal{F}_{r^-} \cap \overline{\mathcal{F}}_s$, $s < r^-$, (avec la remarque que ${}^\tau\mathcal{F}_{r^-}/{}^\tau\mathcal{F}_{r^-} \cap \overline{\mathcal{F}}_s \cong {}^\tau\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_s$ et ${}^\tau\mathcal{F}_{r^-} \cap \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/{}^\tau\mathcal{F}_{r^-} \cap \overline{\mathcal{F}}_s \cong \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s$) on a un homomorphisme surjectif de restriction de ${}^\tau\mathcal{F}$ à ${}^\tau\mathcal{F}_{r^-}$

$$\mathrm{Aut}({}^\tau\mathcal{F}) \to \mathrm{Aut}\big({}^\tau\mathcal{F}_{r^-}\big)\,.$$

Son noyau est constitué des éléments de la forme

$$\mathrm{Id} + u\,,$$

où u est un endomorphisme de ${}^\tau\mathcal{F}$ vérifiant

$$\begin{aligned} &u({}^\tau\mathcal{F}_{r^-}) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(\overline{\mathcal{F}}_{r^-}) = 0\,,\\ &u({}^\tau\mathcal{F}) \subseteq {}^\tau\mathcal{F}_{r^-}\,,\\ &u({}^\tau\mathcal{F}) \subseteq \overline{\mathcal{F}}_{r^-} \qquad \big(\text{puisque } {}^\tau\mathcal{F} = {}^\tau\mathcal{F}_{r^-} + \overline{\mathcal{F}}_{(r^-)^-}\big)\,. \end{aligned}$$

Comme ${}^\tau\mathcal{F}/({}^\tau\mathcal{F}_{r^-} + \overline{\mathcal{F}}_{r^-})$ et ${}^\tau\mathcal{F}_{r^-} \cap \overline{\mathcal{F}}_{r^-}$ sont de dimension 1, ce noyau est isomorphe à $\mathbb{A}^1$. On conclut par récurrence sur le nombre $k-1$ d'éléments de $\underline{r}^- \cap \underline{r}^+$. □

On peut maintenant donner :

Fin de la démonstration de la proposition III.5 : Comme $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\le p}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N} \times_{(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N)^2} (X \times X)$ sont lisses, il suffit de prouver que les fibres géométriques non vides de

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\le p} \to \widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X \times X)$$

sont lisses de dimension $2r-2$. On sait déjà qu'elles sont de dimension $\ge 2r-2$ car celles dans la strate générique indexée par la partition triviale $\emptyset$ sont lisses de dimension $2r-2$.

Le morphisme $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\le p} \to \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p}$ est le composé d'un morphisme de gerbe déduit par changement de base de $\mathrm{B}\mathbb{G}_m^{k-1} \xrightarrow{\mathrm{Frob}} \mathrm{B}\mathbb{G}_m^{k-1}$ et d'un autre morphisme de gerbe dont le groupe de structure $\mathcal{U}[\tau]$ est plat, fini et radiciel. En un point $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''\,;(\mathcal{L}_s)_{s\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+}, {}^\tau\mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{E}'')$ de $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\le p}$, $\mathcal{U}[\tau]$ est le noyau de Frob dans le groupe unipotent $\mathcal{U}$ des automorphismes de $\mathcal{E}$ muni de sa filtration canonique $(\mathcal{E}_s)_{s\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+}$.

Il résulte des conditions de troncature qui définissent le champ $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\le p}$ à partir du polygone p (voir la proposition 9 et le lemme 10 de [Lafforgue, 1998] paragraphe 1d) que si p est assez convexe, les $\mathcal{E}_s$ figurent dans la filtration canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ et que les ruptures de pentes $\mu^-(\mathcal{E}_s) - \mu^+(\mathcal{E}/\mathcal{E}_s)$ de son polygone canonique en les entiers $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$ sont arbitrairement grandes. On en déduit que si le polygone p est assez convexe en fonction de (X et) N, l'homomorphisme de restriction de X à N

$$\mathcal{U} \to U$$

est surjectif et il en est de même de $\mathcal{U}[\tau] \to U[\tau]$.

Comme les fibres géométriques de

$$\mathrm{Cht}^{\underline{r},d,\overline{p}\leq p} \to \overline{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X \times X)$$

sont lisses de dimension $2r-k-1 = (2r-2)-(k-1)$ et d'après le lemme III.6, les fibres géométriques de

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \to \widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N} \times_{\left(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N\right)^2} (X \times X)$$

sont des fermés dans des champs lisses de dimension $(2r-2)-(k-1)+(k-1) = (2r-2)$. Sachant que leur dimension est $\geq 2r-2$, on conclut que ce sont des réunions de composantes connexes, lisses de dimension $2r-2$. □

3) Compactifications avec niveau

Dans ce paragraphe, on met des structures de niveau $N = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_N$ sur les chtoucas itérés au moyen de carrés cartésiens dont la base est le morphisme de restriction au niveau N.

a) Structures de niveau définies par normalisation

Il existe un unique sous-champ ouvert $\widetilde{\mathcal{C}}^{r,N}$ de $\overline{\mathcal{C}}^{r,N}$ dont la trace dans chaque strate $\overline{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$ soit égale à $\widetilde{\mathcal{C}}_{\underline{r}}^{r,N}$.

Pour d un degré et $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone de troncature, le morphisme de restriction à N

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to \overline{\mathcal{C}}^{r,N}$$

se factorise à travers cet ouvert $\widetilde{\mathcal{C}}^{r,N}$.

On notera $\mathcal{C}^{r,N}$ l'ouvert de $\widetilde{\mathcal{C}}^{r,N}$ constitué des éléments qui n'ont ni pôle ni zéro dans N c'est-à-dire l'image réciproque du point générique $(\mathbb{G}_m^N/\mathbb{G}_m^N)^2$ de $(\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N)^2$. Son image réciproque dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ est $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$ et d'après la proposition III.5, le morphisme

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) \to \mathcal{C}^{r,N} \times (X-N)\times(X-N)$$

est lisse de dimension relative $2r-2$ si p est assez convexe en fonction de (X et) N.

Le champ $\mathcal{C}^{r,N}$ est muni d'un morphisme lisse sur le champ torique $\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset} = (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}$. L'image réciproque du point générique $\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}/\mathcal{A}^{r,1}_{\emptyset}$ est la strate ouverte dense $\mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ de $\mathcal{C}^{r,N}$ qui associe à tout schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) le groupoïde des $\mathcal{O}_{N\times S}$-Modules $\mathcal{F}$ localement libres de rang r munis d'un isomorphisme

$$^{\tau}\mathcal{F} = (\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}.$$

Il s'identifie au champ $\mathrm{GL}_r^N /^{\tau}/\mathrm{GL}_r^N$ quotient de GL_r^N (le groupe déduit de GL_r par restriction des scalaires à la Weil de $\mathcal{O}_N$ à $\mathbb{F}_q$) par l'action à droite de GL_r^N par conjugaison tordue

$$(u, g) \mapsto u^g = \tau(g)^{-1} \circ u \circ g\ .$$

En associant à tout schéma S le fibré trivial $\mathcal{O}^r_{N\times S}$ on définit un point $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \to \mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ et d'après le théorème 2(ii) du paragraphe I.3 de [Lafforgue, 1997], $\mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ est aussi le classifiant $\mathrm{BGL}_r(\mathcal{O}_N) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ du groupe fini $\mathrm{GL}_r^N(\mathbb{F}_q) = \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

On peut reformuler la définition I.2 en disant que le revêtement Cht^r_N de $\mathrm{Cht}^r \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$ est défini comme produit fibré dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cht}^r_N & \longrightarrow & \mathcal{C}^r_{N,\emptyset} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q = \mathrm{GL}_r^N\,/\,\mathrm{GL}_r^N \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{Cht}^r \times_{X\times X}(X-N)\times(X-N) & \longrightarrow & \begin{array}{l}\mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N) \\ \qquad = \mathrm{GL}_r^N /^{\tau}/\mathrm{GL}_r^N\end{array}
\end{array}$$

où $\mathrm{GL}_r^N\,/\,\mathrm{GL}_r^N \to \mathrm{GL}_r^N /^{\tau}/\mathrm{GL}_r^N$ est le quotient par GL_r^N de l'isogénie de Lang

$$\mathrm{GL}_r^N \to \mathrm{GL}_r^N\ : g \mapsto \tau(g)^{-1} \circ g\ .$$

Ceci amène à définir des structures de niveau N sur les chtoucas itérés en prolongeant l'isogénie de Lang au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$:

Proposition III.7. – *Soit $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{r,N}$ un champ algébrique représentable quasi-projectif sur $\mathcal{C}^{r,N}$ dont la restriction au-dessus de l'ouvert dense $\mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ s'identifie au revêtement de Lang $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset} \to \mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$.*

Alors pour tout degré d et tout polygone de troncature p assez convexe en fonction de (X et) N, le champ algébrique $\mathfrak{X}$ défini comme produit fibré dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{r,N}
\end{array}$$

vérifie les propriétés suivantes :

(i) *Il est représentable quasi-projectif sur* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p}} \times_{X\times X} (X-N) \times (X-N)$ *et sa restriction au-dessus de l'ouvert* $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p} \times_{X\times X} (X-N) \times (X-N)$ *s'identifie au revêtement étale galoisien* $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}$*. Si* $\underline{\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{r,N}}$ *est projectif* [*resp. fini*], *il est projectif* [*resp. fini*] *sur* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p}} \times_{X\times X} (X-N) \times (X-N)$ *et donc propre sur* $(X-N)\times(X-N)$.

(ii) *Il est lisse sur* $\mathcal{C} \times (X-N) \times (X-N)$*. Si* $\mathcal{C}$ *est lui-même lisse sur le champ torique* $\mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset$ *quotient d'une variété torique lisse* $\mathcal{A}$ *par son tore* $\mathcal{A}_\emptyset$ (*de telle façon que* $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset}$ *soit l'image réciproque de* $\mathcal{A}_\emptyset/\mathcal{A}_\emptyset$), *il est lisse sur* $\mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset \times (X-N) \times (X-N)$ *; autrement dit, il est lisse sur* $(X-N)\times(X-N)$ *et son bord* $\mathfrak{X} - \mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}$ *est un diviseur à croisements normaux relatifs.* □

Un choix naturel consiste à prolonger par normalisation de $\mathcal{C}^{r,N}_\emptyset$ à $\mathcal{C}^{r,N}$ le revêtement $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset}$. On pose :

Définition III.8. – *Soit* $\mathcal{C}^r_N$ *le champ algébrique normal représentable fini sur* $\mathcal{C}^{r,N}$ (*avec action de* $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$) *qui est la normalisation de* $\mathcal{C}^{r,N}$ *dans* $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset}$.

On notera $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$ *et on appellera champs de chtoucas itérés avec structures de niveau N les champs algébriques définis comme produits fibrés dans les carrés cartésiens :*

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}} & \longrightarrow & \mathcal{C}^r_N \\
\downarrow & & \downarrow \\
\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{r,N}
\end{array}$$

Ils sont représentables finis sur $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$ *et donc propres sur* $(X-N)\times(X-N)$ *et ils sont munis d'une action de* $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

D'autre part, ils sont lisses sur $\mathcal{C}^r_N \times (X-N)\times(X-N)$ (*si p est assez convexe en fonction de X et N*) *et en particulier normaux.*

Bien sûr, on notera aussi $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}} = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$ et $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\le d\le r|\deg(a)|} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$. Tous sont lisses sur $\mathcal{C}^r_N \times (X-N)\times(X-N)$ mais ils ne sont pas lisses sur $(X-N)\times(X-N)$ car $\mathcal{C}^r_N$ est singulier.

Dans le cas où N n'a pas de multiplicités, on construira au paragraphe c une résolution des singularités de $\mathcal{C}^r_N$ mais dans le cas général nous allons nous contenter d'expliciter dans le paragraphe b ci-dessous un ouvert de lissité dans $\mathcal{C}^r_N$ plus gros que $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset}$.

b) Un ouvert naturel de lissité

Le champ $\mathcal{C}^{r,N}$ associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde des familles constituées de

- un $\mathcal{O}_{N\times S}$-Module $\mathcal{F}$ localement libre de rang r sur $N \times S$,
- des fibrés inversibles $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{r-1}$ sur S munis de sections globales $\ell_1, \ldots, \ell_{r-1}$,
- un homomorphisme complet ${}^{\tau}\mathcal{F} = (\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ dont l'image dans $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}(N \times S)$ est $((\mathcal{L}_1^{\otimes(q-1)}, \ell_1^{q-1}), \ldots, (\mathcal{L}_{r-1}^{\otimes(q-1)}, \ell_{r-1}^{q-1}))$.

Un tel homomorphisme complet peut s'écrire comme une famille d'homomorphismes linéaires entre fibrés

$$u_s \ : {}^{\tau}\Big(\Lambda^s\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\Big) \to \Lambda^s\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}, \quad 1 \leq s \leq r\,,$$

qui sont non nuls en tout point géométrique de $N \times S$.

On définit un ouvert $\mathcal{C}'^{r,N}$ de $\mathcal{C}^{r,N}$ en demandant qu'en tout point géométrique de $N \times S$ aucun des u_s, $1 \leq s \leq r$, ne soit τ-nilpotent (ou, ce qui revient au même, que pour tout s, $\operatorname{Ker} u_s$ et ${}^{\tau}\operatorname{Im} u_s$ soient en somme directe).

D'autre part, on définit un champ $\mathcal{C}'^{r}_N$ représentable sur $\mathcal{C}^{r,N}$ en classifiant les façons de compléter les données ci-dessus $(\mathcal{F}\ ; (\mathcal{L}_1, \ell_1), \ldots, (\mathcal{L}_{r-1}, \ell_{r-1})\ ; {}^{\tau}\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F})$ par un homomorphisme complet

$$\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{O}^r_{N\times S}$$

dont l'image dans $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}(N \times S)$ est $((\mathcal{L}_1, \ell_1), \ldots, (\mathcal{L}_{r-1}, \ell_{r-1}))$ et qui, si on l'écrit sous la forme d'une famille d'homomorphismes linéaires

$$v_s \ : \Lambda^s\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)} \to \Lambda^s\big(\mathcal{O}^r_{N\times S}\big), \quad 1 \leq s \leq r\,,$$

vérifie les relations $\tau(v_s) = v_s \circ u_s$, $1 \leq s \leq r$.

La restriction de $\mathcal{C}'^{r}_N \to \mathcal{C}^{r,N}$ au-dessus de l'ouvert dense $\mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset} \subset \mathcal{C}^{r,N}$ s'identifie à l'isogénie de Lang $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset} \to \mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ puisqu'elle est définie par la condition que les sections $\ell_1, \ldots, \ell_{r-1}$ soient inversibles ou, ce qui revient au même, que u_1 et v_1 soient des isomorphismes. On a le lemme évident :

Lemme III.9. – *Le morphisme $\mathcal{C}'^{r}_N \to \mathcal{C}^{r,N}$ se factorise à travers l'ouvert $\mathcal{C}'^{r,N}$ de $\mathcal{C}^{r,N}$.*

Démonstration : La relation $\tau(v_s) = v_s \circ u_s$ entraîne, pour tout entier n, $\tau^n(v_s) = v_s \circ u_s \circ \tau(u_s) \circ \cdots \circ \tau^{n-1}(u_s)$ si bien que si v_s ne s'annule jamais, u_s n'est jamais τ-nilpotent. □

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_N'^r \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \mathcal{C}'^{r,N} \arrow[r] & \left(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\right)^{r-1} = \mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,1} \end{tikzcd}$$

Dans $\mathcal{A}^{r,1} = \mathbb{A}^{r-1}$, les orbites $\mathcal{A}_{\underline{r}}^{r,1}$ de $\mathcal{A}_\emptyset^{r,1} = \mathbb{G}_m^{r-1}$ sont indexées par les partitions $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$ de l'entier r et chacune a un point distingué $\alpha_{\underline{r}}$. On note $\mathcal{C}_{N,\underline{r}}'^r$ et $\mathcal{C}_{\underline{r}}'^{r,N}$ les strates dans $\mathcal{C}_N'^r$ et $\mathcal{C}'^{r,N}$ images réciproques des points $\mathcal{A}_{\underline{r}}^{r,1}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,1}$. En un point $({}^\tau\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F})$ de $\mathcal{C}_{\underline{r}}^{r,N}$, les conditions de transversalité $\operatorname{Ker} u_s \cap {}^\tau\operatorname{Ker} u_s = 0$, $1 \leq s \leq r$, qui définissent l'ouvert $\mathcal{C}_{\underline{r}}'^{r,N}$ sont vérifiées si et seulement si elles le sont en les indices $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+ = \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$. Elles signifient que la filtration des noyaux dans ${}^\tau\mathcal{F}$ et la transformée par τ de la filtration des images dans $\mathcal{F}$ sont transverses. Strate par strate, on a :

Lemme III.10. – *Pour toute partition $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$, la strate $\mathcal{C}_{N,\underline{r}}'^r$ est lisse de même dimension que $\mathcal{C}_{\underline{r}}'^{r,N}$.*

Le morphisme

$$\mathcal{C}_{N,\underline{r}}'^r \to \mathcal{C}_{\underline{r}}'^{r,N}$$

est fini et plat, de rang égal au cardinal de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ (*donc indépendant de* $\underline{r}$*), composé d'un morphisme étale et d'un morphisme radiciel surjectif ; ses fibres sont homogènes sous l'action du groupe fini* $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

Démonstration : La fibre $\mathcal{C}_N'^r \times_{(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}} \alpha_{\underline{r}}$ classifie les familles constituées d'un fibré $\mathcal{F}$ sur $N \times S$ muni de

- une filtration croissante $0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{F}_k = \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ dont les gradués sont localement libres de rangs $r_1, \ldots, r_k$,
- une filtration décroissante $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \supsetneq \mathcal{F}^1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathcal{F}^k = 0$ de $\mathcal{F}$ dont les gradués sont localement libres de rangs $r_1, \ldots, r_k$ et qui vérifie $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i \oplus \mathcal{F}^i$, $0 \leq i \leq k$,
- une filtration croissante $0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_k = E$ de $E = \mathcal{O}_{N\times S}^r$ qui est fixée par τ (car pour tous i et s avec $r_1 + \cdots + r_i = s$, $\det E_i = \Lambda^s E_i$ est l'image de l'homomorphisme v_s lequel vérifie $\tau(v_s) = v_s \circ u_s$) et dont les gradués sont libres de rangs $r_1, \ldots, r_k$,
- des isomorphismes

$$\overline{v}_i \ : \mathcal{F}^{i-1}/\mathcal{F}^i \xrightarrow{\sim} E_i/E_{i-1}, 1 \leq i \leq k\,.$$

Le morphisme sur $\mathcal{C}'^{r,N} \times_{(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}} \alpha_{\underline{r}}$ consiste à associer à ces données celles constituées de

- le fibré $\mathcal{F}$,
- la filtration croissante $(\mathcal{F}_i)$ de $\mathcal{F}$,

- la filtration décroissante $(\overline{\mathcal{F}}_i = {}^\tau\mathcal{F}^i)$ de ${}^\tau\mathcal{F}$,
- les isomorphismes

$$\overline{u}_i = \overline{v}_i^{-1} \circ \tau(\overline{v}_i) \ : \overline{\mathcal{F}}_{i-1}/\overline{\mathcal{F}}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{i-1}/\mathcal{F}^i \cong \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}\ .$$

On voit que $\mathcal{C}'^r_N \times_{(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}} \alpha_{\underline{r}}$ est lisse et que le morphisme

$$\mathcal{C}'^r_N \times_{\left(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\right)^{r-1}} \alpha_{\underline{r}} \to \mathcal{C}'^{r,N} \times_{\left(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\right)^{r-1}} \alpha_{\underline{r}}$$

est fini et plat, composé d'un morphisme étale et d'un morphisme radiciel surjectif ; ses fibres sont homogènes sous l'action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

Si $U_{\underline{r}}$ désigne le radical unipotent du sous-groupe parabolique standard $P_{\underline{r}}$ de $\mathrm{GL}_{\underline{r}}$ associé à la partition $\underline{r}$, le rang de ce morphisme fini plat est égal au produit du cardinal du quotient

$$\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)/U_{\underline{r}}(\mathcal{O}_N) = \mathrm{GL}_r^N(\mathbb{F}_q)/U_{\underline{r}}^N(\mathbb{F}_q)$$

et de la puissance de q

$$q^{\dim(\mathrm{GL}_r^N/P_{\underline{r}}^N)}\ .$$

Or $\dim(\mathrm{GL}_r^N/P_{\underline{r}}^N) = \dim U_{\underline{r}}^N$ et $\# U_{\underline{r}}^N(\mathbb{F}_q) = q^{\dim U_{\underline{r}}^N}$ donc ce produit est toujours égal à $\#\,\mathrm{GL}_r^N(\mathbb{F}_q)$.

Toutes ces propriétés se transportent à la strate $\mathcal{C}'^r_{N,\underline{r}}$ et au morphisme $\mathcal{C}'^r_{N,\underline{r}} \to \mathcal{C}'^{r,N}_{\underline{r}}$. □

Nous pouvons maintenant prouver :

Proposition III.11. – *Le champ $\mathcal{C}'^r_N$ est lisse sur $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}$, donc lisse absolument.*

Le morphisme représentable $\mathcal{C}'^r_N \to \mathcal{C}'^{r,N}$ est fini plat et le groupe $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ *agit transitivement sur ses fibres.*

L'image réciproque de $\mathcal{C}'^{r,N}$ dans la normalisation $\mathcal{C}^r_N$ de $\mathcal{C}^{r,N}$ dans $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset}$ s'identifie à $\mathcal{C}'^r_N$.

Remarque : Comme le morphisme représentable fini plat $\mathcal{C}'^r_N \to \mathcal{C}'^{r,N}$ n'est étale que génériquement et ramifié au bord, on voit en revenant à la démonstration du lemme 16(ii) du paragraphe 2d de [Lafforgue, 1998] que dans l'énoncé de ce lemme il faut s'autoriser à remplacer l'anneau de valuation discrète A par une extension finie éventuellement ramifiée (contrairement à ce qui est dit) qui ne dépend que de la famille $(\widehat{W}_w)$ et du niveau I considéré. Par conséquent, dans la proposition 15 qui précède dans [loc. cit.], il faut s'autoriser à remplacer A par une extension finie éventuellement ramifiée qui ne dépend que de $(\widehat{W}_w)$ et de la constante $\mu \geq 0$. C'est suffisant pour la démonstration des corollaires 17, 18 et 19 qui suivent (quitte encore une fois à remplacer A par une extension finie éventuellement ramifiée) car les polygones canoniques de Harder-Narasimhan des suites de chtoucas dégénérés qui apparaissent dans la preuve des corollaires 18 et 19 restent bornés et la constante $\mu \geq 0$ peut être choisie une fois pour toutes.

Démonstration : Il suffit de montrer que tout point de $\mathcal{C}'^{r,N}$ à valeurs dans un trait et dont la générisation est dans $\mathcal{C}_{\emptyset}^{r,N}$ et se relève en un point de $\mathcal{C}_{N,\emptyset}^{r}$ se relève lui-même en un point de $\mathcal{C}_N'^{r}$ qui prolonge le précédent.

En effet, comme $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ agit transitivement sur les fibres de $\mathcal{C}_N'^{r} \to \mathcal{C}'^{r,N}$ et $\mathcal{C}_{\emptyset}^{r,N}$ est dense dans $\mathcal{C}'^{r,N}$, cela prouvera d'abord que $\mathcal{C}_{N,\emptyset}^{r}$ est dense dans $\mathcal{C}_N'^{r}$ puis que $\mathcal{C}_N'^{r}$ est propre donc fini sur $\mathcal{C}'^{r,N}$. Cela implique que $\mathcal{C}_N'^{r} \to \mathcal{C}'^{r,N}$ est plat puisque d'après le lemme III.10 son rang est constant et que $\mathcal{C}'^{r,N}$ est lisse. Il en résulte que le composé $\mathcal{C}_N'^{r} \to \mathcal{C}'^{r,N} \to (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}$ est plat, donc lisse puisque ses fibres sont lisses.

Considérons donc un anneau de valuation discrète A de corps des fractions K et un point de $\mathcal{C}'^{r,N}$ à valeurs dans $S = \operatorname{Spec} A$ consistant en les données suivantes :

- un fibré $\mathcal{F}$ de rang r sur $N \times S$,
- des $(\mathcal{L}_1, \ell_1), \dots , (\mathcal{L}_{r-1}, \ell_{r-1})$ sur S,
- un homomorphisme complet ${}^{\tau}\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ qui s'écrit sous la forme d'homomorphismes linéaires partout non nuls

$$u_s \;:\; {}^{\tau}\Big(\Lambda^s\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\Big) \to \Lambda^s\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}, \, 1 \leq s \leq r \,,$$

tels que $\operatorname{Ker} u_s$ et ${}^{\tau}\operatorname{Im} u_s$ soient partout en somme directe.

On suppose que la générisation de ce point est dans $\mathcal{C}_{\emptyset}^{r,N}$, ce qui signifie que sur $N \times \operatorname{Spec} K$ les u_s sont partout des isomorphismes, et qu'elle se relève dans $\mathcal{C}_{N,\emptyset}^{r}$. Ce relèvement consiste en des isomorphismes

$$v_s \;:\; \Lambda^s\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)} \to \Lambda^s\big(\mathcal{O}_{N\times S}^{r}\big), \quad 1 \leq s \leq r \,,$$

bien définis sur $N \times \operatorname{Spec} K$ et qui vérifient

$$\tau(v_s) = v_s \circ u_s, \quad 1 \leq s \leq r \,.$$

Il s'agit de prouver que les v_s sont bien définis en tant qu'homomorphismes sur $N \times \operatorname{Spec} A$ et que leurs spécialisations sont non nulles en tout point de N.

Pour tout s, $1 \leq s \leq r$, notons φ_s l'isomorphisme τ-linéaire de l'espace $[\Lambda^s\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}] \otimes_A K$ qui est induit par l'isomorphisme u_s. Sur cet espace, il existe une unique valuation $\deg_{\varphi_s}$ telle que

$$\deg_{\varphi_s}(\varphi_s(e)) = q \deg_{\varphi_s}(e), \quad \forall e \in \Big[\Lambda^s\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\Big] \otimes_A K$$

(voir la démonstration du lemme 3 du paragraphe 2a de [Lafforgue, 1998]). Comme u_s stabilise le réseau $\Lambda^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}$, on a

$$\deg_{\varphi_s}(e) \geq 0, \quad \forall e \in \Lambda^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)} ,$$

et comme $\operatorname{Ker} u_s$ et ${}^\tau\operatorname{Im} u_s$ sont en somme directe partout, on peut trouver pour tout point fermé de $N \times S$ un élément e du facteur associé de $\Lambda^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}$ qui vérifie $\deg_{\varphi_s}(e) = 0$.

L'isomorphisme v_s transforme nécessairement la valuation $\deg_{\varphi_s}$ de $[\Lambda^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}] \otimes_A K$ en la valuation canonique de $\Lambda^s(\mathcal{O}_N^r \otimes K)$. Donc il envoie le réseau $\Lambda^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}$ dans le réseau $\Lambda^s(\mathcal{O}_N^r \otimes A)$ et en tout point fermé de $N \times S$ sa réduction n'est pas nulle. C'est ce qu'on voulait. □

Il est facile de compléter la proposition ci-dessus par :

Corollaire III.12. – *Pour tout niveau $N' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{N'} \hookrightarrow X$ qui contient N comme sous-schéma fermé et a même support, on a un diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}'^r_{N'} & \longrightarrow & \mathcal{C}'^r_N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}'^{r,N'} & \longrightarrow & \mathcal{C}'^{r,N} \end{array}$$

Le morphisme induit

$$\mathcal{C}'^r_{N'} \to \mathcal{C}'^{r,N'} \times_{\mathcal{C}'^{r,N}} \mathcal{C}'^r_N$$

est représentable, fini et plat et il est muni d'une action du groupe fini $\operatorname{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{N'}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)]$ *qui est transitive sur ses fibres.* □

D'autre part, on a le lemme important :

Lemme III.13. – *Pour d un entier et p un polygone de troncature, notons $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ l'ouvert de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N) \times (X-N)$ défini comme image réciproque de $\mathcal{C}'^{r,N}$ via le morphisme de restriction*

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N) \times (X-N) \to \mathcal{C}^{r,N} .$$

Alors, pour toute partition $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$, la trace de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ dans la strate $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ est l'image réciproque de $(X-N) \times (X-N)^{k-1} \times (X-N)$ via

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \to X \times X^{k-1} \times X ;$$

autrement dit, elle est définie en demandant que pôle, zéro et dégénérateurs évitent le niveau N.

Démonstration : Soit $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \Leftarrow {}^\tau\mathcal{E})$ un point de $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$ et $\widetilde{\mathcal{F}} = (\mathcal{F} \Leftarrow {}^\tau\mathcal{F})$ son image dans $\mathcal{C}_{\underline{r}}^{r,N}$. Les fibrés $\mathcal{E}$ et ${}^\tau\mathcal{E}$ sont munis des filtrations canoniques $(\mathcal{E}_s)$ et $(\overline{\mathcal{E}}_s)$ tandis que leurs restrictions $\mathcal{F} = \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N$ et ${}^\tau\mathcal{F}$ sont munies des filtrations induites $(\mathcal{F}_s = \mathcal{E}_s\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N)$ et $(\overline{\mathcal{F}}_s = \overline{\mathcal{E}}_s\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N)$. Pour tout $s\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+$, les sous-fibrés ${}^\tau\mathcal{E}_s$ et $\overline{\mathcal{E}}_s$ de ${}^\tau\mathcal{E}$ sont génériquement en somme directe et le quotient ${}^\tau\mathcal{E}/({}^\tau\mathcal{E}_s\oplus\overline{\mathcal{E}}_s)$ est supporté par un point exactement qui est le dégénérateur en rang s. Demander que ce dégénérateur évite N est donc équivalent à demander que ${}^\tau\mathcal{F} = {}^\tau\mathcal{F}_s \oplus \overline{\mathcal{F}}_s$. □

Sur les champs de chtoucas itérés avec structures de niveau N, on sait maintenant :

Corollaire III.14. *– Avec les notations de la définition* III.8*, soit* $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ *l'ouvert de* $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ *image réciproque de l'ouvert* $\mathcal{C}_N'^r$ *de* $\mathcal{C}_N^r$*.*

Alors $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ *est représentable, fini et plat au-dessus de l'ouvert* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ *de* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ *et le groupe fini* $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ *agit transitivement sur ses fibres.*

Si le polygone de troncature p est assez convexe en fonction de $(X$ *et*$)$ N*,* $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ *est lisse sur* $(X-N)\times(X-N)\times(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{k-1}$*.* □

Bien sûr, on notera aussi $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}' = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$.

c) Résolution des singularités pour les niveaux sans multiplicités

Dans le cas d'un niveau $N = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ sans multiplicités c'est-à-dire réduit, nous allons construire ici une résolution des singularités du champ $\mathcal{C}_N^r$ qui prolonge le revêtement de Lang de $\mathcal{C}_\emptyset^{r,N}$ au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$.

On commence par un résultat préparatoire qui vaut pour un niveau N arbitraire.

On note $(\Omega^{r,1})^N$ et $(\mathcal{A}^{r,1})^N = (\mathbb{A}^{r-1})^N = (\mathbb{A}^N)^{r-1}$ les schémas déduits de $\Omega^{r,1}$ et $\mathcal{A}^{r,1} = \mathbb{A}^{r-1}$ par restriction des scalaires à la Weil de $\mathcal{O}_N$ à $\mathbb{F}_q$. Ils sont munis d'actions des groupes $\mathrm{GL}_r^N\times\mathrm{GL}_r^N\times(\mathbb{G}_m^N)^{r+1}/\mathbb{G}_m^N$ et $(\mathcal{A}_\emptyset^{r,1})^N = (\mathbb{G}_m^N)^{r-1}\cong(\mathbb{G}_m^N)^{r+1}/(\mathbb{G}_m^N)^2$ et ils sont reliés par un morphisme équivariant

$$(\Omega^{r,1})^N \to (\mathcal{A}^{r,1})^N$$

qui est lisse de dimension relative $r^2\dim(\mathcal{O}_N)$.

On note aussi $a : \mathcal{A}^{r,1}\to(\mathcal{A}^{r,1})^N$ le "plongement diagonal" induit par le morphisme $N\to\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$ et $a^{q-1} : \mathcal{A}^{r,1}\to(\mathcal{A}^{r,1})^N$ son composé avec $\mathcal{A}^{r,1} = \mathbb{A}^{r-1}\to\mathbb{A}^{r-1} = \mathcal{A}^{r,1} : (\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-1})\mapsto(\lambda_1^{q-1},\ldots,\lambda_{r-1}^{q-1})$.

Le produit fibré $(\Omega^{r,1})^N \times_{(\mathcal{A}^{r,1})^N, a^{q-1}} \mathcal{A}^{r,1}$ est muni d'une action du groupe $\mathrm{GL}_r^N \times \mathrm{GL}_r^N \times \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m$. Si on compose cette action avec l'homomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_r^N & \to & \mathrm{GL}_r^N \times \mathrm{GL}_r^N \\ g & \mapsto & (\tau(g), g) \ , \end{array}$$

on obtient une action de $\mathrm{GL}_r^N \times \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m$ dont le noyau est $\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m$ plongé par $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda)$.

Lemme III.15. – *Le champ $\mathcal{C}^{r,N}$ s'identifie à un ouvert du champ quotient du schéma*

$$(\Omega^{r,1})^N \times_{(\mathcal{A}^{r,1})^N, a^{q-1}} \mathcal{A}^{r,1}$$

par l'action du groupe

$$\left(\mathrm{GL}_r^N \times \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m\right) / \left(\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m\right) .$$

Démonstration : En effet, comme le schéma Ω^r des homomorphismes complets est un quotient de $\Omega^{r,1}$ par $\mathcal{A}_\emptyset^{r,1} = \mathbb{G}_m^{r-1} \cong \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m^2$, on voit qu'un point du champ quotient ci-dessus à valeurs dans un schéma S consiste en un fibré $\mathcal{F}$ de rang r sur $N \times S$ muni d'un homomorphisme complet ${}^\tau\mathcal{F} = (\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ dont l'image dans $(\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,1})(N \times S) = (\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,1})^N(S)$ provient via a^{q-1} d'un point de $(\mathcal{A}^{r,1}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,1})(S)$.

On remarque que l'exposant $q-1$ qui apparaît dans la définition de $\mathcal{C}^{r,N}$ permet ici de se débarasser du choix de la section de $\mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m^2 \cong \mathcal{A}_\emptyset^{r,1}$ qui est nécessaire pour définir Ω^r. □

Le problème est donc de prolonger l'isogénie de Lang au-dessus de $(\Omega^{r,1})^N \times_{(\mathcal{A}^{r,1})^N, a^{q-1}} \mathcal{A}^{r,1}$ en un morphisme équivariant et projectif dont la source est lisse absolument. Ce problème a été résolu dans le dernier paragraphe 4d de l'article [Lafforgue, 1999] en ce qui concerne $\Omega^{r,1}$. Cela utilise l'existence et les propriétés des compactifications $\overline{\Omega}^{r,n}$ des quotients $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$ introduites dans cet article dans les cas $n = 1$ et $n = 2$ qui sont entièrement corrects. On renvoie par exemple à la prépublication [Lafforgue, mars 2001] pour une démonstration complète des résultats de lissité dont nous allons nous servir ici.

Rappelons que pour $n = 1$ ou 2, nous avons construit une compactification projective équivariante $\overline{\Omega}^{r,n}$ de $\overline{\Omega}_\emptyset^{r,n} = (\mathrm{PGL}_r)^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$ muni de l'action à gauche de PGL_r^{n+1}.

Au-dessus de $\overline{\Omega}^{r,n}$, il y a un torseur $\Omega^{r,n}$ sous un tore $\mathcal{T}^{r,n} = \mathbb{G}_m^{S^{r,n}}/\mathbb{G}_m$ qui est muni d'une action compatible de GL_r^{n+1} ainsi que d'un morphisme lisse et équivariant sur une variété torique $\mathcal{A}^{r,n}$ dont le tore $\mathcal{A}_\emptyset^{r,n}$ est un quotient de $\mathcal{T}^{r,n}$ par un sous-tore $\mathcal{T}_\emptyset^{r,n} \cong \mathbb{G}_m^{n+1}/\mathbb{G}_m$. La fibre de $\Omega^{r,n}$ au-dessus de l'unité de ce tore $\mathcal{A}_\emptyset^{r,n}$ s'identifie naturellement à $\mathrm{GL}_r^{n+1} / \mathrm{GL}_r$.

Pour n' un second entier ≤ 2 et $\iota : \{0, \dots, n'\} \to \{0, \dots, n\}$ une application, on a des morphismes induits

$$\mathcal{T}^{r,n} \to \mathcal{T}^{r,n'},\ \mathcal{A}^{r,n} \to \mathcal{A}^{r,n'},\ \Omega^{r,n} \to \Omega^{r,n'},\ \overline{\Omega}^{r,n} \to \overline{\Omega}^{r,n'},$$

tous compatibles entre eux et avec les morphismes

$$\mathrm{GL}_r^{n+1} \to \mathrm{GL}_r^{n'+1},\ \mathrm{PGL}_r^{n+1} \to \mathrm{PGL}_r^{n'+1}.$$

Dans le cas d'un application injective $\iota : \{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$, le morphisme induit

$$\Omega^{r,2} \to \Omega^{r,1} \times_{\mathcal{A}^{r,1}} \mathcal{A}^{r,2}$$

est lisse de dimension relative r^2.

Considérons maintenant un niveau $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ qu'on suppose réduit et donc étale sur $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$. Pour $n = 1$ ou 2, on note $\overline{\Omega}^{r,N,n}$, $\Omega^{r,N,n}$, $\mathcal{T}^{r,N,n}$, $\mathcal{A}^{r,N,n}, \dots$ les schémas déduits de $\overline{\Omega}^{r,n}$, $\Omega^{r,n}$, $\mathcal{T}^{r,n}$, $\mathcal{A}^{r,n}$ par restriction des scalaires à la Weil de $\mathcal{O}_N$ à $\mathbb{F}_q$. Il résulte de l'hypothèse que N est réduit que $\overline{\Omega}^{r,N,1}$ et $\overline{\Omega}^{r,N,2}$ sont projectifs tout comme $\overline{\Omega}^{r,1}$ et $\overline{\Omega}^{r,2}$.

Si $\iota_{\alpha,\beta} : \{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$, $0 \mapsto \alpha$, $1 \mapsto \beta$, est une application injective, on désignera par $p_{\alpha,\beta}$ n'importe lequel des morphismes induits $\Omega^{r,N,2} \to \Omega^{r,N,1}$, $\mathcal{A}^{r,N,2} \to \mathcal{A}^{r,N,1}$, etc.

Soient $\mathcal{T}^{r,N,\tau}$, $\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N,\tau}$ et $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,\tau}$ les plus grands sous-tores de $\mathcal{T}^{r,N,2}$, $\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N,2}$ et $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,2}$ qui vérifient l'équation

$$p_{0,2} = \mathrm{Frob} \circ p_{0,1}$$

dans $\mathcal{T}^{r,N,1}$, $\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N,1}$ et $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,1}$. Alors $\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N,\tau}$ est isomorphe à $(\mathbb{G}_m^N)^2/\mathbb{G}_m^N$, c'est un sous-tore de $\mathcal{T}^{r,N,\tau}$ et leur quotient s'identifie à $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,\tau}$.

Soit $\mathcal{A}^{r,N,\tau}$ la variété torique de tore $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,\tau}$ qui est la normalisation de l'adhérence schématique de celui-ci dans $\mathcal{A}^{r,N,2}$. Ainsi $\mathcal{A}^{r,N,\tau}$ est-elle le noyau du diagramme

$$\mathcal{A}^{r,N,2} \underset{\mathrm{Frob} \circ p_{0,1}}{\overset{p_{0,2}}{\rightrightarrows}} \mathcal{A}^{r,N,1}$$

dans la catégorie des variétés toriques normales.

Nous pouvons énoncer :

Proposition III.16. – *Etant donné N un niveau réduit, soit $\Omega^{r,N,\tau}$ le sous-schéma fermé de $\Omega^{r,N,2} \times_{\mathcal{A}^{r,N,2}} \mathcal{A}^{r,N,\tau}$ défini par l'équation*

$$p_{0,2} = \mathrm{Frob} \circ p_{0,1}$$

dans $\Omega^{r,N,1}$.

Il est muni d'actions du groupe algébrique GL_r^N, du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ et du tore $\mathcal{T}^{r,N,\tau}$ commutant entre elles et d'un morphisme équivariant

$$\Omega^{r,N,\tau} \to \mathcal{A}^{r,N,\tau}$$

qui est lisse et dont la fibre au-dessus de l'unité du tore $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,\tau}$ s'identifie à

$$\mathrm{Ker}\left[\left(\mathrm{GL}_r^N\right)^3/\,\mathrm{GL}_r^N \underset{\mathrm{Frob}\circ p_{0,1}}{\overset{p_{0,2}}{\rightrightarrows}} \left(\mathrm{GL}_r^N\right)^2/\,\mathrm{GL}_r^N\right].$$

Enfin, le quotient $\overline{\Omega}^{r,N,\tau}$ de $\Omega^{r,N,\tau}$ par l'action libre du tore $\mathcal{T}^{r,N,\tau}$ est projectif.

Démonstration : Le schéma $\Omega^{r,N,\tau}$ est muni d'une action du groupe

$$\mathrm{Ker}\left[\left(\mathrm{GL}_r^N\right)^3 \underset{\mathrm{Frob}\circ p_{0,1}}{\overset{p_{0,2}}{\rightrightarrows}} \left(\mathrm{GL}_r^N\right)^2\right]$$

qui, via la projection de $(\mathrm{GL}_r^N)^3$ sur ses deux premiers facteurs, est isomorphe à $\mathrm{GL}_r^N(\mathbb{F}_q)\times\mathrm{GL}_r^N=\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)\times\mathrm{GL}_r^N$.

Il est lisse sur $\mathcal{A}^{r,N,\tau}$ puisque $\Omega^{r,N,2}\to\mathcal{A}^{r,N,2}$ et $p_{0,2}\ :\ \Omega^{r,N,2}\to\Omega^{r,N,1}\times_{\mathcal{A}^{r,N,1}}\mathcal{A}^{r,N,2}$ sont lisses et par transversalité des morphismes de Frobenius et des morphismes lisses.

Enfin, $\overline{\Omega}^{r,N,\tau}$ est projectif car c'est un schéma fini sur $\overline{\Omega}^{r,N,2}$. □

On peut considérer les deux morphismes

$$\Omega^{r,N,\tau} \underset{p_{0,2}=\mathrm{Frob}\circ p_{0,1}}{\overset{p_{2,1}}{\rightrightarrows}} \Omega^{r,N,1}\,.$$

Au-dessus des éléments unités de $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,\tau}$ et $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,1}$, $p_{0,2}=\mathrm{Frob}\circ p_{0,1}$ est un isomorphisme sur $(\mathrm{GL}_r^N)^2/\,\mathrm{GL}_r^N\cong\mathrm{GL}_r^N$ tandis que $p_{2,1}$ s'identifie à l'isogénie de Lang

$$\mathrm{GL}_r^N\to\mathrm{GL}_r^N\ :g\mapsto\tau(g)^{-1}\circ g\,.$$

On déduit de la proposition ci-dessus :

Théorème III.17. – *Soit $N=\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_N$ un niveau réduit.*
Alors il existe un champ algébrique $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$ tel que :

- *$\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ est représentable et projectif sur $\mathcal{C}^{r,N}$,*
- *sa restriction au-dessus de l'ouvert dense $\mathcal{C}_{\emptyset}^{r,N}$ de $\mathcal{C}^{r,N}$ s'identifie au revêtement de Lang $\mathcal{C}_{N,\emptyset}^r$,*
- *$\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ est muni d'un morphisme lisse sur le champ torique $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N}$ quotient d'une variété torique lisse $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}$ par son tore $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N}$ (avec la propriété que $\mathcal{C}_{N,\emptyset}^r$ soit l'image réciproque de $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N}$).*

Démonstration : D'après le lemme III.15, on est ramené au problème de compactifier l'isogénie de Lang au-dessus de $\Omega^{r,N,1} \times_{\mathcal{A}^{r,N,1},a^{q-1}} \mathcal{A}^{r,1}$. Dans la proposition III.16, une telle compactification $\Omega^{r,N,\tau}$ est construite au-dessus de $\Omega^{r,N,1}$; on doit donc modifier la base $\mathcal{A}^{r,N,\tau}$ de $\Omega^{r,N,\tau}$.

Soient $\mathcal{T}^{r,N}$, $\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N}$ et $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N}$ les composantes neutres des produits fibrés $\mathcal{T}^{r,N,\tau} \times_{p_{2,1},\mathcal{T}^{r,N,1},a^{q-1}} \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}$, $\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N,\tau} \times_{p_{2,1},\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N,1},a^{q-1}} \mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m$ et $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,\tau} \times_{p_{2,1},\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N,1},a^{q-1}} \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m^2$. Ce sont trois tores, $\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N}$ est un sous-tore de $\mathcal{T}^{r,N}$ isomorphe à $\mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m$ et $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N}$ s'identifie au quotient $\mathcal{T}^{r,N}/\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N}$.

Soit alors $\mathcal{A}^{r,N}$ la variété torique qui est la normalisation de l'adhérence schématique de $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N}$ dans le produit fibré

$$\mathcal{A}^{r,N,\tau} \times_{p_{2,1},\mathcal{A}^{r,N,1},a^{q-1}} \mathcal{A}^{r,1} \ .$$

Autrement dit, on a dans la catégorie des variétés toriques normales un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{r,N} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{A}^{r,1} \arrow[d, "a^{q-1}"] \\
\mathcal{A}^{r,N,\tau} \arrow[r, "p_{2,1}"'] & \mathcal{A}^{r,N,1}
\end{tikzcd}$$

Le produit fibré $\Omega^{r,N,\tau} \times_{\mathcal{A}^{r,N,\tau}} \mathcal{A}^{r,N}$ est muni d'une action de $\mathrm{GL}_r^N \times \mathcal{T}^{r,N} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ dont le noyau est isomorphe à $\mathbb{G}_m \cong \mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N}$ et d'un morphisme équivariant lisse sur la variété torique $\mathcal{A}^{r,N}$ de tore $\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N} \cong \mathcal{T}^{r,N}/\mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N}$.

Par construction, on a un homomorphisme

$$\mathcal{T}^{r,N} \to \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m \ ,$$

un morphisme équivariant de variétés toriques

$$\mathcal{A}^{r,N} \to \mathcal{A}^{r,1} = \mathbb{A}^{r-1}$$

et, au-dessus de celui-ci, un morphisme

$$p_{2,1} \ : \Omega^{r,N,\tau} \times_{\mathcal{A}^{r,N,\tau}} \mathcal{A}^{r,N} \to \Omega^{r,N,1} \times_{\mathcal{A}^{r,N,1},a^{q-1}} \mathcal{A}^{r,1}$$

qui est équivariant relativement aux actions de $\mathrm{GL}_r^N \times \mathcal{T}^{r,N} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ et de $\mathrm{GL}_r^N \times \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m$ via l'homomorphisme $\mathcal{T}^{r,N} \to \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m$.

Le champ quotient de $\Omega^{r,N,\tau} \times_{\mathcal{A}^{r,N,\tau}} \mathcal{A}^{r,N}$ par l'action de $(\mathrm{GL}_r^N \times \mathcal{T}^{r,N})/(\mathbb{G}_m \cong \mathcal{T}_{\emptyset}^{r,N})$ vérifie les propriétés suivantes :

- il est muni d'un morphisme représentable projectif sur le champ quotient de $\Omega^{r,N,1} \times_{\mathcal{A}^{r,N,1},a^{q-1}} \mathcal{A}^{r,1}$ par l'action de $(\mathrm{GL}_r^N \times \mathbb{G}_m^{r+1}/\mathbb{G}_m)/(\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m)$ (lequel contient $\mathcal{C}^{r,N}$ comme sous-champ ouvert d'après le lemme III.15),

- sa restriction au-dessus de l'ouvert dense $\mathcal{C}_{\emptyset}^{r,N} \cong \mathrm{GL}_r^N /^{\tau}/\mathrm{GL}_r^N$ s'identifie au revêtement de Lang $\mathcal{C}_{N,\emptyset}^r \cong \mathrm{GL}_r^N \,/\, \mathrm{GL}_r^N$,
- il est lisse sur le champ torique $\mathcal{A}^{r,N}/\mathcal{A}_{\emptyset}^{r,N}$.

Pour conclure, il suffit d'une part de se restreindre au-dessus de l'ouvert $\mathcal{C}^{r,N}$ et d'autre part de procéder au changement de base consistant à remplacer la variété torique $\mathcal{A}^{r,N}$ par une résolution des singularités $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}$ comme suit :

Lemme III.18. – *Etant donnée une variété torique $\mathcal{A}$ de tore $\mathcal{A}_{\emptyset}$ définie sur un corps $\mathbb{F}$, il existe une variété torique $\widetilde{\mathcal{A}}$ de même tore $\mathcal{A}_{\emptyset}$ qui est lisse et telle que l'identité de $\mathcal{A}_{\emptyset}$ se prolonge en un morphisme équivariant et projectif $\widetilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$.*

Démonstration : Si le tore $\mathcal{A}_{\emptyset}$ est déployé, c'est le contenu du théorème 11 de [Saint-Donat]. La démonstration consiste à considérer l'éventail associé à $\mathcal{A}$ (c'est une décomposition en cellules qui sont des cônes convexes polyédraux rationnels d'un certain cône polyédral dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'une structure entière) et à montrer qu'il est toujours possible de subdiviser un tel éventail en un autre plus fin dont les cellules munies de leurs structures entières sont toutes des simplexes.

Si le tore $\mathcal{A}_{\emptyset}$ n'est pas déployé, choisissons une extension finie galoisienne $\mathbb{F}'$ de $\mathbb{F}$ telle que $\mathcal{A}_{\emptyset} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ soit déployé. A la variété torique $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ correspond un éventail $\mathfrak{X}$ muni d'une action du groupe de Galois fini G de $\mathbb{F}'$ sur $\mathbb{F}$. Il s'agit de prouver qu'il est possible de subdiviser $\mathfrak{X}$ en un autre éventail $\widetilde{\mathfrak{X}}$ dont les cellules munies de leurs structures entières sont des simplexes et qui de plus est respecté par l'action de G.

Tout d'abord, on peut subdiviser $\mathfrak{X}$ en un éventail $\mathfrak{X}'$ également respecté par G et tel que pour toute cellule σ et tout élément g de G qui stabilise σ l'action de g sur σ est triviale. On remarque que toute subdivision de $\mathfrak{X}'$ respectée par G vérifiera la même propriété.

On construit alors $\widetilde{\mathfrak{X}}$ à partir de $\mathfrak{X}'$ en recopiant la démonstration qui est donnée dans [Saint-Donat] : la seule différence est qu'on complète chaque nouvelle subdivision en la combinant avec toutes les subdivisions images sous l'action de G. □

Bien sûr, rien n'empêche de poser :

Conjecture III.19. – Pour $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ un niveau arbitraire, il existe un champ algébrique $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$ qui vérifie les propriétés du théorème III.17.

Remarque : Tout comme $\mathcal{C}^{r,N}$, la normalisation $\mathcal{C}_N^r$ de $\mathcal{C}^{r,N}$ dans $\mathcal{C}_{N,\emptyset}^r$ s'écrit comme le champ quotient par $\mathrm{GL}_r^N \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ d'un schéma quasi-projectif. Afin de résoudre la conjecture, il suffirait donc de savoir construire une résolution des singularités équivariante d'un tel schéma.

C'est le cas quand $r = 2$ car alors toutes les orbites sont de codimension 2 au plus et on peut appliquer le procédé connu de résolution des singularités des surfaces lequel est canonique et donc respecte les actions de groupes.

Quand N a des multiplicités, ce problème est lié à celui de construire des compactifications lisses des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$ pour tous les entiers n. L'auteur avait cru résoudre ce problème dans l'article [Lafforgue, 1999] mais il s'est aperçu que l'énoncé de lissité contenu dans cet article (le théorème 6 du paragraphe 1c) est faux pour $n \geq 3$. $\square$

Lorsqu'il existe un champ algébrique $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ vérifiant les propriétés du théorème III.17 (par exemple si N est réduit ou si $r = 2$), on définit des champs algébriques $\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ comme produits fibrés dans des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,d,\overline{p}\leq p} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}}_N^r \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{r,N} \end{array}$$

Chacun contient $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ comme ouvert dense. Il est représentable projectif sur $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$ et donc propre sur $(X-N)\times(X-N)$. Enfin, il est lisse sur $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,N} \times (X-N)\times(X-N)$; autrement dit, il est lisse sur $(X-N)\times(X-N)$ et son bord $\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,d,\overline{p}\leq p} - \mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ est un diviseur à croisements normaux relatif.

Encore une fois, on pourra noter

$$\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\leq p} = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,d,\overline{p}\leq p} .$$

Chapitre IV

Formule des points fixes dans un ouvert instable

Le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz permet de donner un sens cohomologique au nombre des points fixes comptés avec multiplicités d'une correspondance dans une variété projective et lisse : il identifie ce nombre à la somme alternée des traces des endomorphismes induits par la correspondance dans les espaces de cohomologie ℓ-adique de la variété.

Dans le cas d'une correspondance dans une variété ouverte $\mathfrak{X}_\emptyset$ lisse sur un corps de base fini, Deligne a conjecturé que si on compose cette correspondance avec une puissance assez grande de l'endomorphisme de Frobenius, le nombre des points fixes est encore égal à la trace de l'action induite sur la somme alternée des espaces de cohomologie ℓ-adique à supports compacts. Pink a donné une démonstration de cette conjecture quand $\mathfrak{X}_\emptyset$ admet une compactification $\mathfrak{X}$ dont le bord est un diviseur à croisements normaux.

Si on reste sur une variété ouverte $\mathfrak{X}_\emptyset$ admettant une telle compactification $\mathfrak{X}$ mais qu'on considère maintenant une correspondance Γ dans $\mathfrak{X}$ qui ne stabilise pas l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset$, l'énoncé précédent n'a même plus de sens car il n'y a pas d'action induite sur la cohomologie de $\mathfrak{X}_\emptyset$. Nous allons montrer toutefois que le nombre des points fixes dans $\mathfrak{X}_\emptyset$ de Γ (composée avec une puissance assez grande de Frob) s'interprète en fonction de l'action de Γ sur la cohomologie de $\mathfrak{X}$ et de celle de correspondances induites sur la cohomologie des strates du bord. Pour la démonstration, on remarque que le principal argument géométrique de Pink est local (il consiste à regarder comment des équations locales sont transformées par les puissances de Frob) si bien qu'il reste valide si on suppose seulement que Γ stabilise $\mathfrak{X}_\emptyset$ non plus globalement mais localement au voisinage de ses points fixes.

Dans un second temps, nous généralisons ce résultat au cas où $\mathfrak{X}$ lisse contient toujours $\mathfrak{X}_\emptyset$ comme ouvert dense et a pour bord $\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_\emptyset$ un diviseur à croisements normaux mais n'est plus nécessairement propre. Pour cela, on combine l'argument géométrique tiré de [Pink] avec la conjecture de Deligne démontrée par Fujiwara sans hypothèse de résolution des singularités.

Ceci s'appliquera aux champs de chtoucas. En effet, les ouverts $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ où on sait calculer les nombres de points fixes ne sont pas stabilisés globalement par les correspondances de Hecke mais on vérifiera qu'ils le sont “localement au voisinage des points fixes”. Et ils se plongent comme ouverts denses dans des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ qui ne sont propres que si $N=\emptyset$ mais sont lisses, ont pour bords des diviseurs à croisements normaux et sont stabilisés par les correspondances de Hecke. (On sait aussi qu'ils admettent des compactifications lisses quand N n'a pas de multiplicités ou $r=2$.)

1) Eclatement et stabilité au voisinage des points fixes

a) La situation géométrique

Dans tout ce qui suit, on se place sur le corps de base $\mathbb{F}_q$ à q éléments.

Nous appelons champ torique tout champ quotient $\mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset$ d'une variété torique $\mathcal{A}$ par son tore $\mathcal{A}_\emptyset$. Il est lisse si et seulement si la variété torique $\mathcal{A}$ est lisse.

Dans une variété torique il n'y a qu'un nombre fini d'orbites et leurs adhérences schématiques sont des réunions d'orbites donc dans un champ torique il n'y a qu'un nombre fini de points et ils sont localement fermés.

Pour tout schéma ou tout champ algébrique $\mathfrak{X}$ muni d'un morphisme vers un champ torique $\mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset$, on appelle strate ouverte [resp. fermée] de $\mathfrak{X}$ les sous-schémas ou sous-champs localement fermés [resp. fermés] obtenus comme images réciproques des points [resp. des adhérences des points] du champ torique $\mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset$.

Considérons donc S un schéma quasi-projectif et lisse sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathfrak{X}$ un champ algébrique de type fini (mais pas nécessairement propre) et lisse de dimension relative d sur le schéma de base S. On fait les hypothèses suivantes :

- Le morphisme de structure $p:\mathfrak{X}\to S$ se relève en un morphisme lisse
$$\mathfrak{X}\to S\times\mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset$$
pour $\mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset$ un champ torique lisse. Cela signifie que le bord de $\mathfrak{X}$ (le complémentaire $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_\emptyset$ de l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset$ image réciproque du point $\mathcal{A}_\emptyset/\mathcal{A}_\emptyset$) est un diviseur à croisements normaux relatif sur S sans auto-intersections des composantes.
- Le champ $\mathfrak{X}$ est serein et compactifiable sur S au sens de l'appendice A (définition A.1).

Cette dernière hypothèse implique que tout champ représentable quasi-projectif sur $\mathfrak{X}$ et en particulier toute strate ouverte ou fermée est aussi un champ serein compactifiable sur S.

On note $\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2,\ldots,\mathfrak{X}_m$ les strates ouvertes de $\mathfrak{X}$ qui sont de codimension 1. Pour toute partie I de l'ensemble $\{1,2,\ldots,m\}$, on pose
$$\overline{\mathfrak{X}}_I=\bigcap_{i\in I}\overline{\mathfrak{X}}_i$$
et
$$\mathfrak{X}_I=\overline{\mathfrak{X}}_I-\bigcup_{J\supsetneq I}\overline{\mathfrak{X}}_J\,.$$

Celles des $\mathfrak{X}_I$ qui ne sont pas vides sont les strates ouvertes de $\mathfrak{X}$ et les $\overline{\mathfrak{X}}_I$ sont les strates fermées, adhérences des $\mathfrak{X}_I$. Leur codimension est le cardinal $|I|$ de I.

b) Un éclatement

On considère encore un endomorphisme $\varphi : S \to S$ du schéma de base S. On note $Z = \mathfrak{X} \times_{\varphi\circ p,S,p} \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}$.

Comme dans l'article [Pink], on introduit l'éclaté $\widetilde{Z}$ de Z le long du fermé réunion des $\overline{\mathfrak{X}}_i \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_i$. Si l'on préfère, $\widetilde{Z}$ est le produit fibré sur Z des éclatés $\widetilde{Z}_i$ de Z le long des $\overline{\mathfrak{X}}_i \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_i$, $1 \le i \le m$. On note π la projection $\widetilde{Z} \to Z$; elle est représentable, projective et birationnelle. On remarque que Z et $\widetilde{Z}$ sont aussi des champs sereins, compactifiables et lisses sur S, de même dimension relative $2d$.

Un modèle de l'éclatement $\pi : \widetilde{Z} \to Z$ est fourni par le lemme suivant :

Lemme IV.1. – *Localement pour la topologie lisse, le champ $Z = \mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}$ muni de la famille de paires de diviseurs $\overline{\mathfrak{X}}_i \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_i$, $1 \le i \le m$, et du morphisme représentable projectif birationnel $\pi : \widetilde{Z} \to Z$ est isomorphe au produit d'un certain nombre de facteurs $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ munis des deux diviseurs $\{0\} \times \mathbb{A}^1$ et $\mathbb{A}^1 \times \{0\}$ et de l'éclaté $\widetilde{\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1}$ de $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ le long du point* $(0, 0)$.

Démonstration : Le champ Z est muni d'un morphisme lisse

$$Z \to \mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset \times \mathcal{A}/\mathcal{A}_\emptyset = (\mathcal{A} \times \mathcal{A})/(\mathcal{A}_\emptyset \times \mathcal{A}_\emptyset)$$

et ses diviseurs sont les images réciproques de ceux de $(\mathcal{A} \times \mathcal{A})/(\mathcal{A}_\emptyset \times \mathcal{A}_\emptyset)$. Et comme la variété torique $\mathcal{A}$ est lisse, c'est une réunion d'ouverts qui sont des espaces affines $\mathbb{A}^1 \times \cdots \times \mathbb{A}^1$ munis de leurs diviseurs naturels définis par l'annulation des différentes coordonnées. □

L'éclaté $\widetilde{Z}$ est muni de diviseurs à croisements normaux E_i, $1 \le i \le m$, qui sont les images réciproques des diviseurs exceptionnels dans les éclatés $\widetilde{Z}_i$.

Pour toute partie non vide I de $\{1, \ldots, m\}$, on a $\bigcap_{i\in I} \overline{\mathfrak{X}}_i \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_i = \overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I$ et $E_I = \bigcap_{i\in I} E_i$ est contenu dans $\pi^{-1}(\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I)$. D'après le lemme IV.1, E_I est le produit fibré sur Z des diviseurs exceptionnels des $\widetilde{Z}_i$ tels que $i \in I$ avec les $\widetilde{Z}_i$ tels que $i \notin I$ et sa restriction au-dessus de l'ouvert $\mathfrak{X}_I \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_I$ de $\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I$ est un fibré projectif de rang $|I|$.

c) Graphes des morphismes de Frobenius

Soit $s = \operatorname{Spec} \kappa_s$ le spectre d'un corps κ_s extension finie du corps de base $\mathbb{F}_q$ et $x : s \hookrightarrow S$ un point fermé du schéma de base S de corps résiduel κ_s.

Posant $y = \varphi \circ x$, on note $\mathfrak{X}^x$ et $\mathfrak{X}^y$ les fibres $\mathfrak{X} \times_{S,x} s$ et $\mathfrak{X} \times_{S,y} s$ de $\mathfrak{X}$ au-dessus de x et y. Ce sont des champs sereins, propres et lisses de dimension d sur s dont les strates ouvertes sont les $\mathfrak{X}_I^x = \mathfrak{X}_I \times_{S,x} s$ et les $\mathfrak{X}_I^y = \mathfrak{X}_I \times_{S,x} s$.

Le produit $\mathfrak{X}^x \times_s \mathfrak{X}^y$ s'identifie à la fibre $Z^x = Z \times_{S,x} s$ de Z au-dessus de x et son éclaté le long des $\overline{\mathfrak{X}}_i^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_i^y$, $1 \leq i \leq m$, s'identifie à $\widetilde{Z}^x = \widetilde{Z} \times_{S,x} s$. Cet éclaté est donc muni de la famille de diviseurs à croisements normaux $E_i^x = E_i \times_{S,x} s$, $1 \leq i \leq m$, dont les intersections mutuelles sont les $\bigcap\limits_{i \in I} E_i^x = E_I^x = E_I \times_{S,x} s$.

L'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que les morphismes $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y$ et $x : s \hookrightarrow S$ se confondent est, s'il n'est pas vide, une classe de congruence modulo $\deg(s) = [\kappa_s : \mathbb{F}_q]$. Soit n un entier dans cette classe.

Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}^n, \mathrm{Id})} & \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ S & \xrightarrow{(\mathrm{Frob}^n, \mathrm{Id})} & S \times S \end{array}$$

induit un morphisme

$$\mathfrak{X} \to S \times_{(\mathrm{Frob}^n, \mathrm{Id}), S \times S} \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$$

dont la fibre au-dessus de $y : s \to S$ s'écrit

$$\mathfrak{X}^y \to s \times_{(\mathrm{Frob}^n \circ\, y, y), S \times S} \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$$

c'est-à-dire, puisque $\mathrm{Frob}^n \circ y = x$ par hypothèse,

$$\mathfrak{X}^y \to \mathfrak{X}^x \times_s \mathfrak{X}^y = Z^x \,.$$

On notera δ^n ce morphisme. C'est une section de $\mathfrak{X}^x \times_s \mathfrak{X}^y \to \mathfrak{X}^y$ donc il est représentable fini.

Via δ^n, les fermés $\overline{\mathfrak{X}}_i^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_i^y$, $1 \leq i \leq m$, de $\mathfrak{X}^s \times_s \mathfrak{X}^y$ ont pour images réciproques les diviseurs $\overline{\mathfrak{X}}_i^y$ donc le morphisme $\delta^n : \mathfrak{X}^y \to Z^x$ se relève dans l'éclaté $\widetilde{Z}^x$ en un morphisme

$$\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^y \to \widetilde{Z}^x$$

qui lui aussi est représentable fini.

De même, pour I une partie non vide de $\{1, \ldots, m\}$, on dispose de la restriction

$$\delta_I^n : \overline{\mathfrak{X}}_I^y \to \overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y$$

du morphisme $\delta^n : \mathfrak{X}^y \to \mathfrak{X}^x \times_s \mathfrak{X}^y$ à $\overline{\mathfrak{X}}_I^y$; c'est une section de $\overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y \to \overline{\mathfrak{X}}_I^y$ et elle est représentable finie.

Pour tout $i \in \{1, \dots, m\} - I$, l'image réciproque via

$$\delta_I^n : \overline{\mathfrak{X}}_I^y \to \overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y \hookrightarrow Z^x$$

de $\overline{\mathfrak{X}}_i^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_i^y$ est le diviseur $\overline{\mathfrak{X}}_{I\cup\{i\}}^y$ donc δ_I^n se relève en un morphisme de $\overline{\mathfrak{X}}_I^y$ dans le produit fibré sur Z^x des $\widetilde{Z}_i^x$, $i \in \{1, \dots, m\} - I$.

Son image réciproque dans $\widetilde{Z}^x$ (qui est le produit fibré sur Z^x de tous les $\widetilde{Z}_i^x$, $i \in \{1, \dots, m\}$) est un morphisme représentable fini

$$\widetilde{\delta}_I^n : \widetilde{\mathfrak{X}}_I^y \to \widetilde{Z}^x$$

où $\widetilde{\mathfrak{X}}_I^y$ est une fibration projective sur $\overline{\mathfrak{X}}_I^y$ isomorphe à $\overline{\mathfrak{X}}_I^y \times (\mathbb{P}^1)^{|I|}$ (et dont la restriction au-dessus de $\mathfrak{X}_I^y$ s'identifie à l'image réciproque de E_I^x via $\delta_I^n : \overline{\mathfrak{X}}_I^y \to \overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y$).

On a :

Lemme IV.2. – *Avec ces notations, le produit fibré $\mathfrak{X}^y \times_{\delta^n, Z^x} \widetilde{Z}^x$ au-dessus de $\widetilde{Z}^x$ est la réunion schématique de $\mathfrak{X}^y \xrightarrow{\widetilde{\delta}^n} \widetilde{Z}^x$ et des $\widetilde{\mathfrak{X}}_J^y$ lesquels sont tous lisses de même dimension et ont des intersections mutuelles de dimensions plus petites.*

Et pour I une partie non vide de $\{1, \dots, m\}$, le produit fibré $\overline{\mathfrak{X}}_I^y \times_{\delta_I^n, Z^x} \widetilde{Z}^x = \mathfrak{X}^y \times_{\delta^n, Z^x} E_I$ est la réunion schématique des $\widetilde{\mathfrak{X}}_J^y$, $J \supseteq I$.

Démonstration : Cela résulte du lemme IV.1 puisque dans l'éclaté $\widetilde{\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1}$ d'un $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ le long de $\{0\} \times \{0\}$, l'image réciproque du graphe de $\mathrm{Frob}^n : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ a deux composantes : le transformé strict de ce graphe et le diviseur exceptionnel. □

d) Correspondances et stabilité au voisinage des points fixes

Nous allons maintenant introduire une correspondance dans $\mathfrak{X}$ au-dessus de l'endomorphisme φ de S c'est-à-dire un cycle de codimension d dans $\mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X} = Z$ et son transformé strict dans l'éclaté $\widetilde{Z}$ de Z qui va nous permettre de définir des correspondances (cohomologiques) induites dans les strates de bord $\overline{\mathfrak{X}}_I$ de $\mathfrak{X}$.

On part d'un champ normal $\Gamma_\emptyset$ représentable fini sur l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_\emptyset$ et dont le support de l'image $|\Gamma_\emptyset|$ est de codimension d.

Par normalisation, il induit deux champs normaux Γ et $\widetilde{\Gamma}$ représentables finis sur $Z = \mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}$ et $\widetilde{Z}$ et qui contiennent $\Gamma_\emptyset$ comme ouvert dense. Ils sont reliés par un morphisme représentable projectif birationnel $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_\emptyset \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \widetilde{\Gamma} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z} \arrow[d, "\pi"] \\
\Gamma_\emptyset \arrow[r, hook] & \Gamma \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

On note p'_Γ, p''_Γ et $p'_{\widetilde{\Gamma}}$, $p''_{\widetilde{\Gamma}}$ les deux projections de Γ et $\widetilde{\Gamma}$ sur $\mathfrak{X}$. On dit que Γ (ou $\widetilde{\Gamma}$) définit une correspondance géométrique dans $\mathfrak{X}$ au-dessus de l'endomorphisme φ de S si la seconde projection $p''_\Gamma : \Gamma \to \mathfrak{X}$ (ou $p''_{\widetilde{\Gamma}} : \widetilde{\Gamma} \to \mathfrak{X}$) est propre. (Cette condition est automatiquement vérifiée si $\mathfrak{X}$ est propre sur S.)

Bien sûr, on dit qu'une telle correspondance Γ stabilise (à droite) l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset$ quand on a l'inclusion $p''^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X}_\emptyset) \subseteq p'^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X}_\emptyset)$.

Posons la définition suivante :

Définition IV.3. – *Soit* Γ *une correspondance dans* $\mathfrak{X}$ *au-dessus de* φ.

On dira que Γ *stabilise* $\mathfrak{X}_\emptyset$ *au voisinage de ses points fixes s'il existe un ouvert* U *dans* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, *contenant toutes les intersections du support* $|\Gamma|$ *de* Γ *avec les images des morphismes* $\mathfrak{X} \xrightarrow{(\mathrm{Frob}^n,\mathrm{Id})} \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, $n \in \mathbb{N}$, *et tel que*

$$p''^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X}_\emptyset) \cap U \subseteq p'^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X}_\emptyset) \cap U \, .$$

Pour vérifier qu'une correspondance Γ stabilise $\mathfrak{X}_\emptyset$ au voisinage de ses points fixes, on dispose du critère valuatif suivant :

Lemme IV.4. – *Pour qu'une correspondance* Γ *dans* $\mathfrak{X}$ *au-dessus de* φ *stabilise* $\mathfrak{X}_\emptyset$ *au voisinage de ses points fixes, il suffit qu'elle satisfasse la condition suivante :*

(SV) *Pour tout point* α *de* Γ *à valeurs dans un anneau de valuation discrète et dont la générisation est supportée par* $p'^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_\emptyset) \cap p''^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X}_\emptyset)$, *la spécialisation de* α *n'est supportée par l'image d'aucun des morphismes* $\mathfrak{X} \xrightarrow{(\mathrm{Frob}^n,\mathrm{Id})} \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Dans le support de Γ qui est un fermé de $\mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}$ et donc de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, l'intersection $p'^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_\emptyset) \cap p''^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X}_\emptyset)$ est un sous-ensemble constructible. Pour que l'ouvert U complémentaire de son adhérence dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ contienne l'intersection de $|\Gamma|$ avec les images de tous les morphismes $\mathfrak{X} \xrightarrow{(\mathrm{Frob}^n,\mathrm{Id})} \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, il suffit par conséquent que soit vérifiée la condition (SV). □

e) L'argument géométrique de Pink

Pour toute correspondance Γ dans $\mathfrak{X}$ au-dessus de φ, on note $\Gamma_\emptyset$ sa restriction au-dessus de l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_\emptyset$ de $\mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X} = Z$. On dit que Γ est engendrée par $\Gamma_\emptyset$ si cet ouvert $\Gamma_\emptyset$ est dense dans Γ. La normalisation $\widetilde{\Gamma}$ de $\Gamma_\emptyset$ au-dessus de l'éclaté $\widetilde{Z}$ est alors appelée le transformé strict de Γ dans $\widetilde{Z}$.

On a le résultat suivant qui généralise la proposition 7.3.1 de [Pink] :

Proposition IV.5. – *Soit* Γ *une correspondance dans* $\mathfrak{X}$ *au-dessus de* φ *qui est engendrée par* $\Gamma_\emptyset$ *et qui stabilise* $\mathfrak{X}_\emptyset$ *au voisinage de ses points fixes.*

Alors, quitte à remplacer φ *par* $\varphi \circ \mathrm{Frob}^{n_0} = \mathrm{Frob}^{n_0} \circ \varphi$ *et* Γ *par la normalisation* $\Gamma^{(n_0)}$ *de* $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}) \times_{(\mathrm{Frob}^{n_0}, \mathrm{Id}), \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}} \Gamma$ *pour* $n_0 \geq 0$ *un entier assez grand, le transformé strict* $\widetilde{\Gamma}$ *de* Γ *dans* $\widetilde{Z}$ *vérifie :*

Pour tout point fermé $x : s \hookrightarrow S$ *avec* $y = \varphi \circ x$ *et tout entier* $n \geq 1$ *tel que* $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$*, l'image de* $\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^y \to \widetilde{Z}^x = \widetilde{Z} \times_{S,x} s \hookrightarrow \widetilde{Z}$ *ne rencontre pas le support de* $\widetilde{\Gamma}$ *en dehors de* $\mathfrak{X}_\emptyset \times \mathfrak{X}_\emptyset$*.*

Démonstration : Soit U un ouvert de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ qui vérifie la propriété de la définition IV.3 relativement à Γ. Les images des $\widetilde{\delta}^n$ et le support de $\widetilde{\Gamma}$ ne peuvent se rencontrer ailleurs qu'au-dessus de U.

Localement sur $\mathfrak{X}$, considérons des équations $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ de définition des diviseurs $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_m$ et $\ell = \ell_1 \ell_2 \cdots \ell_m$ leur produit. Notons $\ell'_1, \ell'_2, \ldots, \ell'_m$ et ℓ' d'une part, $\ell''_1, \ell''_2, \ldots, \ell''_m$ et ℓ'' d'autre part leurs images réciproques par les deux projections $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightrightarrows \mathfrak{X}$.

Comme $p''^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X}_\emptyset) \cap U \subseteq p'^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X}_\emptyset) \cap U$ ou encore $p'^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_\emptyset) \cap U \subseteq p''^{-1}_\Gamma(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_\emptyset) \cap U$, il existe un entier $e \geq 1$ et une fonction a partout définie sur $\Gamma \cap U$ tels que sur $\Gamma \cap U$ l'équation suivante soit vérifiée

$$\ell''^e = a\ell' \,.$$

Choisissant un entier $n_0 \geq 0$ tel que $q^{n_0} \geq e$ et remplaçant Γ et U ainsi que la fonction a par leurs images réciproques via $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \xrightarrow{(\mathrm{Frob}^{n_0}, \mathrm{Id})} \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, cette équation devient

$$\ell''^e = a\ell'^{q^{n_0}}$$

ce qu'on récrit

$$(\ell''/\ell')^e = a\ell'^{q^{n_0} - e} \,.$$

Mais par ailleurs, pour tout point fermé $x : s \hookrightarrow S$ avec $y = \varphi \circ x$ et tout entier $n \geq 1$ tel que $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$, on voit que sur l'image du transformé strict $\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^y \to \widetilde{Z}^x \hookrightarrow \widetilde{Z}$ sont satisfaites les équations

$$\ell'_1 = \ell''^{q^n}_1, \ell'_2 = \ell''^{q^n}_2, \ldots, \ell'_m = \ell''^{\,q^n}_m$$

qu'on récrit

$$\ell'_1/\ell''_1 = \ell''^{q^n - 1}_1, \ldots, \ell'_m/\ell''_m = \ell''^{\,q^n - 1}_m \,.$$

Cela montre que l'image de $\widetilde{\delta}^n$ ne rencontre pas le support de $\widetilde{Z}$ en dehors de $\mathfrak{X}_\emptyset \times \mathfrak{X}_\emptyset$. □

2) Formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz dans le cas propre

Dans tout le présent paragraphe 2, on fait l'hypothèse supplémentaire que $\mathfrak{X}$ est propre sur S.

a) Formule d'adjonction

Comme $\mathfrak{X}$ est propre sur S, il en est de même de $Z \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}$ et de son éclaté $\widetilde{Z}$.

On considère une correspondance Γ dans $\mathfrak{X}$ au-dessus de φ qui est engendrée par sa trace $\Gamma_\emptyset$ au-dessus de l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_\emptyset$ de Z. On note toujours $\widetilde{\Gamma}$ le transformé strict de Γ dans $\widetilde{Z}$.

Le paragraphe 2a de l'appendice A nous permet alors de définir les classes de cohomologie de Γ et $\widetilde{\Gamma}$,

$$\mathrm{cl}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}),$$

comme sections sur S des faisceaux ℓ-adiques lisses

$$R^{2d}(p_Z)_*\mathbb{Q}_\ell(d) \quad \text{et} \quad R^{2d}(p_{\widetilde{Z}})_*\mathbb{Q}_\ell(d)$$

où p_Z et $p_{\widetilde{Z}}$ désignent les morphismes de structure de Z et $\widetilde{Z}$ sur S.

Puis, pour toute partie $I \neq \emptyset$ de $\{1, \ldots, m\}$ telle que $\mathfrak{X}_I$ ne soit pas vide, on note $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I$ l'image de la section $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})$ par l'homomorphisme composé

$$R^{2d}(p_{\widetilde{Z}})_*\mathbb{Q}_\ell(d) \to R^{2d}(p_{E_I})_*\mathbb{Q}_\ell(d) \to R^{2(d-|I|)}(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I})_*\mathbb{Q}_\ell(d-|I|)$$

où la première flèche provient de l'inclusion $E_I \hookrightarrow \widetilde{Z}$ et la seconde est duale (pour la dualité de Poincaré) de la flèche

$$R^{2(d-|I|)}(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I})_*\mathbb{Q}_\ell(d-|I|) \to R^{2(d-|I|)}(p_{E_I})_*\mathbb{Q}_\ell(d-|I|)$$

induite par le morphisme $E_I \to \overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I$.

Soient $x : s \hookrightarrow S$ un point fermé de S, $y = \varphi \circ x$ et $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$. On a introduit au paragraphe 1c ci-dessus les morphismes représentables finis

$$\begin{aligned}
\delta^n &: \mathfrak{X}^y \longrightarrow \mathfrak{X}^x \times_s \mathfrak{X}^y = Z^x\,,\\
\widetilde{\delta}^n &: \mathfrak{X}^y \longrightarrow \widetilde{Z}^x\,,\\
\delta_I^n &: \overline{\mathfrak{X}}_I^y \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y
\end{aligned}$$

auxquels on peut associer des classes de cohomologie

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cl}(\delta^n) \in H^{2d}\big(Z^x, \mathbb{Q}_\ell(d)\big),\\
&\mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^n) \in H^{2d}\big(\widetilde{Z}^x, \mathbb{Q}_\ell(d)\big),\\
&\mathrm{cl}\left(\delta_I^n\right) \in H^{2(d-|I|)}\big(\overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y, \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)\big).
\end{aligned}$$

D'autre part, on dispose des fibres

$$\begin{aligned}
&x^*(\mathrm{cl}(\Gamma)) \in H^{2d}\big(Z^x, \mathbb{Q}_\ell(d)\big),\\
&x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})) \in H^{2d}\big(\widetilde{Z}^x, \mathbb{Q}_\ell(d)\big),\\
&x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I) \in H^{2(d-|I|)}\big(\overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y, \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)\big)
\end{aligned}$$

des sections $\mathrm{cl}(\Gamma)$, $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})$ et $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I$ des faisceaux $R^{2d}(p_Z)_*\mathbb{Q}_\ell(d)$,

$R^{2d}(p_{\widetilde{Z}})_*\mathbb{Q}_\ell(d)$ et $R^{2(d-|I|)}\,(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y})_*\mathbb{Q}_\ell(d-|I|)$ puisque, d'après le corollaire A.4, la formation de ces faisceaux commute aux changements de la base S.

En combinant le produit "cup" et les homomorphismes de traces, on peut former les produits scalaires des unes et des autres. Ils sont reliés par la formule suivante :

Proposition IV.6. *– Etant donnés $x : s \hookrightarrow S$ un point fermé de S, $y = f \circ x$ et $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$, on a la relation entre produits scalaires*

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^n) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})) &= \mathrm{cl}(\delta^n) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\Gamma)) \\ &\quad + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|}\, \mathrm{cl}\left(\delta_I^n\right) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I).\end{aligned}$$

Démonstration : Le morphisme représentable projectif $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ est compatible avec $\pi\ : \widetilde{Z} \to Z$ et il est birationnel. D'après la proposition A.11, on en déduit que $\mathrm{cl}(\Gamma)$ est l'image de $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})$ par l'homomorphisme

$$R^{2d}(p_{\widetilde{Z}})_*\mathbb{Q}_\ell(d) \xrightarrow{\pi_*} R^{2d}(p_Z)_*\mathbb{Q}_\ell(d)$$

dual de

$$R^{2d}(p_Z)_*\mathbb{Q}_\ell(d) \xrightarrow{\pi^*} R^{2d}(p_{\widetilde{Z}})_*\mathbb{Q}_\ell(d).$$

Posant $u = x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}))$, on a aussi par compatibilité aux changements de la base S

$$x^*(\mathrm{cl}(\Gamma)) = \pi_*(u).$$

Et pour toute I, $x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I)$ est image de u par l'homomorphisme composé

$$H^{2d}\big(\widetilde{Z}^x, \mathbb{Q}_\ell(d)\big) \to H^{2d}\big(E_I^x, \mathbb{Q}_\ell(d)\big) \to H^{2(d-|I|)}\big(\overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y, \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)\big)$$

où la première flèche provient de l'inclusion $\iota_{E_I^x} : E_I^x \hookrightarrow \widetilde{Z}^x$ et la seconde est duale de la flèche

$$H^{2(d-|I|)}\big(\overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y, \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)\big) \to H^{2(d-|I|)}\big(E_I^x, \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)\big)$$

induite par le morphisme $\pi_I : E_I^x \to \overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y$. On note $x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma})_I) = \pi_{I*}\iota_{E_I^x}^*(u)$.

Ainsi la formule à démontrer se récrit-elle

$$\mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^n) \cdot u = \mathrm{cl}(\delta^n) \cdot \pi_*(u) + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|}\, \mathrm{cl}\left(\delta_I^n\right) \cdot \pi_{I*}\iota_{E_I^x}^*(u)$$

soit

$$\mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^n) \cdot u = \pi^*(\mathrm{cl}(\delta^n)) \cdot u + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \pi_I^*\big(\mathrm{cl}\left(\delta_I^n\right)\big) \cdot \iota_{E_I^x}^*(u).$$

Or, d'après la proposition A.11, $\pi^*(\mathrm{cl}(\delta^n))$ est aussi la classe de cohomologie du produit fibré $\mathfrak{X}^y \times_{\delta^n, Z^x} \widetilde{Z}^x$ dans $\widetilde{Z}^x$. D'après le lemme IV.2, on a

$$\pi^*(\mathrm{cl}(\delta^n)) = \mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^n) + \sum_{J\neq\emptyset} \mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathfrak{X}}_J^y\right)$$

et donc

$$\pi^*(\mathrm{cl}(\delta^n)) \cdot u = \mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^n) \cdot u + \sum_{J\neq\emptyset} \mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathfrak{X}}_J^y\right) \cdot u \ .$$

Pour toute partie $I \neq \emptyset$, on a de la même façon

$$\pi_I^*\left(\mathrm{cl}\left(\delta_I^n\right)\right) \cdot \iota_{E_I^x}^*(u) = \sum_{J\supseteq I} \mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathfrak{X}}_J^y\right) \cdot u \ .$$

La conclusion s'en déduit aussitôt puisque pour toute partie $J \neq \emptyset$, on a $\sum_{J\supseteq I} (-1)^{|I|} = 0$. □

b) Une formule des points fixes sur l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset$

On suppose dans ce dernier paragraphe que la strate ouverte dense $\mathfrak{X}_\emptyset$ de $\mathfrak{X}$ est un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford c'est-à-dire qu'au voisinage de tout point de $\mathfrak{X}_\emptyset$ il existe un revêtement étale par un schéma.

On considère une correspondance Γ dans $\mathfrak{X}$ au-dessus de l'endomorphisme φ de la base S qui est engendrée par $\Gamma_\emptyset$ et telle que la restriction $p'_\Gamma : \Gamma_\emptyset \to \mathfrak{X}_\emptyset$ de la première projection à $\Gamma_\emptyset$ est étale.

Si $x : s \hookrightarrow S$ est un point fermé de S, $y = \varphi \circ x$ et $n \geq 1$ est un entier tel que $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$, la fibre $\Gamma_\emptyset^x = \Gamma_\emptyset \times_{S,x} s$ de $\Gamma_\emptyset$ en x coupe transversalement dans $\mathfrak{X}_\emptyset^x \times_s \mathfrak{X}_\emptyset^y$ le graphe $\delta^n : \mathfrak{X}_\emptyset^y \to \mathfrak{X}_\emptyset^x \times_s \mathfrak{X}_\emptyset^y$ de $\mathrm{Frob}^n : \mathfrak{X}_\emptyset^y \to \mathfrak{X}_\emptyset^x$.

On note $\mathrm{Lef}_x(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n)$ le nombre des points de l'intersection $\mathfrak{X}_\emptyset^y \times_{\delta^n, \mathfrak{X}_\emptyset^x \times_s \mathfrak{X}_\emptyset^y} \Gamma_\emptyset^x$ de $\Gamma_\emptyset^x$ et δ^n, chacun étant compté avec sa multiplicité égale à l'inverse du cardinal du groupe fini de ses automorphismes.

D'autre part, on dispose de la classe de cohomologie $\mathrm{cl}(\Gamma)$ de Γ qui est une section du faisceau ℓ-adique lisse $R^{2d}(p_Z)_*\mathbb{Q}_\ell(d)$ puis, pour x et $n \geq 1$ comme ci-dessus, de sa fibre $x^*(\mathrm{cl}(\Gamma))$ en x qui induit une famille d'homomorphismes

$$R^i(p_{\mathfrak{X}^y})_*\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\mathfrak{X}^x})_*\mathbb{Q}_\ell \ , \ 0 \leq i \leq 2d \ ,$$

tandis que $\mathrm{Frob}^n : \mathfrak{X}^y \to \mathfrak{X}^x$ induit des homomorphismes en sens inverse

$$R^i(p_{\mathfrak{X}^x})_*\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\mathfrak{X}^y})_*\mathbb{Q}_\ell \ , \ 0 \leq i \leq 2d \ .$$

On notera

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{R^*(p_{\mathfrak{X}^x})_*\mathbb{Q}_\ell}(x^*(\mathrm{cl}(\Gamma)) \times \mathrm{Frob}^n) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \,\mathrm{Tr}_{R^i(p_{\mathfrak{X}^x})_*\mathbb{Q}_\ell}(x^*(\mathrm{cl}(\Gamma)) \circ \mathrm{Frob}^n) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \,\mathrm{Tr}_{R^i(p_{\mathfrak{X}^y})_*\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{Frob}^n \circ x^*(\mathrm{cl}(\Gamma))).
\end{aligned}$$

De même, si $I \neq \emptyset$ est une partie de $\{1, \ldots, m\}$ telle que $\mathfrak{X}_I$ ne soit pas vide et u_I est une section du faisceau ℓ-adique lisse sur S

$$R^{2(d-|I|)}(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I})_*\mathbb{Q}_\ell(d-|I|)\ ,$$

on peut introduire pour tout x et tout $n \geq 1$ comme ci-dessus

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{R^*(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_*\mathbb{Q}_\ell}\left(x^*(u_I) \times \mathrm{Frob}^n\right) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{2(d-|I|)} (-1)^i \,\mathrm{Tr}_{R^i(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_*\mathbb{Q}_\ell}\left(x^*(u_I) \circ \mathrm{Frob}^n\right) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{2(d-|I|)} (-1)^i \,\mathrm{Tr}_{R^i(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^y})_*\mathbb{Q}_\ell}\left(\mathrm{Frob}^n \circ x^*(u_I)\right).
\end{aligned}$$

Théorème IV.7 (Formule des points fixes sur un ouvert instable). – *Supposons que $\mathfrak{X}$ est propre sur S et que la strate ouverte dense $\mathfrak{X}_\emptyset$ de $\mathfrak{X}$ est algébrique au sens de Deligne-Mumford.*

Soit Γ une correspondance dans $\mathfrak{X}$ au-dessus d'un endomorphisme φ du schéma de base S qui est engendrée par $\Gamma_\emptyset$ et telle que la restriction $p'_\Gamma : \Gamma_\emptyset \to \mathfrak{X}_\emptyset$ de la première projection à $\Gamma_\emptyset$ est étale.

Et supposons que Γ stabilise l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset$ de $\mathfrak{X}$ au voisinage de ses points fixes, au sens de la définition IV.3.

Alors il existe un entier $n_0 \geq 0$ et des sections u_I sur S des faisceaux ℓ-adiques lisses

$$R^{2(d-|I|)}(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I})_*\mathbb{Q}_\ell(d-|I|)\ ,\ I \neq \emptyset\ ,$$

tels que pour tout point fermé $x : s \hookrightarrow S$ avec $y = \varphi \circ x$ et tout entier $n > n_0$ tel que $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$, on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lef}_x\left(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n\right) &= \mathrm{Tr}_{R^*(p_{\mathfrak{X}^x})_*\mathbb{Q}_\ell}(x^*(\mathrm{cl}(\Gamma)) \times \mathrm{Frob}^n) \\
&\quad + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \,\mathrm{Tr}_{R^*(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_*\mathbb{Q}_\ell}\left(x^*(u_I) \times \mathrm{Frob}^n\right).
\end{aligned}$$

Démonstration : Soit $n_0 \geq 0$ un entier tel que la normalisation $\widetilde{\Gamma}'$ sur $\widetilde{Z}$ de $\Gamma'_\emptyset = (\mathfrak{X}_\emptyset \times \mathfrak{X}_\emptyset) \times_{(\mathrm{Frob}^{n_0},\mathrm{Id}),\mathfrak{X}_\emptyset \times \mathfrak{X}_\emptyset} \Gamma_\emptyset$ vérifie la conclusion de la proposition IV.5.

Pour tout point fermé $x : s \hookrightarrow S$ avec $y = \varphi \circ x$ et tout entier $n > n_0$ tel que $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$, on a évidemment

$$\mathrm{Lef}_x\left(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n\right) = \mathrm{Lef}_x\left(\Gamma'_\emptyset \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}\right).$$

On prétend que

$$\mathrm{Lef}_x\left(\Gamma'_\emptyset \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}\right) = \mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^{n-n_0}) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}')).$$

En effet, les classes de cohomologie $\mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^{n-n_0})$ et $\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}')$ proviennent de sections de faisceaux de cohomologie à supports dans les images de $\widetilde{\delta}^{n-n_0}$ et $\widetilde{\Gamma}'$: c'est la façon même dont les classes de cohomologie sont définies dans le paragraphe 2a de l'appendice A. Et l'intersection $\mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^{n-n_0}) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}'))$ provient de la section obtenue par produit "cup" dans un faisceau de cohomologie à supports dans l'intersection des images de $\widetilde{\delta}^{n-n_0}$ et $\widetilde{\Gamma}'$. Or, puisque $\widetilde{\Gamma}'$ vérifie la conclusion de la proposition IV.5, les images de $\widetilde{\delta}^{n-n_0}$ et $\widetilde{\Gamma}'$ ne se rencontrent pas en dehors de $\mathfrak{X}_\emptyset \times \mathfrak{X}_\emptyset$. De plus, $\mathfrak{X}_\emptyset$ est algébrique au sens de Deligne-Mumford et $\widetilde{\delta}^{n-n_0}$ et $\widetilde{\Gamma}'_\emptyset$ se coupent transversalement sur $\mathfrak{X}_\emptyset \times \mathfrak{X}_\emptyset$. Le calcul de l'intersection $\mathrm{cl}(\widetilde{\delta}^{n-n_0}) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\widetilde{\Gamma}'))$ se fait localement (pour la topologie étale) au voisinage de chacun des points d'intersection dans le champ $\mathfrak{X}_\emptyset$. On est ramené au cas d'une intersection transversale dans un schéma lisse. D'où la formule.

D'après cette formule et la proposition IV.6, il existe des sections u'_I sur S des faisceaux ℓ-adiques

$$R^{2(d-|I|)}(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi\circ\mathrm{Frob}^{n_0},S} \overline{\mathfrak{X}}_I})_* \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)\ ,\ \ I \neq \emptyset\ ,$$

telles que pour tout point x et tout entier $n > n_0$ comme ci-dessus, on ait

$$\begin{aligned}\mathrm{Lef}_x\left(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n\right) = {} & \mathrm{cl}(\delta^{n-n_0}) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\Gamma')) \\ & + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|}\,\mathrm{cl}\left(\delta_I^{n-n_0}\right) \cdot x^*(u'_I).\end{aligned}$$

Ici, Γ' est la normalisation sur Z de $\Gamma'_\emptyset = (\mathfrak{X}_\emptyset \times \mathfrak{X}_\emptyset) \times_{(\mathrm{Frob}^{n_0},\mathrm{Id}),\mathfrak{X}_\emptyset \times \mathfrak{X}_\emptyset} \Gamma_\emptyset$ et donc

$$\mathrm{cl}(\delta^{n-n_0}) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\Gamma')) = \mathrm{cl}(\delta^n) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\Gamma)).$$

Pour toute $I \neq \emptyset$ telle que $\mathfrak{X}_I$ ne soit pas vide, notons u_I l'image de u'_I par l'homomorphisme d'image directe

$$\begin{aligned}(\mathrm{Frob}^{n_0}, \mathrm{Id})_* : R^{2(d-|I|)}&(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi\circ\mathrm{Frob}^{n_0},S} \overline{\mathfrak{X}}_I})_* \mathbb{Q}_\ell(d-|I|) \\ & \longrightarrow R^{2(d-|I|)}(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I})_* \mathbb{Q}_\ell(d-|I|).\end{aligned}$$

Alors on a pour tout point x et tout entier $n > n_0$ comme ci-dessus

$$\mathrm{Lef}_x\left(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n\right) = \mathrm{cl}(\delta^n) \cdot x^*(\mathrm{cl}(\Gamma)) + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|}\,\mathrm{cl}\left(\delta_I^n\right) \cdot x^*(u_I).$$

On conclut d'après le théorème A.13. □

3) Généralisation au cas non propre

Dans ce dernier paragraphe, on ne suppose plus que $\mathfrak{X}$ est propre sur S.

On considère toujours une correspondance géométrique sur $\mathfrak{X}$ qui stabilise $\mathfrak{X}_\emptyset$ au voisinage de ses points fixes et on cherche à interpréter les nombres de points fixes dans $\mathfrak{X}_\emptyset$ en termes cohomologiques à la façon du théorème IV.7. On y parvient en recourant au théorème de Fujiwara sur la conjecture de Deligne. Cela amène à raisonner en termes de correspondances cohomologiques sur les espaces de modules grossiers.

a) Espaces de modules grossiers

On note $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ l'espace algébrique grossier associé au champ serein compactifiable $\mathfrak{X}$ sur S et $p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \to S$ sa projection canonique. Comme $\mathfrak{X}$ est lisse de dimension d sur S, il résulte de la proposition A.5 que $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ est cohomologiquement lisse de dimension d sur S au sens qu'il est muni d'un isomorphisme naturel induit par $\mathfrak{X}$

$$R\left(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]\,.$$

Pour toute partie I de $\{1, \ldots, m\}$, on note $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$ l'image schématique de $\overline{\mathfrak{X}}_I$ dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$. C'est un fermé et d'après le théorème A.2, l'espace de modules grossier de $\overline{\mathfrak{X}}_I$ lui est relié par un morphisme fini, surjectif et radiciel. On en déduit que $p_{\overline{\mathfrak{X}}_I}^{\mathrm{gr}} : \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}} \to S$ est cohomologiquement lisse de dimension $d - |I|$ au sens qu'on a un isomorphisme induit par $\overline{\mathfrak{X}}_I$

$$R\left(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I}^{\mathrm{gr}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell(d - |I|)[2d - 2|I|]\,.$$

On note encore $Z^{\mathrm{gr}} = \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ et $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$ l'espace algébrique grossier associé à l'éclaté $\widetilde{Z}$ de $Z = \mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}$. Tous deux sont cohomologiquement lisses de dimension $2d$ sur S et ils sont reliés par un morphisme propre et birationnel $\pi : \widetilde{Z}^{\mathrm{gr}} \to Z^{\mathrm{gr}}$.

Pour toute I, on désigne par E_I^{gr} le fermé de $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$ qui est l'image schématique de E_I. Il est cohomologiquement lisse de dimension $2d - |I|$ sur S. L'image du morphisme composé $E_I^{\mathrm{gr}} \hookrightarrow \widetilde{Z}^{\mathrm{gr}} \xrightarrow{\pi} Z^{\mathrm{gr}}$ est le carré $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}} \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$.

On peut considérer aussi un point fermé $x : s \hookrightarrow S$ du schéma de base S et un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = \varphi \circ x$ vérifie $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$. On désigne par $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr},x}$, $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y}$, $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},x}$, $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},y}$, $Z^{\mathrm{gr},x}$, $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$, et $E_I^{\mathrm{gr},x}$ les fibres de $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$, $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$, Z^{gr}, $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$ et E_I^{gr} au-dessus de x (ou y) et par $p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}^x}$, $p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}^y}$, $p^{\mathrm{gr}}_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x}$, $p^{\mathrm{gr}}_{\overline{\mathfrak{X}}_I^y}$, $p^{\mathrm{gr}}_{Z^x}$, $p^{\mathrm{gr}}_{\widetilde{Z}^x}$, $p^{\mathrm{gr}}_{E_I^x}$ leurs projections naturelles sur s. D'après le théorème A.2(ii) et la proposition A.5, toutes sont cohomologiquement lisses et on a des isomorphismes canoniques

$$x^* R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}^x}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]\ ,$$

$$x^* R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\overline{\mathfrak{X}}_I}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(d-|I|)[2d-2|I|]\ ,$$

$$x^* R\big(p^{\mathrm{gr}}_{Z}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R\big(p^{\mathrm{gr}}_{Z^x}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(2d)[4d]\ ,$$

$$x^* R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\widetilde{Z}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\widetilde{Z}^x}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(2d)[4d]\ ,$$

$$x^* R\big(p^{\mathrm{gr}}_{E_I}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R\big(p^{\mathrm{gr}}_{E_I^x}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(2d-|I|)[4d-2|I|]\ .$$

On notera encore $\delta^n : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},x} \times_s \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} = Z^{\mathrm{gr},x}$ et $\delta_I^n : \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},y} \to \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},x} \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},y}$ les graphes de Frob^n ; ce sont des immersions fermées.

Le morphisme $\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^y \to \widetilde{Z}^x$ en induit un autre $\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ qui relève δ^n et donc est une immersion fermée.

Enfin, pour toute partie non vide I de $\{1, \ldots, m\}$, l'image schématique de

$$\widetilde{\mathfrak{X}}_I^y \xrightarrow{\widetilde{\delta}_I^n} \widetilde{Z}^x \longrightarrow \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$$

est un fermé $\widetilde{\mathfrak{X}}_I^{y,\mathrm{gr}} \xhookrightarrow{\widetilde{\delta}_I^n} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ qui est cohomologiquement lisse de dimension d sur s.

D'après le lemme IV.2, le produit fibré $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \times_{\delta^n, Z^{\mathrm{gr},x}} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ est, comme fermé de $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$, la réunion schématique de $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \xhookrightarrow{\widetilde{\delta}^n} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ et des $\widetilde{\mathfrak{X}}_I^{y,\mathrm{gr}} \xhookrightarrow{\widetilde{\delta}_I^n} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ dont les intersections mutuelles sont de dimensions $< d$.

b) Correspondances cohomologiques

On suppose dorénavant que l'endomorphisme φ de S est propre.

On considère une correspondance géométrique dans $\mathfrak{X}$ au-dessus de φ. C'est un champ normal Γ représentable fini sur $\mathfrak{X} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X} = Z$, dont le support de l'image $|\Gamma|$ est de codimension d et dont la seconde projection $p''_\Gamma : \Gamma \to \mathfrak{X}$ est propre. On suppose que Γ est engendré par sa trace $\Gamma_\emptyset$ au-dessus de l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_\emptyset$ c'est-à-dire que $\Gamma_\emptyset$ est dense dans Γ. On dispose alors du transformé strict $\widetilde{\Gamma}$ de Γ dans $\widetilde{Z}$ qui est la normalisation de $\Gamma_\emptyset$ dans $\widetilde{Z}$. Le morphisme $\pi : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ est représentable, projectif et birationnel.

Notant Γ^{gr} et $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ les espaces algébriques grossiers associés à Γ et $\widetilde{\Gamma}$ et $p'_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}, p''_{\Gamma^{\mathrm{gr}}} : \Gamma^{\mathrm{gr}} \rightrightarrows \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ et $p'_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}, p''_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}} : \widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}} \rightrightarrows \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ les deux couples de projections, on sait d'après la proposition A.6 que les correspondances géométriques Γ et $\widetilde{\Gamma}$ se relèvent en des correspondances cohomologiques

$$p''^{*}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

$$p''^{*}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

et que celles-ci induisent des endomorphismes en cohomologie ℓ-adique à supports compacts

$$\varphi^* R(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \rightrightarrows R(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \ .$$

On a :

Lemme IV.8. – *Les deux endomorphismes en cohomologie*

$$\varphi^* R(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \rightrightarrows R(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell$$

induits par la correspondance Γ *et sa transformée stricte* $\widetilde{\Gamma}$ *coïncident.*

Démonstration : Afin de montrer que les deux endomorphismes induits sont identiques, il suffit de vérifier que, π désignant le morphisme propre et birationnel $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$, le composé

$$\begin{aligned} p''^{*}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell &\longrightarrow \pi_*\pi^* p''^{*}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell = \pi_! p''^{*}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \\ &\longrightarrow \pi_! p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell = \pi_!\pi^! p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \\ &\longrightarrow p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \end{aligned}$$

se confond avec le morphisme

$$p''^{*}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \ .$$

Ces deux flèches coïncident sur un ouvert dense de Γ^{gr}, donc partout puisque ce sont les adjoints de morphismes

$$\left(p_S p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}} p'_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\right)_! \mathbb{Q}_\ell(d + d_S)[2d + 2d_S] \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$$

(en notant d_S la dimension du morphisme lisse $p_S : S \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$) bien déterminés par leurs restrictions à la cohomologie d'un ouvert dense. □

Pour toute partie non vide I de $\{1,\ldots,m\}$, on notera $\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}$ le produit fibré $E_I^{\mathrm{gr}} \times_{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}} \widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ intersection de E_I^{gr} et $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ dans $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$. Il est muni de deux projections $p'_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}}, p''_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}} : \widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}} \to \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$ dont la seconde est propre et qui vérifient $\varphi \circ p^{\mathrm{gr}}_{\overline{\mathfrak{X}}_I} \circ p'_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}} = p^{\mathrm{gr}}_{\overline{\mathfrak{X}}_I} \circ p''_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}}$.

Si $\mathcal{Y}$ est l'un des espaces algébriques que nous considérons, par exemple $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$, $Z^{\mathrm{gr}} = \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ ou $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$, et $\mathcal{Y}'$ est l'un de ses fermés, par exemple $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}, \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}} \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$ ou E_I^{gr}, on désignera par $i^{\mathcal{Y}}_{\mathcal{Y}'}$ le morphisme d'immersion fermée $\mathcal{Y}' \hookrightarrow \mathcal{Y}$. On notera aussi $i^{Z^{\mathrm{gr}}}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}$, $i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}$ et $i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}}_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}}$ les morphismes finis $\Gamma^{\mathrm{gr}} \to Z^{\mathrm{gr}}$, $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}} \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$ et $\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}} \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$.

Comme $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$, $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$ et les $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$, E_I^{gr} sont cohomologiquement lisses de dimensions $d, 2d$ et $d-|I|, 2d-|I|$ sur S, on a des isomorphismes canoniques

$$\big(i^{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}_{\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell(|I|)[2|I|] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell\,,$$

$$\big(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}}_{E_I^{\mathrm{gr}}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell(|I|)[2|I|] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell\,.$$

Maintenant, on peut relever les $\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}$ en des correspondances cohomologiques sur les $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$:

Proposition IV.9. *– Pour toute partie non vide I de $\{1,\ldots,m\}$, le produit "cup" dans $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$ avec l'isomorphisme*

$$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\ \sim\ } \big(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}}_{E_I^{\mathrm{gr}}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell(|I|)[2|I|]$$

définit à partir de la correspondance cohomologique

$$p''^{*}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

une correspondance cohomologique induite

$$p''^{*}_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

sur le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ de $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$.

Celle-ci induit un endomorphisme en cohomologie ℓ-adique à supports compacts

$$\varphi^* R(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I})_! \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I})_! \mathbb{Q}_\ell\,.$$

Démonstration : Comme $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$ est cohomologiquement lisse, on a un isomorphisme canonique

$$p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\ \sim\ } \big(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

et la correspondance cohomologique

$$p''^{*}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

peut s'écrire

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]\,.$$

Son produit "cup" avec

$$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\ \sim\ } \left(i_{E_I^{\mathrm{gr}}}^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(|I|)[2|I|]$$

est un morphisme

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}}^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d+|I|)[2d+2|I|]$$

puisque $\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}} = \widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}} \times_{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}} E_I^{\mathrm{gr}}$.

Cette dernière flèche se récrit

$$p''^{*}_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}} \mathbb{Q}_\ell$$

car $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr}}$ et $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr}}$ sont cohomologiquement lisses de dimensions $2d$ et $d-|I|$ sur S.

La dernière assertion résulte de la proposition A.6(ii). □

c) Nombres d'intersections

Etant donnés un point fermé $x\ :\ s \hookrightarrow S$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $y = \varphi \circ x$ vérifie $\mathrm{Frob}^n \circ y = y \circ \mathrm{Frob}^n = x$, les endomorphismes en cohomologie ℓ-adique à supports compacts induits par Γ ou $\widetilde{\Gamma}$ et les Γ_I

$$\varphi^*(p_{\mathfrak{X}})_! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\Gamma_* = \widetilde{\Gamma}_*} (p_{\mathfrak{X}})_! \mathbb{Q}_\ell$$
$$\varphi^*(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I})_! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{(\widetilde{\Gamma}_I)_*} (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I})_! \mathbb{Q}_\ell$$

se spécialisent en

$$(p_{\mathfrak{X}^y})_! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\Gamma_*^x = \widetilde{\Gamma}_*^x} (p_{\mathfrak{X}^x})_! \mathbb{Q}_\ell\,,$$
$$(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^y})_! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{(\widetilde{\Gamma}_I)_*^x} (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_! \mathbb{Q}_\ell\,.$$

D'autre part, les morphismes propres $\mathrm{Frob}^n : \mathfrak{X}^y \to \mathfrak{X}^x$ et $\mathrm{Frob}^n : \overline{\mathfrak{X}}_I^y \to \overline{\mathfrak{X}}_I^x$ induisent des homomorphismes en sens inverse

$$(p_{\mathfrak{X}^x})_! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\mathrm{Frob}^n} (p_{\mathfrak{X}^y})_! \mathbb{Q}_\ell\,,$$
$$(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\mathrm{Frob}^n} (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^y})_! \mathbb{Q}_\ell\,.$$

Notre but est de calculer sous certaines conditions la somme alternée des traces

$$\mathrm{Tr}\left(\Gamma_*^x \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\mathfrak{X}^x})_! \mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Frob}^n \times \Gamma_*^x, (p_{\mathfrak{X}^y})_! \mathbb{Q}_\ell\right)$$

et

$$\mathrm{Tr}\left((\widetilde{\Gamma}_I)^x_* \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_! \mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Frob}^n \times (\widetilde{\Gamma}_I)^x_*, (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^y})_! \mathbb{Q}_\ell\right)$$

en reliant celles-ci à des nombres d'intersection. Il faut d'abord définir ces nombres.

Comme par hypothèse $\mathfrak{X}$ est un champ serein compactifiable sur S, $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ peut être plongé comme ouvert dense dans un espace algébrique $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$ propre sur S. Quitte à éclater, on peut supposer que le fermé complémentaire $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} - \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ est un diviseur de Cartier D^{gr}. On note $\overline{Z}^{\mathrm{gr}} = \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} \times_{\varphi,S} \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$ et $\widetilde{\overline{Z}}^{\mathrm{gr}}$ l'éclaté de $\overline{Z}^{\mathrm{gr}}$ le long du fermé $D^{\mathrm{gr}} \times_{\varphi,S} D^{\mathrm{gr}}$; il est muni d'un diviseur exceptionnel E^{gr}.

La correspondance Γ^{gr} sur Z^{gr} s'étend par normalisation en des espaces algébriques $\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ et $\widetilde{\overline{\Gamma}}^{\mathrm{gr}}$ sur $\overline{Z}^{\mathrm{gr}}$ et $\widetilde{\overline{Z}}^{\mathrm{gr}}$ dont on note $p'_{\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}$, $p''_{\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}$ et $p'_{\widetilde{\overline{\Gamma}}^{\mathrm{gr}}}$, $p''_{\widetilde{\overline{\Gamma}}^{\mathrm{gr}}}$ les projections sur $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$. De plus, l'espace algébrique compactifiable $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ se plonge comme ouvert dense dans un espace algébrique $\overline{\widetilde{\Gamma}}^{\mathrm{gr}}$ propre sur S et on peut supposer que le morphisme $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}} \to \Gamma^{\mathrm{gr}} \to Z^{\mathrm{gr}}$ se prolonge en $\overline{\widetilde{\Gamma}}^{\mathrm{gr}} \to \widetilde{\overline{\Gamma}}^{\mathrm{gr}} \to \widetilde{\overline{Z}}^{\mathrm{gr}}$.

Pour tout point fermé $x : s \hookrightarrow S$, tous ces objets ont des fibres au-dessus de x qu'on note en ajoutant x en exposant. La fibre $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr},x}$ est un ouvert de l'espace algébrique $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr},x}$ propre sur s et son complémentaire est le diviseur de Cartier $D^{\mathrm{gr},x}$; le morphisme $\widetilde{\overline{Z}}^{\mathrm{gr},x} \to \overline{Z}^{\mathrm{gr},x}$ est projectif, c'est un isomorphisme en dehors de $D^{\mathrm{gr},x} \times_s D^{\mathrm{gr},y}$ (pour $y = \varphi \circ x$) et l'image réciproque de $D^{\mathrm{gr},x} \times_s D^{\mathrm{gr},y}$ est le diviseur de Cartier $E^{\mathrm{gr},x}$.

Lemme IV.10. – *Quitte à changer φ en $\varphi \circ \mathrm{Frob}^{n_0}$ (pour $n_0 \geq 0$ un entier assez grand) et Γ^{gr}, $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$, $\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$, $\widetilde{\overline{\Gamma}}^{\mathrm{gr}}$, $\overline{\widetilde{\Gamma}}^{\mathrm{gr}}$ en les normalisées de leurs images réciproques par $(\mathrm{Frob}^{n_0}, \mathrm{Id}) : \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} \times \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} \to \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} \times \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$, on a en tout point fermé $x : s \hookrightarrow S$ et pour tout entier $n \geq 0$ avec $y = \varphi \circ x$ et $y \circ \mathrm{Frob}^n = \mathrm{Frob}^n \circ y = x$ les deux propriétés suivantes :*

(i) *Le produit fibré sur $Z^{\mathrm{gr},x} = \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},x} \times_s \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y}$ de $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}$ et de $\delta^n : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \to Z^{\mathrm{gr},x}$ est propre sur s. Il en est a fortiori de même du produit fibré sur chaque $\overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},x} \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},y}$ de $\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr},x}$ et de $\delta_I^n : \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},y} \to \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},x} \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^{\mathrm{gr},y}$.*

(ii) *Les correspondances $\Gamma^{\mathrm{gr},x}$ et $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}$ composées avec Frob^n ont un ordre d'annulation > 1 le long de $D^{\mathrm{gr},x} \times_s D^{\mathrm{gr},y}$ au sens de la définition 5.3.3 de [Fujiwara]. Il en est a fortiori de même des correspondances induites $\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr},x}$.*

Démonstration : On utilise toujours le même argument géométrique tiré de [Pink] :

Localement sur $\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$, considérons les images réciproques ℓ', ℓ'' par les projections $p'_{\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}$, $p''_{\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}$ de deux équations qui définissent le diviseur de Cartier

D^{gr} dans $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$. Comme $p''^{-1}_{\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}(\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}) \subseteq p'^{-1}_{\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}(\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}})$ ou encore $p'^{-1}_{\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}(\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} - \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}) \subseteq p''^{-1}_{\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}(\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} - \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}})$, il existe un entier $e \geq 1$ et une fonction a bien définie sur l'ouvert considéré de $\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ tels que

$$\ell''^e = a\,\ell' \,.$$

Choisissons n_0 de façon que $q^{n_0} \geq 2e$. Si l'on remplace $\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ et a par leurs images réciproques via $(\mathrm{Frob}^{n_0}, \mathrm{Id}) : \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} \times \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} \to \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} \times \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$, cette équation devient

$$\ell''^e = a\,\ell'^{q^{n_0}} \,.$$

Elle reste vérifiée si on spécialise au-dessus d'un point $x : s \hookrightarrow S$.

(i) Dans le produit fibré sur $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr},x} \times_s \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr},y}$ de $\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr}}_x$ et $(\mathrm{Frob}^n, \mathrm{Id}) : \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr},y} \to \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr},x} \times_s \overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr},y}$ sont vérifiées les deux équations

$$\begin{cases} \ell''^e = a\,\ell'^{q^{n_0}} \\ \ell' \;\;= \ell''^{q^n} \end{cases}$$

d'où $\ell''^e(1 - a\,\ell''^{(q^{n_0+n}-e)}) = 0$. Dans ce produit fibré, l'image réciproque de l'ouvert $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr},x} \times_s \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y}$ est donc définie par l'équation

$$1 - a\,\ell''^{(q^{n_0+n}-e)} = 0\,;$$

elle est fermée c'est-à-dire propre et il en est de même de son image réciproque dans $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}$ ou les $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}_I$.

(ii) Par composition avec un Frob^n, l'équation $\ell''^e = a\,\ell'^{q^{n_0}}$ vérifiée sur l'ouvert considéré de $\overline{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}$ devient

$$\ell''^e = a\,\ell'^{q^{n_0+n}}$$

qu'on peut récrire

$$(\ell''/\ell')^e = a\,\ell'^{(q^{n_0+n}-e)} \,.$$

Elle signifie que sur le transformé strict $\overset{\simeq}{\Gamma}{}^{\mathrm{gr},x}$ composé avec Frob^n, ℓ''/ℓ' s'annule partout où ℓ' s'annule ; c'est la propriété d'annulation à l'ordre > 1 demandée par Fujiwara. Elle est vérifiée a fortiori par $\overset{\approx}{\Gamma}{}^{\mathrm{gr},x}$ puisque le morphisme $\overset{\approx}{\Gamma}{}^{\mathrm{gr},x} \to \overset{\simeq}{Z}{}^{\mathrm{gr},x}$ se factorise à travers $\overset{\simeq}{\Gamma}{}^{\mathrm{gr},x}$. □

Supposons maintenant que la correspondance $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ vérifie la propriété de conclusion (i) du lemme IV.10. Et considérons comme toujours un point fermé $x : s \hookrightarrow S$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $y = \varphi \circ x$, $\mathrm{Frob}^n \circ y = x$.

Cela permet de définir des nombres d'intersection de la correspondance cohomologique $\widetilde{\Gamma}_*$ en x avec $\delta^n : \mathfrak{X}^y \to Z^x$ et aussi avec les composantes $\widetilde{\delta}^n_I : \widetilde{\mathfrak{X}}^y_I \to \widetilde{Z}^x$ et $\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^y \to \widetilde{Z}^x$ de $\mathfrak{X}^y \times_{\delta^n, Z^x} \widetilde{Z}^x$.

On part de la correspondance cohomologique sur $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$

$$\mathbb{Q}_\ell = p''^{*}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}_*} p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \,.$$

En le point x, elle se spécialise en

$$\mathbb{Q}_\ell = x^*\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow x^* p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}}\mathbb{Q}_\ell$$

qu'on peut écrire

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i^{Z^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}}\right)^!\mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

ou

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}}\right)^!\mathbb{Q}_\ell(d)[2d] \,.$$

D'autre part, on a des isomorphismes

$$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} (\delta^n)^!\mathbb{Q}_\ell(d)[2d] \,,$$

$$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\delta}^n)^!\mathbb{Q}_\ell(d)[2d] \,,$$

$$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \left(\widetilde{\delta}^n_I\right)^!\mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

obtenus en composant $(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}^y})^!\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$ et les $(p_{\widetilde{\mathfrak{X}}_I^{y,\mathrm{gr}}})^!\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$ avec $(p^{\mathrm{gr}}_{Z^x})^!\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell(2d)[4d]$ et $(p^{\mathrm{gr}}_{\widetilde{Z}^x})^!\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell(2d)[4d]$ transformés par $\delta^n : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \to Z^{\mathrm{gr},x}$, $\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$, $\widetilde{\delta}^n_I : \widetilde{\mathfrak{X}}_I^{y,\mathrm{gr}} \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$.

En formant les produits “cup”, on en déduit des morphismes

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i^{Z^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\delta^n}\right)^!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \,,$$

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\widetilde{\delta}^n}\right)^!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \,,$$

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\widetilde{\delta}^n_I}\right)^!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \,.$$

Puis en prenant l'image directe sur x (qui est propre puisque la conclusion du lemme IV.10(i) est vérifiée) et en composant avec les homomorphismes de traces sur $Z^{\mathrm{gr},x}$ et $\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ induits par Z et $\widetilde{Z}$, on en déduit des flèches

$$\mathbb{Q}_\ell \to \left(p^{\mathrm{gr}}_{Z^x}\right)_!\left(i^{Z^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\delta^n}\right)_!\left(i^{Z^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\delta^n}\right)^!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \to \left(p^{\mathrm{gr}}_{Z^x}\right)_!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \to \mathbb{Q}_\ell \,,$$

$$\mathbb{Q}_\ell \to \left(p^{\mathrm{gr}}_{\widetilde{Z}^x}\right)_!\left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\widetilde{\delta}^n}\right)_!\left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\widetilde{\delta}^n}\right)^!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \to \left(p^{\mathrm{gr}}_{\widetilde{Z}^x}\right)_!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \to \mathbb{Q}_\ell \,,$$

$$\mathbb{Q}_\ell \to \left(p^{\mathrm{gr}}_{\widetilde{Z}^x}\right)_!\left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\widetilde{\delta}^n_I}\right)_!\left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}\times\widetilde{\delta}^n_I}\right)^!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \to \left(p^{\mathrm{gr}}_{\widetilde{Z}^x}\right)_!\mathbb{Q}_\ell(2d)[4d] \to \mathbb{Q}_\ell \,.$$

Les images de 1 sont des scalaires qu'on notera

$$\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma}\times\delta^n) \,,$$

$$\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma}\times\widetilde{\delta}^n) \,,$$

$$\mathrm{Lef}_x\left(\widetilde{\Gamma}\times\widetilde{\delta}^n_I\right) .$$

De la même façon, on peut définir le nombre d'intersection en x

$$\mathrm{Lef}_x\left(\widetilde{\Gamma}_I \times \delta_I^n\right)$$

de la correspondance cohomologique

$$p'^{*}_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{(\widetilde{\Gamma}_I)_*} p''^{!}_{\widetilde{\Gamma}_I^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

avec

$$\delta_I^n : \overline{\mathfrak{X}}_I^y \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y\,.$$

d) Formule des points fixes

Nous allons prouver :

Théorème IV.11. –

(i) *Supposons que $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ se plonge comme ouvert dense dans un espace algébrique $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$ propre sur S qui devient un schéma au moins après extension finie du corps de base $\mathbb{F}_q$. Et supposons que les correspondances Γ et $\widetilde{\Gamma}$ satisfont les conclusions du lemme* IV.10.
Alors pour tout point fermé $x : s \hookrightarrow S$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec $y = \varphi \circ x$, $\mathrm{Frob}^n \circ y = x$, on a

$$\mathrm{Tr}\left(\Gamma_*^x \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\mathfrak{X}^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right) + \sum_{I \neq \emptyset}(-1)^{|I|}\,\mathrm{Tr}\left((\widetilde{\Gamma}_I)_*^x \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right)$$
$$= \mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}^n)\,.$$

(ii) *Supposons de plus qu'au-dessus d'un ouvert S' de S, la correspondance $\widetilde{\Gamma}$ satisfait la conclusion de la proposition* IV.5*, que le champ $\mathfrak{X}_\emptyset$ est algébrique au sens de Deligne-Mumford et que la première projection $p'_{\Gamma_\emptyset}$ de la trace $\Gamma_\emptyset$ de Γ au-dessus de $\mathfrak{X}_\emptyset \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_\emptyset$ est étale.*

Si, pour $x : s \hookrightarrow S'$, on note $\mathrm{Lef}_x(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n)$ *le nombre des points d'intersection comptés avec multiplicités de $\Gamma_\emptyset$ et du graphe de* Frob^n *dans $\mathfrak{X}^x \times_s \mathfrak{X}^y$, on a alors*

$$\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}^n) = \mathrm{Lef}_x\left(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n\right)\,.$$

Démonstration : (i) D'après le lemme IV.8, les correspondances cohomologiques sur Γ^{gr} et $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ associées aux correspondances géométriques Γ et $\widetilde{\Gamma}$ induisent le même homomorphisme $\varphi^*(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \to (p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell$ et donc on a

$$\mathrm{Tr}\left(\Gamma_*^x \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\mathfrak{X}^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{Tr}\left(\widetilde{\Gamma}_*^x \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\mathfrak{X}^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right)\,.$$

La correspondance cohomologique $p'^{*}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \to p''^{!}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$ supportée par $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ et relative au faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ peut être vue comme une correspondance cohomologique supportée par $\overline{\widetilde{\Gamma}}^{\mathrm{gr}}$ et relative au faisceau sur $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$ qui est le prolongement par 0 de $\mathbb{Q}_\ell$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ à $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$. Comme $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$ est un espace algébrique propre sur S, le théorème général des points fixes de Grothendieck-Lefschetz-Verdier s'applique. La conclusion du lemme IV.10(i) étant vérifiée par hypothèse, il fait apparaître des termes à distance finie dont la somme n'est autre que $\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \delta^n)$ et des termes à l'infini. Or on a aussi supposé que la conclusion du lemme IV.10(ii) est vérifiée et que $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$ devient un schéma (propre sur S) après extension des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à sa clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$. Cela permet d'appliquer la proposition 5.3.4 de [Fujiwara], la somme des termes à l'infini s'annule et on obtient en définitive

$$\mathrm{Tr}\left(\widetilde{\Gamma}^x \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\mathfrak{X}^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \delta^n)\ .$$

De la même façon, on a pour toute partie I non vide de $\{1, \ldots, m\}$

$$\mathrm{Tr}\left((\widetilde{\Gamma}_I)^x_* \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\overline{\mathfrak{X}}^x_I})_!\mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{Lef}_x\left(\widetilde{\Gamma}_I \times \delta^n_I\right)\ .$$

Il s'agit donc de prouver la formule :

$$\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \delta^n) + \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|}\,\mathrm{Lef}_x\left(\widetilde{\Gamma}_I \times \delta^n_I\right) = \mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}^n) \qquad (1)$$

Le produit "cup" de la correspondance cohomologique

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i^{Z^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

avec

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow (\delta^n)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

est égal à celui de la même correspondance cohomologique récrite

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr},x}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

avec l'homomorphisme image réciproque via $\delta^n \times_{Z^{\mathrm{gr},x}} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x} \xrightarrow{\pi} \delta^n$:

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \pi^*(\delta^n)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d] \longrightarrow \left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\delta^n \times_{Z^{\mathrm{gr},x}} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d] \qquad (2)$$

On a vu que $\delta^n \times_{Z^{\mathrm{gr},x}} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ est la réunion schématique de $\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ et des $\widetilde{\delta}^n_J : \widetilde{\mathfrak{X}}^{y,\mathrm{gr}}_J \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$. Sur chacune de celles-ci, on a un isomorphisme

$$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\delta}^n)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

ou

$$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \left(\widetilde{\delta}^n_J\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

dont l'image directe via l'immersion fermée $\widetilde{\delta}^n \hookrightarrow \delta^n \times_{Z^{\mathrm{gr},x}} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ ou $\widetilde{\delta}^n_J \hookrightarrow \delta^n \times_{Z^{\mathrm{gr},x}} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ est un homomorphisme :

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \left(i^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}_{\delta^n \times_{Z^{\mathrm{gr},x}} \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d] \qquad (3)_\emptyset \text{ ou } (3)_J$$

On prétend que la somme (3) des homomorphismes $(3)_\emptyset$ et $(3)_J$ est égale à l'homomorphisme (2). En effet, il résulte du lemme IV.2 qu'ils coïncident sur un ouvert dense donc qu'ils coïncident partout puisqu'on peut les écrire comme des homomorphismes

$$\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow (p_{\delta^n \times_{Z_x^{\mathrm{gr}}} \widetilde{Z}_x^{\mathrm{gr}}})^! \mathbb{Q}_\ell(-d)[-2d]$$

adjoints d'homomorphismes

$$(p_{\delta^n \times_{Z_x^{\mathrm{gr}}} \widetilde{Z}_x^{\mathrm{gr}}})_! \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(-d)[-2d]$$

complètement déterminés par leurs restrictions à la cohomologie d'un ouvert dense.

De ce que (2) est la somme de $(3)_\emptyset$ et des $(3)_J$, on déduit :

$$\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \delta^n) = \mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}^n) + \sum_{J \neq \emptyset} \mathrm{Lef}_x\left(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}_J^n\right). \tag{4}$$

De la même façon, pour toute partie non vide I de $\{1, \ldots, m\}$, on a l'égalité :

$$\mathrm{Lef}_x\left(\widetilde{\Gamma}_I \times \delta_I^n\right) = \sum_{J \supseteq I} \mathrm{Lef}_x\left(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}_J^n\right). \tag{$5)_I$}$$

Etant donnée la manière dont chaque correspondance cohomologique $\widetilde{\Gamma}_I$ a été définie dans la proposition IV.9 à partir de $\widetilde{\Gamma}$, cela résulte des deux faits suivants :

- D'après le lemme IV.2, l'image réciproque de $\delta_I^n : \overline{\mathfrak{X}}_I^y \to \overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y \hookrightarrow Z^x$ via $\widetilde{Z}^x \xrightarrow{\pi} Z^x$ ou $E_I^x \xrightarrow{\pi} \overline{\mathfrak{X}}_I^x \times_s \overline{\mathfrak{X}}_I^y$ est la réunion schématique des $\widetilde{\delta}_J^n$ avec $J \supseteq I$.
- Pour toute partie $J \supseteq I$, le plongement $\widetilde{\delta}_J^n : \widetilde{\mathfrak{X}}_J^{y,\mathrm{gr}} \hookrightarrow \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ se factorise en $\widetilde{\mathfrak{X}}_J^{y,\mathrm{gr}} \hookrightarrow E_J^{\mathrm{gr},x} \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ et l'isomorphisme sur $\widetilde{\mathfrak{X}}_J^{y,\mathrm{gr}}$

  $$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \left(\widetilde{\delta}_J^n\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

  est le composé de l'isomorphisme

  $$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \left(i_{\widetilde{\mathfrak{X}}_J^{y,\mathrm{gr}}}^{E_J^{\mathrm{gr},x}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d - |J|)[2d - 2|J|]$$

  et du transformé par $(i_{\widetilde{\mathfrak{X}}_J^{y,\mathrm{gr}}}^{E_J^{\mathrm{gr},x}})^!$ de l'isomorphisme sur $E_J^{\mathrm{gr},x}$

  $$\mathbb{Q}_\ell(d - |J|)[2d - 2|J|] \xrightarrow{\sim} \left(i_{E_J^{\mathrm{gr},x}}^{\widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}}\right)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d].$$

En formant la somme alternée de (4) et des égalités $(5)_I$, on obtient l'identité (1) cherchée.

(ii) La conclusion de la proposition IV.5 étant vérifiée par hypothèse, la correspondance $\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{gr}}$ et le graphe $\widetilde{\delta}^n : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y} \to \widetilde{Z}^{\mathrm{gr},x}$ ne se rencontrent pas en dehors de l'ouvert $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}_{\emptyset} \times \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}_{\emptyset}$.

Dans l'ouvert $\mathfrak{X}_{\emptyset} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_{\emptyset} = Z_{\emptyset}$, la trace $\Gamma_{\emptyset}$ de la correspondance Γ est étale sur $\mathfrak{X}_{\emptyset}$ via la première projection $p'_{\Gamma_{\emptyset}}$ donc elle est lisse sur S.

La correspondance cohomologique

$$\mathbb{Q}_\ell = p''^{*}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}_{\emptyset}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}_{\emptyset}} \mathbb{Q}_\ell \cong \big(i^{Z^{\mathrm{gr}}_{\emptyset}}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}_{\emptyset}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

ainsi que l'isomorphisme

$$\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\ \sim\ } (\delta^n)^! \mathbb{Q}_\ell \cong \big(i^{Z^{\mathrm{gr},x}_{\emptyset}}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y}_{\emptyset}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$$

correspondent aux sections $\mathrm{cl}(\Gamma_{\emptyset})$ et $\mathrm{cl}(\delta^n)$ des faisceaux de cohomologie à supports $\mathcal{H}^{2d}_{|\Gamma_{\emptyset}|}\mathbb{Q}_\ell(d)$ et $\mathcal{H}^{2d}_{|\mathfrak{X}^{\mathrm{gr},y}|}\mathbb{Q}_\ell(d)$ qui sont associées à $\Gamma_{\emptyset} \to \mathfrak{X}_{\emptyset} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_{\emptyset} = Z_{\emptyset}$ et à $\delta^n : \mathfrak{X}^y_{\emptyset} \to \mathfrak{X}^x_{\emptyset} \times_s \mathfrak{X}^y_{\emptyset} = Z^x_{\emptyset}$ d'après le paragraphe 2a de l'appendice A.

Le nombre d'intersection $\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}^n)$ est défini en composant leur produit "cup" avec l'homomorphisme de trace sur $Z^{\mathrm{gr},x}_{\emptyset}$ induit par $Z_{\emptyset}$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}^n) = x^*(\mathrm{cl}(\Gamma_{\emptyset})) \cdot \mathrm{cl}(\delta^n)\,.$$

Enfin, le calcul de l'intersection $x^*(\mathrm{cl}(\Gamma_{\emptyset})) \cdot \mathrm{cl}(\delta^n)$ s'effectue localement (pour la topologie étale) au voisinage de chacun des points d'intersection dans le champ $Z_{\emptyset} = \mathfrak{X}_{\emptyset} \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_{\emptyset}$. Comme $\mathfrak{X}_{\emptyset}$ est algébrique au sens de Deligne-Mumford et lisse, on est ramené au cas classique d'une intersection transversale dans un schéma lisse et on conclut

$$\mathrm{Lef}_x(\widetilde{\Gamma} \times \widetilde{\delta}^n) = x^*(\mathrm{cl}(\Gamma_{\emptyset})) \cdot \mathrm{cl}(\delta^n) = \mathrm{Lef}_x\left(\Gamma_{\emptyset} \times \mathrm{Frob}^n\right).$$

□

Nous pouvons maintenant généraliser le résultat du théorème IV.7 au cas où le champ serein $\mathfrak{X}$ n'est pas nécessairement propre sur S :

Théorème IV.12. – *Soit Γ une correspondance géométrique dans le champ lisse (mais non nécessairement propre) $\mathfrak{X}$ au-dessus de l'endomorphisme φ de S (supposé propre). Ainsi la seconde projection $p''_{\Gamma} : \Gamma \to \mathfrak{X}$ est-elle propre. On suppose de plus que :*

- *l'espace de modules grossier $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ de $\mathfrak{X}$ se plonge comme ouvert dense dans un espace algébrique $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$ propre sur S qui devient en schéma au moins après extension finie du corps de base $\mathbb{F}_q$;*
- *l'ouvert $\mathfrak{X}_{\emptyset}$ de $\mathfrak{X}$ est un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford ;*

- *au-dessus d'un ouvert S' de S, la correspondance Γ stabilise l'ouvert $\mathfrak{X}_\emptyset$ de $\mathfrak{X}$ "au voisinage de ses points fixes" et la première projection*

$$p'_{\Gamma_\emptyset} : \Gamma_\emptyset \to \mathfrak{X}_\emptyset$$

de sa trace $\Gamma_\emptyset$ sur $\mathfrak{X}_\emptyset \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}_\emptyset$ y est étale.

Alors, considérant l'homomorphisme induit par la correspondance Γ

$$\varphi^*(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\Gamma_*} (p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell ,$$

il existe des homomorphismes en cohomologie

$$\varphi^*(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I})_!\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{(\Gamma_I)_*} (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I})_!\mathbb{Q}_\ell , \quad I \neq \emptyset ,$$

et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout point fermé $x : s \hookrightarrow S'$ et tout entier $n \geq n_0$ avec $y = \varphi \circ x$ et $\mathrm{Frob}^n \circ y = x$, on ait

$$\begin{aligned}\mathrm{Lef}_x\left(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n\right) &= \mathrm{Tr}\left(\Gamma_*^x \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\mathfrak{X}^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right) \\ &\quad + \sum_{I\neq\emptyset} (-1)^{|I|}\,\mathrm{Tr}\left((\Gamma_I)_*^x \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right) .\end{aligned}$$

Démonstration : Il existe un entier $n_0 > 0$ tel que la correspondance Γ' sur $\varphi' = \varphi \circ \mathrm{Frob}^{n_0}$ transformée de Γ par $\mathrm{Frob}^{n_0} \times \mathrm{Id} : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ vérifie les conclusions du lemme IV.10 et de la proposition IV.5.

D'après le théorème IV.11, les homomorphismes en cohomologie

$$\varphi'^*(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I})_!\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{(\widetilde{\Gamma}'_I)_*} (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I})_!\mathbb{Q}_\ell , \quad I \neq \emptyset ,$$

vérifient pour tout x et $n \geq n_0$ comme dans l'énoncé

$$\begin{aligned}\mathrm{Lef}_x\left(\Gamma'_\emptyset \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}\right) &= \mathrm{Tr}\left(\Gamma'^x_* \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}, (p_{\mathfrak{X}^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right) \\ &\quad + \sum_{I\neq\emptyset} (-1)^{|I|}\,\mathrm{Tr}\left(\left(\widetilde{\Gamma}'_I\right)_*^x \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}, \left(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x}\right)_!\mathbb{Q}_\ell\right) .\end{aligned}$$

Or on a évidemment

$$\mathrm{Lef}_x\left(\Gamma'_\emptyset \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}\right) = \mathrm{Lef}_x\left(\Gamma_\emptyset \times \mathrm{Frob}^n\right)$$

et

$$\mathrm{Tr}\left(\Gamma'^x_* \times \mathrm{Frob}^{n-n_0}, (p_{\mathfrak{X}^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{Tr}\left(\Gamma^x_* \times \mathrm{Frob}^n, (p_{\mathfrak{X}^x})_!\mathbb{Q}_\ell\right) .$$

Les homomorphismes $(\Gamma_I)_*$ définis comme composés des

$$(\mathrm{Frob}^{n_0})^*\varphi^*(p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_!\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{(\widetilde{\Gamma}'_I)_*} (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_!\mathbb{Q}_\ell$$

et des isomorphismes réciproques des

$$(\mathrm{Frob}^{n_0})^* \varphi^* (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Frob}^{n_0}} \varphi^* (p_{\overline{\mathfrak{X}}_I^x})_! \mathbb{Q}_\ell$$

répondent à la question posée. □

Chapitre V

Stabilisation des correspondances de Hecke

On a rappelé au chapitre I que pour tout niveau N le champ $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$ est muni d'une action par correspondances de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_N^r$ de niveau N (et aussi des deux endomorphismes de Frobenius partiels Frob_∞ et Frob_0 au-dessus de $\Lambda_{X-N} = \Lambda \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$. Mais comme $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ n'est pas de type fini et que ses espaces de cohomologie sont de dimension infinie, on a été amené à définir dans $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ des ouverts de type fini $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$. Ce faisant, on a perdu l'action des correspondances de Hecke (et des endomorphismes de Frobenius partiels) : elles sont bien définies génériquement dans les $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$ mais elle ne les stabilisent pas et les nombres de points fixes $\mathrm{Lef}_{\overline{\infty},\overline{0}}^{r,\overline{p}\le p}(f\times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s'}\times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u'})$ qu'on a calculés dans ces ouverts sont a priori dépourvus de sens cohomologique.

La stabilisation des correspondances de Hecke se fait en deux temps.

Le premier consiste à retrouver des correspondances géométriques qui agissent sur la cohomologie ℓ-adique à supports compacts de champs sereins plus gros que les $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$. Quand il n'y a pas de niveau, il suffit d'étendre les correspondances de Hecke par normalisation au-dessus des carrés $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}\times\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$ car les $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$ sont à la fois propres et lisses sur $X\times X$. On procède de même dans les $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$ dans le cas de niveaux N tels que $\mathcal{C}_N^r$ admette une résolution des singularités $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ (par exemple si N n'a pas de multiplicités ou si $r=2$). Pour un niveau N arbitraire, on vérifie dans ce chapitre que les correspondances géométriques définies par normalisation dans les $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$ stabilisent les ouverts lisses $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ ce qui implique qu'elles induisent des endomorphismes de leur cohomologie.

Le second temps consiste à vérifier que ces nouvelles correspondances dans les $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$, $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$ ou $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ stabilisent les ouverts $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$ au voisinage de leurs points fixes, de façon à pouvoir appliquer les résultats du chapitre IV et à donner un sens cohomologique aux nombres de points fixes dans ces ouverts.

On montre aussi que les espaces algébriques grossiers associés aux champs sereins $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$ deviennent des schémas au moins après extension finie du corps de base $\mathbb{F}_q$. Cela permet d'appliquer aux $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}' / a^{\mathbb{Z}}$ le théorème de Fujiwara sur la conjecture de Deligne qui est l'un des principaux ingrédients de la formule du chapitre IV dans le cas non propre.

Dans tout ce chapitre, on fixe encore une fois la courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur le corps fini de base $\mathbb{F}_q$ à q éléments.

1) Propriétés des espaces classifiants de chtoucas itérés

a) Vérification de ce que les champs de chtoucas itérés sont sereins

Pour tout niveau $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$, tout degré $d \in \mathbb{Z}$ et tout polygone de troncature $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ assez convexe en fonction de X et N, on a construit au chapitre III des compactifications $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$. Ce sont des champs algébriques au sens d'Artin, de type fini, contenant $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ comme ouvert dense et munis d'un morphisme

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to (X-N) \times (X-N)$$

qui est propre au sens qu'il vérifie le critère valuatif de propreté. Si $N = \emptyset$ [resp. $N \neq \emptyset$], ce morphisme se relève en un morphisme lisse

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to X \times X \times \left(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\right)^{r-1}$$

[resp.

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to (X-N) \times (X-N) \times \mathcal{C}_N^r \;]$$

où $\mathcal{C}_N^r$ est le champ algébrique au sens d'Artin qui est la normalisation de $\mathcal{C}^{r,N}$ dans le revêtement étale $\mathcal{C}_{N,\emptyset}^r$ de $\mathcal{C}_\emptyset^{r,N}$. Quand $\mathcal{C}_N^r$ admet une résolution des singularités $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ (par exemple quand N n'a pas de multiplicités ou quand $r = 2$), $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{\mathcal{C}_N^r} \widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ est une résolution des singularités de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ qui se trouve munie d'un morphisme lisse

$$\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to (X-N) \times (X-N) \times \widetilde{\mathcal{A}}^{r,N} / \mathcal{A}_\emptyset^{r,N}$$

avec $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N} / \mathcal{A}_\emptyset^{r,N}$ le champ torique quotient d'une variété torique lisse $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}$ par son tore $\mathcal{A}_\emptyset^{r,N}$.

Afin de pouvoir appliquer les résultats du chapitre IV à des correspondances dans les $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ (ou les $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ quand ils existent) au-dessus de $(X-N) \times (X-N)$, il nous faut d'abord vérifier :

Proposition V.1. – *Pour tout niveau $N \hookrightarrow X$, tout degré $d \in \mathbb{Z}$ et tout polygone de troncature $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ assez convexe en fonction de X et N, le champ algébrique $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ (ou $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$) au-dessus de $(X-N) \times (X-N)$ est serein au sens de la définition* A.1.

Démonstration : Par construction, chaque $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ (ou $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$) est représentable projectif au-dessus de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$. Il suffit donc de vérifier que les champs de chtoucas itérés $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ sur $X\times X$ sont sereins. On sait déjà qu'ils sont de type fini et séparés puisque propres. Reste à vérifier la propriété (S3) pour un $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} = \mathfrak{X}$ fixé.

Si $N = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ est un niveau non vide, notons ici $\mathfrak{X}^N$ l'ouvert de $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ défini en demandant que pôle, zéro et dégénérateurs évitent N. D'après le lemme III.13, $\mathfrak{X}^N$ est l'image réciproque par le morphisme de restriction des chtoucas itérés de X à N

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) \xrightarrow{\cdot\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N} \mathcal{C}^{r,N}$$

de l'ouvert $\mathcal{C}'^{r,N}$ de $\mathcal{C}^{r,N}$. Et d'après la proposition III.11, l'ouvert $\mathcal{C}'^r_N$ de $\mathcal{C}^r_N$ est un revêtement fini plat de $\mathcal{C}'^{r,N}$ sur les fibres duquel le groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ agit transitivement.

Par conséquent, $\mathfrak{X}_N = \mathfrak{X}^N \times_{\mathcal{C}'^{r,N}} \mathcal{C}'^r_N = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ est un champ algébrique représentable, fini et plat sur $\mathfrak{X}^N$ et il est muni d'une action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ qui est transitive sur ses fibres. Si le degré de N est assez grand en fonction du polygone de troncature p, le champ $\mathfrak{X}_N$ n'a pas d'automorphismes et d'après le corollaire 8.1.1 de [Laumon, Moret-Bailly] c'est un espace algébrique.

Quand on fait varier le support de N, les ouverts $\mathfrak{X}^N$ recouvrent $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ et ceci achève de prouver que le champ algébrique $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ est serein. $\square$

Si $a \in \mathbb{A}^\times$ est un idèle de degré non nul, les $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\leq d\leq r|\deg(a)|} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ (ou les $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\leq d\leq r|\deg(a)|} \widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$) sont également des champs sereins.

b) Schématisation des espaces de modules grossiers

La suite du présent paragraphe 1 est consacrée à la démonstration du théorème suivant qui permet d'appliquer aux espaces de modules grossiers des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ la conjecture de Deligne démontrée par Fujiwara pour les schémas :

Théorème V.2. – *Pour tout polygone de troncature p (assez convexe en fonction de X), tout degré $d \in \mathbb{Z}$ et tout niveau $N \hookrightarrow X$, l'espace algébrique grossier associé au champ serein $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ devient un schéma au moins après changement du corps de base $\mathbb{F}_q$ en une extension finie.* $\square$

Procédons à une première réduction :

Lemme V.3. *– Afin de prouver le théorème* V.2 *ci-dessus, il suffit de montrer qu'étant donné un polygone de troncature p (assez convexe en fonction de X), alors pour tout entier d assez grand et tout niveau $N = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ de degré assez grand et sans multiplicités, l'espace algébrique*

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}' \times_{\left(\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}\right)} \mathbb{A}^{r-1}$$

est un schéma quasi-projectif où l'action de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ se relève à un fibré ample.

Démonstration : Les morphismes d'oubli du niveau

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$$

sont représentables finis ; d'après le théorème A.2 de [Laumon, Moret-Bailly], il suffit donc de prouver que les espaces de modules grossiers $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ associés aux champs $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ deviennent des schémas après extension finie du corps de base. Comme on peut faire agir $a^{\mathbb{Z}}$, il suffit de le faire quand d est assez grand.

La propriété d'être un schéma est locale et on peut remplacer $\mathfrak{X}$ par les ouverts $\mathfrak{X}^N$ définis en demandant que pôle, zéro et dégénérateurs évitent N, pour $N = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ des niveaux réduits de degrés assez grands.

On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}' = \mathfrak{X}^N \times_{\mathcal{C}'^{r,N}} \mathcal{C}_N'^{r} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{X}^N \arrow[dl] \\
& \mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1} &
\end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est représentable, finie et plate et munie de l'action transitive sur les fibres du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

Supposons que l'on sache que

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}' \times_{\left(\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}\right)} \mathbb{A}^{r-1}$$

est un schéma quasi-projectif où l'action de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ se relève à un fibré ample. Alors il en est de même de son quotient $\widetilde{\mathfrak{X}}^{N,\mathrm{gr}}$ par l'action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

Le quotient de $\widetilde{\mathfrak{X}}^{N,\mathrm{gr}}$ par l'action de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ s'identifie à l'espace algébrique grossier $\mathfrak{X}^{N,\mathrm{gr}}$ associé au champ serein $\mathfrak{X}^N$. D'après le théorème 1.1 de [Mumford, Fogarty], on est réduit à montrer qu'au moins après extension finie du corps de base tout point de $\widetilde{\mathfrak{X}}^{N,\mathrm{gr}}$ admet un voisinage affine stabilisé par $\mathbb{G}_m^{r-1}$ et ceci résulte du lemme général suivant :

Lemme V.4. – *Soit U un schéma quasi-projectif sur un corps $\mathbb{F}$ et muni de l'action d'un tore T qui se relève à un fibré ample.*

Alors, quitte à remplacer le corps de base $\mathbb{F}$ par une extension finie, tout point de U admet un voisinage ouvert affine stabilisé par T.

Démonstration : On peut supposer que U est plongé comme sous-schéma localement fermé dans un espace projectif $\mathbb{P}$ sur lequel T agit. On note $\overline{U}$ l'adhérence de U dans $\mathbb{P}$ et $\partial U = \overline{U} - U$ son bord.

Pour tout point u de U, il existe un polynôme homogène P qui est nul sur ∂U mais ne s'annule pas en u. Quitte à remplacer $\mathbb{F}$ par une extension finie, on peut écrire

$$P = P_1 + \cdots + P_k$$

où $P_1, \ldots, P_k$ sont des polynômes homogènes sur lesquels T agit par des caractères deux à deux distincts. Comme ces caractères sont linéairement indépendants, que P est nul sur ∂U et que ∂U est stabilisé par T, tous les $P_1, \ldots, P_k$ sont nuls sur ∂U. Mais l'un des P_i au moins ne s'annule pas au point u et alors

$$U \cap \{P_i \neq 0\} = \overline{U} \cap \{P_i \neq 0\}$$

est un voisinage ouvert affine de u dans U qui est stabilisé par T. □

c) Recours à la théorie de stabilité de Mumford et Seshadri

A partir de maintenant, on fixe un polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ (assez convexe en fonction de X), un niveau $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ réduit et de degré assez grand en fonction de p et un degré d assez grand en fonction de X, p et N. On doit montrer la propriété du lemme V.3.

Cherchant à se rapprocher des fibrés, on note $\overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ le champ algébrique au sens d'Artin qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe le groupoïde des familles constituées de

- un fibré $\mathcal{E}$ localement libre de rang r sur $X \times S$ dont la restriction au-dessus de tout point géométrique de S est de degré d et de polygone canonique $\leq p$,
- des fonctions $\ell_1, \ldots, \ell_{r-1}$ partout définies sur S,
- un homomorphisme complet

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times S}} \mathcal{O}_{N\times S} = \mathcal{E}_N \Rightarrow \mathcal{O}_{N\times S}^r$$

dont l'image dans $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}(N\times S)$ est $((\mathcal{O}_{N\times S}, \ell_1), \ldots, (\mathcal{O}_{N\times S}, \ell_{r-1}))$.

On rappelle qu'un tel homomorphisme complet consiste en une famille d'homomorphismes linéaires partout non nuls

$$v_s : \Lambda^s \mathcal{E}_N \to \Lambda^s\big(\mathcal{O}_{N\times S}^r\big)\,, \quad 1 \leq s \leq r\,,$$

qui vérifient en particulier les relations

$$v_s = \left(\prod_{t<s} \ell_t^{s-t}\right) \cdot \Lambda^s v_1 \,, \quad 1 \le s \le r \,.$$

Le champ algébrique $\overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$ est muni d'un morphisme sur $\mathbb{A}^{r-1}$ et il est de type fini.

Comme le polygone de troncature p a été choisi assez convexe en fonction de X, le polygone canonique de Harder-Narasimhan du fibré sous-jacent $\mathcal{E}$ à tout point $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \Leftarrow {}^{\tau}\mathcal{E})$ de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}$ est majoré par p. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}' \times_{(\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1})} \mathbb{A}^{r-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p}\le p}} \arrow[dl] \\
& \mathbb{A}^{r-1} &
\end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est un morphisme représentable et quasi-projectif.

On est donc réduit à :

Lemme V.5. – *Afin de montrer la propriété du lemme* V.3 *et donc le théorème* V.2*, il suffit de prouver que dans les conditions ci-dessus, le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}' \times_{\left(\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}\right)} \mathbb{A}^{r-1} \to \overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$$

se factorise à travers un ouvert de $\overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$ *qui est représentable par un schéma quasi-projectif.* □

On va construire un tel ouvert quasi-projectif dans $\overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$ en recourant à la théorie des invariants géométriques de Mumford, à la manière de Seshadri pour les espaces de modules de fibrés stables.

On note $\overline{X}$ la courbe déduite de X par changement du corps de base $\mathbb{F}_q$ en une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$. On commence par :

Lemme V.6. – *Fixons un polygone de troncature p et un entier k_0. Il existe un entier d_0 tel que tout fibré $\mathcal{E}$ de rang r sur $\overline{X}$, de degré* $\deg(\mathcal{E}) = d \ge d_0$ *et de polygone canonique $\le p$ vérifie :*

(i) *On a* $H^1(\overline{X}, \mathcal{E}) = 0$ *et $\mathcal{E}$ est engendré par ses sections globales.*

(ii) *Pour tout sous-fibré non nul $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ de rang $s \le r$ et dont le degré vérifie*

$$\deg(\mathcal{F}) \ge k_0 + \frac{s}{r}\, d \,,$$

le polygone canonique de $\mathcal{F}$ et $\deg(\mathcal{F}) - \frac{s}{r}\, d$ *sont bornés par des constantes qui ne dépendent que de p et k_0*

(iii) *Sous les hypothèses de* (ii)*, on a* $H^1(\overline{X}, \mathcal{F}) = 0$ *et $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales.*

Démonstration : (i) Par dualité de Serre, $H^1(\overline{X}, \mathcal{E})$ est nul si et seulement si il n'y a pas d'homomorphisme non nul

$$\mathcal{E} \longrightarrow \Omega_{\overline{X}} .$$

C'est automatique si le polygone canonique de $\mathcal{E}$ est borné et son degré est assez grand (en fonction du genre de X).
La seconde assertion provient de ce qu'on peut aussi imposer que pour tout point x de $\overline{X}$, $H^1(\overline{X}, \mathcal{E}(-x)) = 0$.

(ii) est évident sur les définitions.

(iii) résulte de (i) et (ii). □

Le degré d ayant été choisi très grand, il résulte du lemme V.6(i) que si $\mathcal{E}$ est le fibré sous-jacent à un point de $\overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$, il est engendré par l'espace $H^0(\overline{X}, \mathcal{E})$ de ses sections globales, lequel est de dimension $h = d + (1-g)r$ (où g désigne le genre de la courbe X).

Notant simplement $\mathcal{V} = \overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}$, soit $\widetilde{\mathcal{V}}$ le champ sur $\mathcal{V}$ qui représente le choix (modulo l'action de $\mathbb{G}_m$) d'un homomorphisme surjectif

$$\mathcal{O}_{X\times S}^h \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{E}$$

qui, en la fibre au-dessus de chaque point géométrique de S, induit un isomorphisme

$$H^0\big(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h\big) \xrightarrow{\sim} H^0(\overline{X}, \mathcal{E}) .$$

Le champ $\widetilde{\mathcal{V}}$ est un torseur au-dessus de $\mathcal{V}$ sous le groupe PGL_h et il résulte de la construction par Grothendieck des “schémas de Hilbert” que $\widetilde{\mathcal{V}}$ est un schéma quasi-projectif.

Bien sûr, nous allons rechercher un ouvert de $\mathcal{V}$ dont l'image réciproque dans $\widetilde{\mathcal{V}}$ soit constituée de points stables (au sens de Mumford) pour l'action de PGL_h.

On choisit un autre sous-schéma fermé réduit $M \hookrightarrow X$ qui évite N et dont le degré est très grand. On notera habituellement m et n les points géométriques de M et N ; ils sont en nombres égaux aux degrés $|M|$, $|N|$ de M et N.

Pour $m \in M, n \in N$, on note E_m, E_n les espaces vectoriels canoniques de dimension h sur les corps résiduels de m, n. On note Gr_m la grassmannienne des quotients de dimension r de E_m.

On a un morphisme canonique

$$\widetilde{\mathcal{V}} \longrightarrow \prod_{m\in M} \mathrm{Gr}_m \hookrightarrow \prod_{m\in M} \mathbb{P}\big(\Lambda^r E_m^\vee\big)$$

et aussi

$$\widetilde{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigoplus_{1\le s\le r}\bigoplus_{n\in N} \mathrm{Hom}\left(\Lambda^s E_n, \Lambda^s E_n'\right)^{\otimes(r!/s)}\right)$$

si, pour $n \in N$, E'_n désigne l'espace vectoriel canonique de dimension r sur le corps résiduel de n.

On munira les $\mathbb{P}(\Lambda^r E_m^\vee)$ d'une polarisation $\epsilon_M \geq 1$ et

$$\mathbb{P}\left(\bigoplus_{\substack{1\leq s\leq r\\ n\in N}} \mathrm{Hom}\left(\Lambda^s E_n, \Lambda^s E'_n\right)^{\otimes(r!/s)}\right)$$

d'une polarisation $\epsilon_N \geq 1$.

d) Le critère numérique de stabilité de Mumford

Considérons un point géométrique V de $\widetilde{\mathcal{V}}$.

Il induit des points des $\mathrm{Gr}_m \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r E_m^\vee)$ qui sont des espaces quotients $E_m \xrightarrow{\pi_m} V_m$ de dimension r.

D'autre part, il induit un point de l'espace projectif

$$\mathbb{P}\left(\bigoplus_{\substack{1\leq s\leq r\\ n\in N}} \mathrm{Hom}\left(\Lambda^s E_n, \Lambda^s E'_n\right)^{\otimes(r!/s)}\right)$$

qui est représenté par une famille d'homomorphismes non nuls

$$v = \left(v_n^s : \Lambda^s E_n \to \Lambda^s E'_n\right)_{\substack{1\leq s\leq r\\ n\in N}} .$$

On cherche des conditions sur V qui impliquent que pour tout sous-groupe à un paramètre

$$c : \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}_h ,$$

on ait avec les notations du paragraphe 2.1 de [Mumford, Fogarty]

$$\mu(V, c) > 0 .$$

Pour un tel c, on a évidemment

$$\mu(V, c) = \epsilon_M \sum_{m\in M} \mu(V_m, c) + \epsilon_N \mu(v, c) .$$

L'espace canonique de dimension h admet une base $e_1, \ldots, e_h$ dans laquelle c s'écrit

$$c(t)\, e_j = t^{n_j}\, e_j , \quad 1 \leq j \leq h ,$$

où les n_j sont des entiers non tous nuls qui vérifient

$$n_1 \geq \cdots \geq n_h \quad \text{et} \quad \sum_{1\leq j\leq h} n_j = 0 .$$

Si J est une partie de $\{1, \ldots, h\}$, on note e_J le produit extérieur (dans l'ordre) des e_j, $j \in J$, et $n_J = \sum_{j \in J} n_j$.

On voit sur les définitions qu'on a pour tout $m \in M$

$$\mu(V_m, c) = \max \left\{ n_J \mid J \subseteq \{1, \ldots, h\},\ |J| = r,\ \Lambda^r \pi_m(e_J) \neq 0 \right\}$$

et de même

$$\mu(v, c) = r! \max_{\substack{1 \le s \le r \\ n \in N}} \left\{ \mu\left(v_n^s, c\right) \right\}$$

où, pour $1 \le s \le r$ et $n \in N$,

$$\mu(v_n^s, c) = \max \left\{ \frac{n_J}{s} \mid J \subseteq \{1, \ldots, h\},\ |J| = s,\ v_n^s(e_J) \neq 0 \right\} .$$

Dans le cône $n_1 \ge \cdots \ge n_h$, $\sum_j n_j = 0$, chaque expression $\mu(V_m, c)$ est linéaire en les coefficients $n_1, \ldots, n_h$ (voir le paragraphe 4.4 de [Mumford, Fogarty]) et il en est de même de chacune des expressions $\mu(v_n^s, c)$ pour n et s fixés. D'autre part, une famille de coefficients $(n_1, \ldots, n_h)$ dans ce cône s'écrit comme un barycentre à pondérations $\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1} \ge 0$ (de somme $\sum_{f=1}^{h-1} \alpha_f = 1$) des familles $\underline{n}_f$ de la forme :

$$\left. \begin{aligned} n_1 = \cdots = n_f = h - f \\ n_{f+1} = \cdots = n_h = -f \end{aligned} \right\}$$

Or, pour ces familles, les $\mu(V_m, c)$ et les $\mu(v_n^s, c)$ ont une expression simple :

Pour $m \in M$, notons F_m l'image dans V_m du sous-espace vectoriel F de base $e_1, \ldots, e_f$. Alors on a pour la famille $\underline{n}_f$

$$\mu(V_m, c) = h \dim(F_m) - fr .$$

De même, pour $n \in N$, notons F_n l'image de F dans le quotient V_n de E_n induit par V.

Soit $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$ la partition de l'entier r qui correspond à la strate de $\mathbb{A}^{r-1}$ qui contient l'image de V. On note comme toujours $\underline{r}^- = \{0, r_1, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$ et $\underline{r}^+ = \{r_1, \ldots, r_1 + \cdots + r_k\}$. Et pour $s \in \{1, \ldots, r\}$, on note ici s^- le plus grand entier dans $\underline{r}^-$ tel que $s^- < s$ et s^+ le plus petit entier dans $\underline{r}^+$ tel que $s \le s^+$.

Chacun des espaces V_n, $n \in N$, est muni d'une filtration décroissante

$$V_n = V_n^0 \supsetneq V_n^{r_1} \supsetneq \ldots \supsetneq V_n^r = 0$$

par des sous-espaces V_n^s, $s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+$, de codimension s.

Avec toutes ces notations, on a alors pour la famille $\underline{n}_f$ et pour n et s fixés

$$\mu\big(v_n^s, c\big) = \frac{h}{s}\min\big\{\dim\big(F_n/F_n \cap V_n^{s^+}\big), \dim\big(F_n/F_n \cap V_n^{s^-}\big) + (s - s^-)\big\} - f\,.$$

En résumé, on a prouvé :

Proposition V.7. – *Pour que l'image d'un point géométrique $V \in \widetilde{\mathcal{V}}$ de type $\underline{r}$ dans l'espace projectif*

$$\prod_{m\in M} \mathbb{P}\big(\Lambda^r E_m^\vee\big) \times \mathbb{P}\left(\bigoplus_{\substack{1\le s\le r\\ n\in N}} \mathrm{Hom}\,\big(\Lambda^s E_n, \Lambda^s E_n'\big)^{\otimes(r!/s)}\right)$$

soit stable, il faut et il suffit que pour toute filtration de l'espace canonique de dimension h par des sous-espaces non triviaux F et pour toute famille de pondérations $\alpha_F > 0$ de somme 1, on ait

$$\begin{aligned} & r\epsilon_M \sum_{m\in M}\sum_F \alpha_F \left[h\,\frac{\dim(F_m)}{r} - \dim(F)\right] \\ + \quad & r!\,\epsilon_N \max_{\substack{1\le s\le r\\ n\in N}} \sum_F \alpha_F \bigg[\frac{h}{s}\min\big\{\dim\big(F_n/F_n \cap V_n^{s^+}\big), \\ & \dim\big(F_n/F_n \cap V_n^{s^-}\big) + (s - s^-)\big\} - \dim(F_f)\bigg] > 0\,. \end{aligned}$$

□

e) Une condition ouverte suffisante pour vérifier la stabilité

Si $\mathcal{E}$ est le fibré sous-jacent à un point de $\mathcal{V}$ de type $\underline{r}$, les fibres $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{E}$ en les points $n \in N$ sont munies de filtrations décroissantes par des sous-espaces $\mathcal{E}_n^s$, $s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+$, de codimension s qui sont induites par la structure de niveau $\mathcal{E}_N \Rightarrow \mathcal{O}_N^r$.

Si $\mathcal{F}$ est un sous-fibré d'un tel $\mathcal{E}$, on notera $\mathcal{F}_n$ la fibre de $\mathcal{F}$ en tout point $n \in N$ et $\mathcal{F}_n^s$ les images réciproques des $\mathcal{E}_n^s$ par l'homomorphisme $\mathcal{F}_n \to \mathcal{E}_n$.

On a :

Lemme V.8. – *Considérons la condition suivante portant sur les points géométriques de $\mathcal{V}$:*

(S) *Pour toute filtration par des sous-fibrés non-triviaux $\mathcal{F}$ du fibré $\mathcal{E}$ sous-jacent à un point donné de type $\underline{r}$ de $\mathcal{V}$ et pour toute famille de* *pondérations* $\alpha_{\mathcal{F}} > 0$ *de somme* 1, *on a l'inégalité*

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \deg(\mathcal{F}) < \frac{\sum \alpha_{\mathcal{F}} \operatorname{rg}(\mathcal{F})}{r} d + \sum_{n \in N} \max_{1 \leq s \leq r} \sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}}$$
$$\left[\frac{\min\left\{ \dim\left(\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_n^{s^+}\right), \dim\left(\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_n^{s^-}\right) + (s - s^-)\right\}}{s} - \frac{\operatorname{rg}(\mathcal{F})}{r} \right].$$

Alors :

(i) *Pour que cette inégalité soit vérifiée par toutes les filtrations par des sous-fibrés* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{E}$, *il suffit qu'elle le soit par les filtrations non triviales par des sous-fibrés maximaux.*
(ii) *La condition* (S) *définit un ouvert* $\mathcal{V}'$ *de* $\mathcal{V}$.

Démonstration : (i) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux sous-fibrés de $\mathcal{E}$ avec $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$, $\operatorname{rg}\mathcal{F} = \operatorname{rg}\mathcal{F}'$ et $\deg \mathcal{F}' = \deg \mathcal{F} + 1$, $\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}'_n$ est un isomorphisme en tous les points $n \in N$ sauf un au plus. En ce point-là chaque différence

$$\frac{1}{s} \min\left\{ \dim\left(\mathcal{F}'_n / \mathcal{F}_n'^{s^+}\right), \dim\left(\mathcal{F}'_n / \mathcal{F}_n'^{s^-}\right) + (s - s^-)\right\}$$

$$-\frac{1}{s} \min\left\{ \dim\left(\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_n^{s^+}\right), \dim\left(\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_n^{s^-}\right) + (s - s^-)\right\}$$

est bornée par 1 car les deux expressions sont toujours comprises entre 0 et 1. Elle est < 1 si $\mathcal{F}' = \mathcal{E}$ et $s = r$. Si donc $\{\mathcal{F}\}'$ est une filtration qui comprend $\mathcal{F}'$ et vérifie (S) et si $\{\mathcal{F}\}$ est une filtration déduite de $\{\mathcal{F}\}'$ en remplaçant $\mathcal{F}'$ par $\mathcal{F}$, alors $\{\mathcal{F}\}$ vérifie aussi l'inégalité (S). D'autre part, la filtration constituée de $\mathcal{E}$ seul vérifie l'égalité.
(ii) La condition (S) est constructible.

Elle est stable par générisation car si V est un point de $\mathcal{V}$ spécialisation d'un point V', on a :

- Le type $\underline{r}$ de V est un raffinement du type $\underline{r}'$ de V'.
- Le fibré $\mathcal{E}$ sous-jacent à V est une spécialisation du fibré $\mathcal{E}'$ sous-jacent à V', les $\mathcal{E}_n$, $n \in N$, sont des spécialisations des $\mathcal{E}'_n$ et pour $s \in \underline{r}'^- \cup \underline{r}'^+$, les $\mathcal{E}_n'^s$ se spécialisent en les $\mathcal{E}_n^s$.
- Tout sous-fibré $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}'$ se spécialise en un sous-fibré $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ de même rang et même degré et pour tout $s \in \underline{r}'^- \cup \underline{r}'^+$, on a

$$\dim\left(\mathcal{F}'_n / \mathcal{F}_n'^s\right) \geq \dim\left(\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_n^s\right).$$

Cela suffit pour conclure car, notant pour tout $s \in \{1, \ldots, r\}$

$$s^- = \max\{t \in \underline{r}^-, t < s\}, \; s^+ = \min\{t \in \underline{r}^+, t \geq s\},$$

$$s'^- = \max\{t \in \underline{r}'^-, t < s\}, \; s'^+ = \min\{t \in \underline{r}'^+, t \geq s\},$$

avec donc $s'^- \leq s^- < s \leq s^+ \leq s'^+$, on a

$$\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^+}\right) \leq \dim\left(\mathcal{F}'_n/\mathcal{F}'^{s^+}_n\right) \leq \dim\left(\mathcal{F}'_n/\mathcal{F}'^{s'^+}_n\right),$$

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^-}\right) + (s-s^-) &\leq \dim\left(\mathcal{F}'_n/\mathcal{F}'^{s^-}_n\right) + (s-s^-)\\ &\leq \dim\left(\mathcal{F}'_n/\mathcal{F}'^{s'^-}_n\right) + (s-s'^-)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s}\min\left\{\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^+}\right), \dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^-}\right)+(s-s^-)\right\}\\ \leq&\frac{1}{s}\min\left\{\dim\left(\mathcal{F}'_n/\mathcal{F}'^{s'^+}_n\right), \dim\left(\mathcal{F}'_n/\mathcal{F}'^{s'^-}_n\right)+(s-s'^-)\right\}.\end{aligned}$$

$\square$

On notera $\widetilde{\mathcal{V}}'$ l'ouvert de $\widetilde{\mathcal{V}}$ image réciproque de l'ouvert $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$.
Sur l'espace projectif produit

$$\prod_{m\in M}\mathbb{P}\big(\Lambda^r E_m^\vee\big)\times\mathbb{P}\left(\bigoplus_{\substack{1\leq s\leq r\\ n\in N}}\mathrm{Hom}\left(\Lambda^s E_n, \Lambda^s E'_n\right)^{\otimes(r!/s)}\right),$$

on met une polarisation $(\epsilon_M, \ldots, \epsilon_M\,;\epsilon_N)$ telle que

$$\epsilon_M|M|\,\frac{r|N|}{h-|N|} = r!\epsilon_N\,.$$

Avec ce choix, nous allons prouver :

Théorème V.9. – *On suppose que le degré d est assez grand en fonction de X, r, du polygone de troncature p et du niveau N et que le degré $|M|$ de M est assez grand en fonction de X, r, p, N et d. Alors le morphisme*

$$\widetilde{\mathcal{V}}'\to\prod_{m\in M}\mathbb{P}(\Lambda^r E_m^\vee)\times\mathbb{P}\left(\bigoplus_{\substack{1\leq s\leq r\\ n\in N}}\mathrm{Hom}\left(\Lambda^s E_n, \Lambda^s E'_n\right)^{\otimes(r!/s)}\right)$$

vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) *Il envoie $\widetilde{\mathcal{V}}'$ dans l'ouvert des points stables.*
(ii) *Deux points de $\widetilde{\mathcal{V}}'$ ont même image si et seulement si ils sont transformés l'un de l'autre par $\mathbb{G}_m$.*

Démonstration : (i) Considérons donc un point V de $\widetilde{\mathcal{V}}'$ dont on note $\mathcal{E}$ le fibré sous-jacent et $\underline{r}$ le type.

Etant donné F un sous-espace propre de l'espace canonique de dimension h, on peut considérer le sous-fibré $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ qu'il engendre. Comme précédemment, les fibres de $\mathcal{F}$ en les $n \in N$ sont notées $\mathcal{F}_n$; elles sont munies de filtrations $(\mathcal{F}_n^s)_{s\in\underline{r}^-\cup\underline{r}^+}$. On désigne par $\mathcal{F}_m$ les fibres de $\mathcal{F}$ en les $m \in M$ et par $\mathcal{F}_m^r$ les noyaux des homomorphismes $\mathcal{F}_m \to \mathcal{E}_m$.

En notant $h^0(\mathcal{F})$ et $h^1(\mathcal{F})$ les dimensions de $H^0(\overline{X}, \mathcal{F})$ et $H^1(\overline{X}, \mathcal{F})$, on a bien sûr

$$\dim(F) \leq h^0(\mathcal{F})$$

et l'inégalité est stricte si $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

Il suffit donc de prouver que si $\{\mathcal{F}\}$ est une filtration non triviale de $\mathcal{E}$ et les $\alpha_{\mathcal{F}}$ sont des pondérations > 0 de somme 1, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|M|}\sum_{m\in M}\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}\left[h\frac{\dim\left(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_m^r\right)}{r} - h^0(\mathcal{F})\right] \\
&+\frac{|N|}{h-|N|}\max_{\substack{1\leq s\leq r\\ n\in N}}\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}\Bigg[\frac{h}{s}\min\Big\{\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^+}\right), \\
&\qquad\qquad \dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^-}\right)+(s-s^-)\Big\} - h^0(\mathcal{F})\Bigg] > 0
\end{aligned}$$

(en effet, cette expression vaut 0 si tous les $\mathcal{F}$ sont égaux à $\mathcal{E}$). Cela se récrit

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}h^0(\mathcal{F}) + \frac{h-|N|}{r}\,\frac{1}{|M|}\sum_{m\in M}\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}\dim(\mathcal{F}^r) \\
&\qquad\qquad < \frac{h-|N|}{r}\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}\,\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \\
&+|N|\max_{\substack{1\leq s\leq r\\ n\in N}}\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}\frac{\min\left\{\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^+}\right), \dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^-}\right)+(s-s^-)\right\}}{s}.
\end{aligned}$$

On a besoin du lemme suivant :

Lemme V.10. – *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux fibrés de même rang sur $\overline{X}$, reliés par un homomorphisme injectif $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$ et tels que $\mathcal{F}$ soit engendré par ses sections globales.*

Alors on a :

(i) $\deg(\mathcal{F}'/\mathcal{F}) \leq \deg(\mathcal{F}')$,
(ii) $h^0(\mathcal{F}') \leq \mathrm{rg}(\mathcal{F}') + \deg(\mathcal{F}')$.

Démonstration : (i) Le fibré $\mathcal{F}$ contient un sous-fibré de la forme $\mathcal{O}_{\overline{X}}^{\mathrm{rg}\mathcal{F}}$.

Le quotient $\mathcal{F}/\mathcal{O}_{\overline{X}}^{\mathrm{rg}\mathcal{F}}$ est de torsion donc

$$\deg(\mathcal{F}'/\mathcal{F}) \leq \deg\left(\mathcal{F}'/\mathcal{O}_{\overline{X}}^{\mathrm{rg}\mathcal{F}}\right) = \deg(\mathcal{F}')\ .$$

(ii) On a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'/\mathcal{F} \to 0$$

où $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ est de torsion et où on peut supposer que $\mathcal{F}$ est de la forme $\mathcal{O}_{\overline{X}}^{\mathrm{rg}\mathcal{F}}$. Mais dans ce cas

$$h^0(\mathcal{F}') \leq h^0(\mathcal{F}) + h^0(\mathcal{F}'/\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}') + \deg(\mathcal{F}') .$$

□

Suite de la démonstration du théorème V.9 : Comme le polygone canonique du fibré $\mathcal{E}$ est majoré par p, il résulte du lemme V.10(i) que pour tout sous-fibré $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a

$$\sum_{m \in M} \dim\left(\mathcal{F}_m^r\right) \leq \frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r} d + p(\mathrm{rg}\,\mathcal{F}) .$$

Considérons d'abord les sous-fibrés $\mathcal{F}$ dans la filtration qui vérifient $h^1(\mathcal{F}) \neq 0$. On prétend qu'ils satisfont l'inégalité

$$h^0(\mathcal{F}) + \frac{1}{|M|} \frac{h - |N|}{r} \left(\frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r} d + p(\mathrm{rg}\,\mathcal{F}) \right) < \frac{h - |N|}{r} \mathrm{rg}(\mathcal{F}) .$$

En effet, ayant fixé un entier k_0 et ayant pris d assez grand en fonction de k_0 et du polygone p, on voit d'après le lemme V.6(iii) que

$$\deg(\mathcal{F}) < k_0 + \frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r} d$$

si bien que d'après le lemme V.10(ii) ci-dessus on a

$$h^0(\mathcal{F}) < k_0 + \frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r} d + \mathrm{rg}\,\mathcal{F} .$$

Comme $h = d + (1-g)r$, on est réduit à prouver

$$k_0 + \frac{\mathrm{rg}\mathcal{F}}{r} d + \mathrm{rg}\mathcal{F} + \frac{1}{|M|} \frac{(h - |N|)}{r} \left(\frac{\mathrm{rg}\mathcal{F}}{r} d + p(\mathrm{rg}\mathcal{F}) \right)$$

$$\leq \frac{\mathrm{rg}\mathcal{F}}{r} d + (1-g)\mathrm{rg}\mathcal{F} - \frac{|N|}{r} \mathrm{rg}\mathcal{F} .$$

C'est vérifié si k_0 est pris suffisamment négatif en fonction de r, $|N|$ et g puis $|M|$ suffisamment grand en fonction de r, $|N|$, g, p et d.

Ceci nous ramène au cas où tous les éléments $\mathcal{F}$ de la filtration vérifient $h^1(\mathcal{F}) = 0$, soit

$$h^0(\mathcal{F}) = \deg \mathcal{F} + (1-g)\,\mathrm{rg}\,\mathcal{F} .$$

Comme le point V vérifie la condition (S) du lemme V.8 qui définit les ouverts $\mathcal{V}'$ et $\widetilde{\mathcal{V}}'$, la différence

$$\varepsilon = |N| \max_{\substack{1\le s\le r\\ n\in N}} \sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \frac{\min\left\{\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^+}\right), \dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^-}\right) + (s-s^-)\right\}}{s}$$
$$- \sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \left[\deg \mathcal{F} - \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\, d + |N|\, \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\right]$$

est > 0. Il s'agit de prouver

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} [\deg \mathcal{F} + (1-g) \operatorname{rg}\mathcal{F}]$$
$$+ \frac{1}{|M|}\, \frac{h-|N|}{r} \sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \left[\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r} d + p(\operatorname{rg}\mathcal{F})\right]$$
$$< \varepsilon + \sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \left[\deg \mathcal{F} - \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r} d + |N| \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r} + \frac{h-|N|}{r} \operatorname{rg}\mathcal{F}\right]$$

qui s'écrit encore

$$\frac{1}{|M|}\frac{h-|N|}{r} \sum \alpha_{\mathcal{F}} \left[\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\, d + p(\operatorname{rg}\mathcal{F})\right] < \varepsilon\,.$$

Dans le simplexe des familles de pondérations $\alpha_{\mathcal{F}} \geq 0$ de somme 1, il existe une décomposition en polyèdres convexes où ε est une fonction linéaire et dont les sommets ont des coordonnées $\alpha_{\mathcal{F}}$ rationnelles ne dépendant que de r. Il suffit de traiter le cas de ces sommets $(\alpha_{\mathcal{F}})$ mais alors $\varepsilon > 0$ est minorée par une constante positive qui ne dépend que de r et l'inégalité ci-dessus est automatiquement vérifiée si $|M|$ est pris assez grand en fonction de $g, r, p, |N|$ et d.

(ii) Considérons deux points V et V' de $\widetilde{\mathcal{V}}'$ qui ont la même image dans

$$\prod_{m\in M} \mathbb{P}\big(\Lambda^r E_m^\vee\big) \times \mathbb{P}\left(\bigoplus_{\substack{1\le s\le r\\ n\in N}} \operatorname{Hom}\left(\Lambda^s E_n, \Lambda^s E'_n\right)^{\otimes(r!/s)}\right)\,.$$

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ leurs fibrés sous-jacents. Ils s'écrivent comme les quotients de $\mathcal{O}_X^h$ par des sous-fibrés maximaux $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

Il s'agit de montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ c'est-à-dire que $\mathcal{H} \to \mathcal{E}'$ et $\mathcal{H}' \to \mathcal{E}$ sont nuls.

Supposons par exemple que $\mathcal{H}' \to \mathcal{E}$ n'est pas nul et notons $\mathcal{F}$ son image, $\mathcal{K}'$ son noyau.

Comme la restriction à M de $\mathcal{H}' \to \mathcal{E}$ est nulle, $\mathcal{F}$ est contenu dans $\mathcal{E}(-M)$ et on peut majorer

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\, d + p(\operatorname{rg}\mathcal{F}) - |M| \operatorname{rg}\mathcal{F}\ .$$

D'autre part, on a

$$\deg \mathcal{H}' = \deg \mathcal{O}_{\overline{X}}^{h} - \deg \mathcal{E}' = -d$$

et $\deg \mathcal{K}' \leq 0$ puisque $\mathcal{K}'$ est plongé dans $\mathcal{O}_{\overline{X}}^{h}$.

On en déduit $\deg \mathcal{F} = \deg \mathcal{H}' - \deg \mathcal{K}' \geq -d$.

Il y a contradiction si $|M|$ est assez grand en fonction de r, p et d. □

On déduit du théorème V.9 :

Corollaire V.11. –

(i) *Le schéma $\widetilde{\mathcal{V}}'$ est quasi-affine au-dessus de*

$$\prod_{m \in M} \mathbb{P}\big(\Lambda^r E_m^{\vee}\big) \times \mathbb{P}\left(\bigoplus_{\substack{1 \leq s \leq r \\ n \in N}} \mathrm{Hom}\left(\Lambda^s E_n, \Lambda^s E_n'\right)^{\otimes (r!/s)}\right).$$

Le fibré ample image réciproque est naturellement muni d'une action du groupe PGL_h (*et aussi du tore* $\mathbb{G}_m^{r-1}$).

(ii) *Relativement à cette action de* PGL_h *sur son fibré ample, tous les points de $\widetilde{\mathcal{V}}'$ sont stables.*

(iii) *L'ouvert $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ est un schéma quasi-projectif* (*dont le fibré ample naturel est muni d'une action de* $\mathbb{G}_m^{r-1}$).

Démonstration : (i) D'après le théorème V.9(ii), la projection sur cet espace projectif produit du quotient $\widetilde{\mathcal{V}}'/\mathbb{G}_m$ de $\widetilde{\mathcal{V}}'$ par l'action libre de $\mathbb{G}_m$ est un monomorphisme. D'après le corollaire A.2.2 de [Laumon, Moret-Bailly], c'est un morphisme quasi-affine et il en est de même de la projection de $\widetilde{\mathcal{V}}'$.
(Remarque : En fait, on peut montrer que la projection de $\widetilde{\mathcal{V}}'/\mathbb{G}_m$ est une immersion localement fermée.)

(ii) résulte de (i) et du théorème V.9(i) d'après la proposition 1.18 de [Mumford, Fogarty] chapitre 1, paragraphe 5.

(iii) résulte de (ii) d'après le théorème 1.10 de [Mumford, Fogarty] chapitre 1, paragraphe 4. □

f) Vérification du critère de stabilité par les chtoucas itérés

Nous allons montrer maintenant :

Proposition V.12. – *Si le degré $|N|$ du niveau réduit $N = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ est assez grand en fonction de X, de r et du polygone de troncature p, le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p} \leq p}}' \times_{\left(\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}\right)} \mathbb{A}^{r-1} \to \overline{\mathrm{Vec}_N^{r,d,\overline{p} \leq p}} = \mathcal{V}$$

se factorise à travers l'ouvert $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$.

Démonstration : Considérons donc un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \,;\, \ell_1, \ldots, \ell_{r-1} \,;\, {}^\tau\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}'' \,;\, \mathcal{E}_N \Rightarrow \mathcal{O}_{\overline{N}}^r)$ de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}' \times_{(\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1})} \mathbb{A}^{r-1}$. Soit $\underline{r}$ son type.

On sait que $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ sont munis de filtrations croissantes canoniques $(\mathcal{E}_s)$, $(\mathcal{E}'_s)$, $(\mathcal{E}''_s)$ par des sous-fibrés maximaux de rangs $s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+$. Le fibré $\mathcal{E}$ est de degré d, sa filtration canonique de Harder-Narasimhan est un raffinement de $(\mathcal{E}_s)$, son polygone canonique est majoré par p et on a

$$\deg(\mathcal{E}_s) - \frac{s}{r}\, d \in \,]p(s) - 1, p(s)], \ \forall s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+ .$$

D'autre part, ${}^\tau\mathcal{E}$ est muni d'une filtration décroissante $(\overline{\mathcal{E}}^s)$ par des sous-fibrés maximaux de corangs $s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+$ et on a des isomorphismes

$$\overline{\mathcal{E}}^{s^-} / \overline{\mathcal{E}}^s \cong \mathcal{E}''_s / \mathcal{E}''_{s^-} .$$

Pour $0 < s^- < s < r$ [resp. $0 = s^- < s < r$, $0 < s^- < s = r$, $0 = s^- < s = r$] on a un isomorphisme $\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \cong \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-}$ [resp. un plongement de degré 1 $\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \hookleftarrow \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-}$, $\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \hookrightarrow \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-}$, $\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \hookrightarrow \mathcal{E}'_s/\mathcal{E}'_{s^-} \hookleftarrow \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-}$].

Comme p a été pris assez convexe, la filtration canonique de Harder-Narasimhan du fibré

$$\bigoplus_{s \in \underline{r}^+} \overline{\mathcal{E}}^{s^-} / \overline{\mathcal{E}}^s$$

est un raffinement de la filtration par les

$$\bigoplus_{\substack{s \in \underline{r}^+ \\ s \leq t}} \overline{\mathcal{E}}^{s^-} / \overline{\mathcal{E}}^s, \quad t \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+ .$$

On notera $\overline{p}$ le polygone canonique de ce fibré. C'est un polygone convexe $\overline{p} : [0, r] \to \mathbb{R}_+$, s'annulant aux points extrémaux 0 et r et qui admet des ruptures de pentes en les entiers $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$.

On sait d'autre part qu'en tout point $n \in N$, le transformé par τ de la filtration décroissante $(\mathcal{E}_n^s)$ de la fibre $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{E}$ en n qui est induite par la structure de niveau $\mathcal{E}_N \Rightarrow \mathcal{O}_{\overline{N}}^r$ coïncide avec la filtration induite par celle $(\overline{\mathcal{E}}^s)$ de ${}^\tau\mathcal{E}$ par des sous-fibrés.

Selon le lemme V.8(i), on doit montrer que si $\{\mathcal{F}\}$ est une filtration non-triviale de $\mathcal{E}$ par des sous-fibrés maximaux et les $\alpha_{\mathcal{F}}$ sont des pondérations > 0 de somme 1, on a

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \deg(\mathcal{F}) < \sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r}\, d + \sum_{n \in N} \max_{1 \leq s \leq r}$$
$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \left[\frac{\min\left\{\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^+}\right), \dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^-}\right) + (s - s^-)\right\}}{s} - \frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r} \right]$$

(pourvu que $|N|$ soit assez grand en fonction de p). Ici encore on peut supposer que les $\alpha_{\mathcal{F}}$ sont des rationnels éléments d'un ensemble fini qui ne dépend que de r. Les expressions

$$\max_{1\leq s\leq r}\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}\left[\frac{\min\left\{\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^+}\right),\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^{s^-}\right)+(s-s^-)\right\}}{s}-\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\right]$$

sont toutes ≥ 0 et quand elles ne sont pas nulles elles sont minorées par une constante > 0 qui ne dépend que de r.

Pour tout élément $\mathcal{F}$ de la filtration $\{\mathcal{F}\}$, notons d'autre part $(\overline{\mathcal{F}}^s) = ({}^\tau\mathcal{F}\cap\overline{\mathcal{E}}^s)_{s\in\underline{r}^-\cup\underline{r}^+}$ la filtration de ${}^\tau\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$ induite par la filtration décroissante $(\overline{\mathcal{E}}^s)$ de ${}^\tau\mathcal{E}$.

On a la majoration

$$\begin{aligned}\deg(\mathcal{F}) &= \deg(\overline{\mathcal{F}})\\ &= \sum_{s\in\underline{r}^+}\deg(\overline{\mathcal{F}}^{s^-}/\overline{\mathcal{F}}^s)\\ &\leq \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\,d-|N_{\mathcal{F}}|+\sum_{s\in\underline{r}^+}[\overline{p}(s^-+\operatorname{rg}(\overline{\mathcal{F}}^{s^-}/\overline{\mathcal{F}}^s))-\overline{p}(s^-)]\end{aligned}$$

où $|N_{\mathcal{F}}|$ désigne le cardinal du sous-ensemble $N_{\mathcal{F}}$ de N des éléments n pour lesquels il existe $s\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+$ vérifiant

$$\dim\left(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_n^s\right)\neq\operatorname{rg}(\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}^s)=d_{\mathcal{F}}^s\,.$$

Comme par hypothèse le cardinal $|N|$ est très grand en fonction du polygone p, on est ramené à montrer que si la filtration $\{\mathcal{F}\}$ vérifie

$$\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}\left[\frac{\min\left\{d_{\mathcal{F}}^{s^+},d_{\mathcal{F}}^{s^-}+(s-s^-)\right\}}{s}-\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\right]\leq 0$$

pour tout s, $1\leq s\leq r$, alors

$$\sum_{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{F}}\sum_{s\in\underline{r}^+}\left[\overline{p}\big(s^-+d_{\mathcal{F}}^s-d_{\mathcal{F}}^{s^-}\big)-\overline{p}(s^-)\right]<0\,.$$

Le polygone $\overline{p}:[0,r]\to\mathbb{R}_+$ est convexe et il a des ruptures de pentes en les entiers $t\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+$. Il s'écrit comme une somme

$$\overline{p}=\sum_{1\leq t<r}\overline{p}_t$$

où chaque $\overline{p}_t$ est un polygone convexe qui est affine sur $[0,t]$ et $[t,r]$ et même a une rupture de pente en t si $t\in\underline{r}^-\cap\underline{r}^+$.

Pour tout t, $1 \leq t < r$, l'inégalité

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \sum_{s \in \underline{r}^+} \left[\overline{p}_t\left(s^- + d^s_{\mathcal{F}} - d^{s^-}_{\mathcal{F}}\right) - \overline{p}_t(s^-)\right] \leq 0$$

est exactement équivalente (si $\overline{p}_t \neq 0$) à l'inégalité

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \left[\frac{\min\left\{d^{t^+}_{\mathcal{F}}, d^{t^-}_{\mathcal{F}} + (t - t^-)\right\}}{t} - \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r}\right] \leq 0$$

laquelle est vérifiée par hypothèse.

De plus, on a pour tout $\mathcal{F}$

$$\frac{\min\left\{d^{r}_{\mathcal{F}}, d^{r^-}_{\mathcal{F}} + (r - r^-)\right\}}{r} - \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} \geq 0$$

et il y a égalité si et seulement si $d^{r^-}_{\mathcal{F}} = \operatorname{rg} \mathcal{F} - (r - r^-)$ puisque $d^r_{\mathcal{F}} = \operatorname{rg} \mathcal{F}$ et $d^r_{\mathcal{F}} - d^{r^-}_{\mathcal{F}} \leq (r - r^-)$.

L'inégalité

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \left[\frac{\min\left\{d^{r}_{\mathcal{F}}, d^{r^-}_{\mathcal{F}} + (r - r^-)\right\}}{r} - \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r}\right] \leq 0$$

impose donc que pour tout $\mathcal{F}$, on ait

$$d^{r^-}_{\mathcal{F}} = \operatorname{rg} \mathcal{F} - (r - r^-)\,.$$

Comme la filtration $\{\mathcal{F}\}$ est non triviale, cela impose $r^- > 0$ et on obtient une inégalité stricte

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \left[\frac{d^{r^-}_{\mathcal{F}}}{r^-} - \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r}\right] < 0$$

qui implique

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \sum_{s \in \underline{r}^+} \left[\overline{p}_{r^-}\left(s^- + d^s_{\mathcal{F}} - d^{s^-}_{\mathcal{F}}\right) - \overline{p}_{r^-}(s^-)\right] < 0$$

(puisque $\overline{p}_{r^-} \neq 0$) et donc

$$\sum_{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{F}} \sum_{s \in \underline{r}^+} \left[\overline{p}\left(s^- + d^s_{\mathcal{F}} - d^{s^-}_{\mathcal{F}}\right) - \overline{p}(s^-)\right] < 0\,.$$

$\square$

2) Stabilisation des correspondances de Hecke dans un ouvert lisse

a) Prolongement des correspondances de Hecke par normalisation

Pour tout niveau $N \hookrightarrow X$ et comme rappelé dans le paragraphe 1c du chapitre I, à toute fonction $f \in \mathcal{H}_N^r$ est associée une correspondance finie étale, encore notée f, dans $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} (X - T_f) \times (X - T_f)$ au-dessus de l'identité de $(X - T_f) \times (X - T_f)$, pour T_f un ensemble fini de points fermés de X contenant N qui dépend de f. C'est une combinaison linéaire finie de champs $\Gamma_N^r(g)$ munis de morphismes représentables finis

$$\Gamma_N^r(g) \to \mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} \mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} (X - T_f) \times (X - T_f)$$

dont les composés avec les deux projections sur $\mathrm{Cht}_N^r \times_{X\times X} (X - T_f) \times (X - T_f)$ sont représentables finis étales.

D'autre part, Λ désignant le schéma complémentaire dans $X \times X$ de la diagonale et de ses images réciproques successives par les endomorphismes $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$, on dispose des deux endomorphismes de Frobenius partiels Frob_∞ et Frob_0 dans $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} \Lambda$ au-dessus des endomorphismes $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ de Λ ; ils vérifient $\mathrm{Frob}_\infty \circ \mathrm{Frob}_0 = \mathrm{Frob}_0 \circ \mathrm{Frob}_\infty = \mathrm{Frob}$.

Notant $\Lambda_f = \Lambda \times_{X\times X} (X - T_f) \times (X - T_f)$, on peut considérer pour tous entiers $s, u \in \mathbb{N}$ la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} \Lambda_f$ au-dessus de $\mathrm{Frob}_X^s \times \mathrm{Frob}_X^u$ obtenue en composant la correspondance f et les endomorphismes Frob_∞^s et Frob_0^u. C'est une combinaison linéaire finie de champs munis de morphismes représentables finis sur $(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} \Lambda_f) \times_{\mathrm{Frob}_X^s \times \mathrm{Frob}_X^u, \Lambda_f} (\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} \Lambda_f)$ dont les composés avec la première projection sur $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} \Lambda_f$ sont représentables finis étales.

On remarque que les transformés par une telle correspondance des points génériques de $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ consistent encore en des familles de points génériques de $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$; tous sont dans l'ouvert $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ pour n'importe quel polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$. Cela signifie que chaque correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ est engendrée par sa trace dans l'ouvert

$$\left(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} \Lambda_f\right) \times_{\mathrm{Frob}_X^s \times \mathrm{Frob}_X^u, \Lambda_f} \left(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} \Lambda_f\right)$$

et on est autorisé à noter encore $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ la normalisation de celle-ci au-dessus de la compactification

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Frob}_X^s \times \mathrm{Frob}_X^u, (X-N)\times(X-N)} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$$

ou bien au-dessus de

$$\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Frob}_X^s \times \mathrm{Frob}_X^u, (X-N)\times(X-N)} \widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$$

quand on sait que $\mathcal{C}_N^r$ admet une résolution des singularités $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ (par exemple quand N est simple ou quand $r = 2$).

Résumons :

Lemme V.13. – *Pour tout niveau $N \hookrightarrow X$, tout polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ assez convexe en fonction de X et de N, toute fonction $f \in \mathcal{H}_N^r$ et tous entiers $s, u \in \mathbb{N}$, l'écriture composée*

$$f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$$

définit une correspondance dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ (ou dans $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ quand il existe) au-dessus de l'endomorphisme $\mathrm{Frob}_X^s \times \mathrm{Frob}_X^u$ de $(X-N)\times(X-N)$.

Elle est engendrée par sa trace dans l'ouvert

$$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}\ .$$

Enfin, la première projection de cette trace sur $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ est représentable étale au-dessus d'un ouvert de $(X - T_f) \times (X - T_f)$ qui contient $\Lambda_f = \Lambda \times_{X\times X} (X - T_f) \times (X - T_f)$ et ne dépend que de $t = u - s$. □

De la même façon, si $p \leq q$ sont deux polygones de troncature assez convexes en fonction de X et N et $d \in \mathbb{Z}$ est un degré, on peut considérer la correspondance dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{(X-N)\times(X-N)} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq q}}$ (ou éventuellement $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{(X-N)\times(X-N)} \widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq q}}$) qui normalise le graphe de l'inclusion $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p} \hookrightarrow \mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq q}$.

Dans chaque $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$, $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ désigne l'ouvert défini en demandant que non seulement le pôle et le zéro mais aussi les dégénérateurs de chtoucas itérés évitent le niveau N. Rappelons que d'après le corollaire III.14, le morphisme

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}' \to (X - N) \times (X - N) \times \mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$$

est lisse dès que p est assez convexe en fonction de X et N.

La suite du présent paragraphe 2 est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

Théorème V.14. – *Soit $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone de troncature assez convexe en fonction de X et N. Alors :*

(i) *Pour tout autre tel polygone $q \geq p$ et tout degré $d \in \mathbb{Z}$, la correspondance dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{(X-N)\times(X-N)} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq q}}$ qui normalise le graphe de l'inclusion $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p} \hookrightarrow \mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq q}$ envoie $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq q}}'$ et inversement.*

(ii) *Pour tous entiers $s, u \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$, la correspondance normalisée $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ stabilise dans les deux sens l'ouvert $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$.* □

b) Dégénérateurs des chtoucas dégénérés

Afin de démontrer le théorème V.14, il nous faut étudier concrètement la façon dont les chtoucas dégénèrent, comme dans le paragraphe 2 de l'article [Lafforgue, 1998].

Considérons donc un chtouca $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{E})$ de rang r sur le corps des fractions K_A d'un anneau de valuation discrète A. On note π_A une uniformisante de A et $\kappa_A = A/\pi_A A$ son corps résiduel. L'anneau local A_X du point générique de la courbe $X \otimes \kappa_A$ dans la surface $X \otimes A$ est aussi un anneau de valuation discrète qui admet π_A pour uniformisante ; son corps des fractions K_{A_X} est le corps des fonctions de $X \otimes A$ et son corps résiduel κ_{A_X} est le corps des fonctions de $X \otimes \kappa_A$.

La fibre générique V de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un φ-espace de dimension r sur K_{A_X} au sens de Drinfeld (voir le paragraphe 2a de [loc. cit.]).

Soit M un φ-réseau itéré dans V (au sens de [loc. cit.], paragraphe 2a, définition 1). Il lui est associé en particulier une partition $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$ de l'entier r.

Le réseau M de V permet de prolonger $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ en

$$\mathcal{E}(M) \hookrightarrow \mathcal{E}'(M) \hookleftarrow \mathcal{E}''(M)$$

où $\mathcal{E}(M)$, $\mathcal{E}'(M)$, $\mathcal{E}''(M)$ sont trois fibrés localement libres de rang r sur $X \otimes A$ et $\mathcal{E}(M) \hookrightarrow \mathcal{E}'(M)$, $\mathcal{E}''(M) \hookrightarrow \mathcal{E}'(M)$ sont deux plongements dont les conoyaux sont supportés par les graphes de deux morphismes $\infty, 0$: Spec $A \to X$ et sont libres de rang 1 sur A. On note $\mathcal{E}^M \hookrightarrow \mathcal{E}'^M \hookleftarrow \mathcal{E}''^M$ la restriction à $X \otimes \kappa_A$ de ce diagramme.

Tout élément $s \in \underline{r}^+ = \{r_1, r_1+r_2, \ldots, r\}$ a un prédécesseur $s^- \in \underline{r}^- = \{0, r_1, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$ et tout élément $s \in \underline{r}^-$ a un successeur $s^+ \in \underline{r}^+$. L'espace $V^M = M/\pi_A M$ de dimension r sur κ_{A_X} est muni de

- une filtration croissante $(V_s^M)_{s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+}$ de V^M par des sous-espaces V_s^M de dimension s,
- une filtration décroissante $(\overline{V}_s^M)_{s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+}$ de ${}^\tau V^M$ qui vérifie ${}^\tau V_s^M = \overline{V}_s^M \oplus {}^\tau V_s^M$, $\forall\, s$,
- des isomorphismes

$$\overline{V}_{s^-}^M / \overline{V}_s^M \xrightarrow{\sim} V_s^M / V_{s^-}^M \,, \quad s \in \underline{r}^+ \,.$$

Comme V^M s'identifie à la fibre générique de $\mathcal{E}^M$, $\mathcal{E}'^M$ et $\mathcal{E}''^M$, on a des filtrations induites par des sous-fibrés maximaux

- $(\mathcal{E}_s^M)$ de $\mathcal{E}^M$, $(\mathcal{E}_s'^M)$ de $\mathcal{E}'^M$, $(\mathcal{E}_s''^M)$ de $\mathcal{E}''^M$,
- $(\overline{\mathcal{E}}_s^M)$ de ${}^\tau\mathcal{E}^M$ avec

$$\forall\, s \,, \qquad {}^\tau\mathcal{E}^M = \overline{\mathcal{E}}_s^M \oplus {}^\tau\mathcal{E}_s^M \text{ génériquement},$$

- plus des isomorphismes bien définis génériquement

$$\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M / \overline{\mathcal{E}}_s^M \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_s''^M / \mathcal{E}_{s^-}''^M \,.$$

On rappelle enfin qu'un sous-espace W de V^M est dit bon s'il existe $s \in \underline{r}^+$ tel que $V^M_{s^-} \subsetneq W \subseteq V^M_s$ et que l'isomorphisme $\overline{V}^M_{s^-}/\overline{V}^M_s \xrightarrow{\sim} V^M_s/V^M_{s^-}$ se restreigne en $\overline{V}^M_{s^-} \cap {}^\tau W \xrightarrow{\sim} W/V^M_{s^-}$. Il induit des sous-fibrés maximaux $\mathcal{E}^M_w$, $\mathcal{E}'^M_w$, $\mathcal{E}''^M_w$ de rang $w = \dim W$ dans $\mathcal{E}^M$, $\mathcal{E}'^M$, $\mathcal{E}''^M$.

Le diagramme $\mathcal{E}^M \hookrightarrow \mathcal{E}'^M \hookleftarrow \mathcal{E}''^M$ muni des structures induites par $\widetilde{\mathcal{E}}$ via le φ-réseau itéré M est appelé un chtouca dégénéré ; ce n'est pas nécessairement un chtouca itéré. Mais même si l'on ne s'intéresse qu'aux chtoucas itérés, pour aller de l'un à l'autre par une suite de transformations élémentaires du φ-réseau itéré M, on n'évite pas en général de passer par des chtoucas dégénérés qui ne sont pas des chtoucas itérés. Afin de suivre les dégénérateurs le long de telles transformations, on doit donc généraliser leur définition aux chtoucas dégénérés :

Lemme V.15. – *Considérons le chtouca dégénéré $\widetilde{\mathcal{E}}^M = (\mathcal{E}^M \hookrightarrow \mathcal{E}'^M \hookleftarrow \mathcal{E}''^M, \dots)$ induit par un φ-réseau itéré M de V comme plus haut. Alors :*

(i) *Pour tout $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$, l'isomorphisme bien défini génériquement*

$$\det\left({}^\tau \mathcal{E}^M_s\right) \xrightarrow{\sim} \det\left(\mathcal{E}^M_s\right)$$

s'étend en un isomorphisme partout bien défini

$$\det\left({}^\tau \mathcal{E}^M_s\right) \xrightarrow{\sim} \det\left(\mathcal{E}^M_s\right)\left(\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) - x\left(\mathcal{E}^M_s\right)\right)$$

où $\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) \in X(\kappa_A)$ est le pôle de $\widetilde{\mathcal{E}}^M$ et $x(\mathcal{E}^M_s) \in X(\kappa_A)$ est un point uniquement déterminé, appelé le dégénérateur en rang s.
Cette définition généralise celle pour les chtoucas itérés.

(ii) *Plus généralement, si W est un bon sous-espace de V^M avec $V^M_{s^-} \subsetneq W \subseteq V^M_s$ et $\mathcal{E}^M_w$ est le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}^M$ associé, on a un isomorphisme canonique*

$$\det\left({}^\tau \mathcal{E}^M_w\right) \xrightarrow{\sim} \det\left(\mathcal{E}^M_w\right)\left(\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) - x\left(\mathcal{E}^M_w\right)\right)$$

avec suivant les cas

$$x\left(\mathcal{E}^M_w\right) = x\left(\mathcal{E}^M_s\right) \quad ou \quad x\left(\mathcal{E}^M_w\right) = x\left(\mathcal{E}^M_{s^-}\right).$$

Démonstration : (i) La flèche $\det({}^\tau \mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}^M_s) \hookrightarrow \det(\mathcal{E}''^M_s)$ est partout bien définie car il en est ainsi de $\Lambda^s({}^\tau \mathcal{E}(M)) \to \Lambda^s \mathcal{E}''(M)$ et donc de sa restriction $\Lambda^s({}^\tau \mathcal{E}^M) \to \Lambda^s \mathcal{E}''^M$ qui se factorise à travers le quotient $\det({}^\tau \mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}^M_s)$ de $\Lambda^s({}^\tau \mathcal{E}^M)$ et le sous-fibré maximal $\det(\mathcal{E}''^M_s)$ de $\Lambda^s \mathcal{E}''^M$. Ainsi a-t-on une suite de plongements partout bien définis

$$\det\left({}^\tau \mathcal{E}^M_s\right) \hookrightarrow \det\left({}^\tau \mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}^M_s\right) \hookrightarrow \det\left(\mathcal{E}''^M_s\right) \hookrightarrow \det\left(\mathcal{E}'^M_s\right) \hookleftarrow \det\left(\mathcal{E}^M_s\right).$$

De plus, le conoyau du plongement $\det(\mathcal{E}_s^M) \hookrightarrow \det(\mathcal{E}_s'^M)$ est de dimension ≤ 1 et supporté par $\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M)$ puisque $\mathcal{E}'^M/\mathcal{E}^M$ est de dimension 1 et supporté par $\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M)$. D'où l'assertion concernant $\mathcal{E}_s^M$.

Si $\widetilde{\mathcal{E}}^M$ est un chtouca itéré, notons $\infty = x_0$ son pôle, $0 = x_r$ son zéro et x_s, $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$, ses dégénérateurs. Ceux-ci sont définis en disant que pour tout $s \in \underline{r}^+$, $\mathcal{E}_s^M/\mathcal{E}_{s^-}^M$ est muni d'une structure de chtouca (à droite si $s = 0^+ = r_1$, à gauche sinon) de pôle x_{s^-} et de zéro x_s. Les déterminants sont des chtoucas de rang 1 munis d'isomorphismes

$$ {}^\tau \det\left(\mathcal{E}_s^M/\mathcal{E}_{s^-}^M\right) \xrightarrow{\sim} \det\left(\mathcal{E}_s^M/\mathcal{E}_{s^-}^M\right)(x_{s^-} - x_s) $$

dont les produits tensoriels s'écrivent

$$ \det\left({}^\tau \mathcal{E}_s^M\right) \xrightarrow{\sim} \det\left(\mathcal{E}_s^M\right)(\infty - x_s) \, . $$

(ii) Si W est un bon sous-espace de V^M de rang w avec $V_{s^-}^M \subsetneq W \subseteq V_s^M$ et $\mathcal{E}_w^M$, $\mathcal{E}_w'^M$, $\mathcal{E}_w''^M$ sont les sous-fibrés maximaux de $\mathcal{E}^M$, $\mathcal{E}'^M$, $\mathcal{E}''^M$ dont la fibre générique est W, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^w({}^\tau \mathcal{E}^M) \arrow[rr, "(1)"] \arrow[d, "(2)"] & & \Lambda^w \mathcal{E}''^M \\
\det\left({}^\tau \mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\right) \otimes \Lambda^{w-s^-} \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M \arrow[rr, "(4)"] & & \det \mathcal{E}_{s^-}''^M \otimes \Lambda^{w-s^-}\left(\mathcal{E}_s''^M/\mathcal{E}_{s^-}''^M\right) \arrow[u, hook, "(3)"'] \\
\begin{array}{c} \det\left({}^\tau \mathcal{E}_w^M/{}^\tau \mathcal{E}_w^M \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\right) \\ \otimes \det\left({}^\tau \mathcal{E}_w^M \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\right) \end{array} \arrow[u, hook, "(5)"'] \arrow[d, equal] & & \det \mathcal{E}_{s^-}''^M \otimes \det\left(\mathcal{E}_w''^M/\mathcal{E}_{s^-}''^M\right) \arrow[u, hook, "(6)"'] \arrow[d, equal] \\
\det\left({}^\tau \mathcal{E}_w^M\right) \arrow[rr, "(7)"] & & \det \mathcal{E}_w''^M
\end{tikzcd}
$$

On sait déjà que (4) et (7) sont bien définies génériquement et que les autres flèches sont bien définies partout. Comme (2) est une flèche de quotient par un sous-fibré maximal et (3) est le plongement d'un sous-fibré maximal, la flèche (4) est bien définie partout. Puis, (5) étant le plongement d'un sous-fibré et (6) le plongement d'un sous-fibré maximal, (7) est bien définie partout.

Ainsi a-t-on une suite de plongements partout bien définis

$$ \det\left({}^\tau \mathcal{E}_w^M\right) \hookrightarrow \det\left(\mathcal{E}_w''^M\right) \hookrightarrow \det\left(\mathcal{E}_w'^M\right) \hookleftarrow \det\left(\mathcal{E}_w^M\right) $$

et il existe un unique point $x(\mathcal{E}_w^M) \in X(\kappa_A)$ tel que

$$ \det\left({}^\tau \mathcal{E}_w^M\right) \xrightarrow{\sim} \det\left(\mathcal{E}_w^M\right)\left(\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) - x\left(\mathcal{E}_w^M\right)\right) \, . $$

Il reste à voir que $x(\mathcal{E}_w^M) = x(\mathcal{E}_s^M)$ ou $x(\mathcal{E}_{s^-}^M)$ c'est-à-dire qu'en dehors des points $x(\mathcal{E}_s^M)$ et $x(\mathcal{E}_{s^-}^M)$ le plongement $\det({}^\tau\mathcal{E}_w^M) \hookrightarrow \det(\mathcal{E}_w'^M)$ est un isomorphisme. En dehors de ces deux points, les six flèches

$$ {}^\tau\mathcal{E}_{s^-}^M \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\,,\ \det\left({}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\right) \hookrightarrow \det\left(\mathcal{E}_{s^-}''^M\right),\ \mathcal{E}_{s^-}''^M \hookrightarrow \mathcal{E}_{s^-}'^M\,, $$

$$ {}^\tau\mathcal{E}_{s}^M \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s}^M\,,\ \det\left({}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s}^M\right) \hookrightarrow \det\left(\mathcal{E}_{s}''^M\right),\ \mathcal{E}_{s}''^M \hookrightarrow \mathcal{E}_{s}'^M $$

sont des isomorphismes. Il en est alors de même de $\mathcal{E}_w''^M \hookrightarrow \mathcal{E}_w'^M$ et de ${}^\tau\mathcal{E}_w^M/{}^\tau\mathcal{E}_w^M \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M$ puisque $\mathcal{E}_w^M \supsetneq \mathcal{E}_{s^-}^M$.

Comme dans cet ouvert $\det({}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M) \hookrightarrow \det(\mathcal{E}_{s^-}''^M)$ est un isomorphisme, le plongement $\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s}^M \hookrightarrow \mathcal{E}_s''^M/\mathcal{E}_{s^-}''^M$ est partout bien défini et c'est un isomorphisme puisque $\det({}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s}^M) \hookrightarrow \det(\mathcal{E}_s''^M)$ est aussi un isomorphisme. Donc le plongement entre sous-fibrés maximaux ${}^\tau\mathcal{E}_w^M \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M \hookrightarrow \mathcal{E}_w''^M/\mathcal{E}_{s^-}''^M$ est lui-même un isomorphisme.

Finalement, on a en dehors de $x(\mathcal{E}_s^M)$ et $x(\mathcal{E}_{s^-}^M)$

$$ \begin{aligned} \det\left({}^\tau\mathcal{E}_w^M\right) &= \det\left({}^\tau\mathcal{E}_w^M/{}^\tau\mathcal{E}_w^M \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\right) \otimes \det\left({}^\tau\mathcal{E}_w^M \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\right) \\ &\cong \det\left({}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\right) \otimes \det\left({}^\tau\mathcal{E}_w^M \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M\right) \\ &\cong \det\left(\mathcal{E}_{s^-}''^M\right) \otimes \det\left(\mathcal{E}_w''^M/\mathcal{E}_{s^-}''^M\right) = \det\left(\mathcal{E}_w''^M\right) \\ &\cong \det\left(\mathcal{E}_w'^M\right). \end{aligned} $$

C'est ce qu'on voulait. □

c) Effet des transformations de φ-réseaux itérés sur les dégénérateurs

Considérons toujours un φ-réseau itéré M dans V de partition associée $\underline{r}$ et W un bon sous-espace de V^M de dimension w.

D'après la proposition 6 du paragraphe 2a de [loc. cit.], $M' = \mathrm{Ker}[M \to M/\pi_A M = V^M \to V^M/W]$ est aussi un φ-réseau itéré dans V. La partition $\underline{r}'$ de r associée à M' est le raffinement de $\underline{r}$ défini par $\underline{r}'^+ = \underline{r}^+ \cup \{w\}$.

D'après le lemme 10 et la proposition 11(i) du paragraphe 2c de [loc. cit.], on a deux plongements

$$ \mathcal{E}_w^{M'} \hookrightarrow \mathcal{E}_w^M\,,\ \mathcal{E}^M/\mathcal{E}_w^M \longrightarrow \mathcal{E}^{M'}/\mathcal{E}_w^{M'} $$

dont les conoyaux sont de même dimension 0 ou 1 sur κ_A et deux suites exactes canoniques

$$ 0 \longrightarrow \overline{\mathcal{E}}_w^{M'} \longrightarrow {}^\tau\mathcal{E}^{M'} \longrightarrow {}^\tau\mathcal{E}_w^M \longrightarrow 0\,, $$

$$ 0 \longrightarrow {}^\tau\mathcal{E}_w^M \longrightarrow {}^\tau\mathcal{E}^M \longrightarrow \overline{\mathcal{E}}_w^{M'} \longrightarrow 0\,. $$

On voit en particulier que pour tout $s \in \underline{r}'^{+}$,

$$\deg \mathcal{E}_s^M - \deg \mathcal{E}_s^{M'}$$

est égal à 0 ou 1.

Lemme V.16. – *Soit M' le transformé de M par un bon sous-espace W de V^M comme ci-dessus. Alors pour tout $s \in \underline{r}'^{+}$, on a*

$$x\big(\mathcal{E}_s^{M'}\big) = x\big(\mathcal{E}_s^M\big) \quad si \quad \deg \mathcal{E}_s^M = \deg \mathcal{E}_s^{M'}$$

et

$$x\big(\mathcal{E}_s^{M'}\big) = \mathrm{Frob}\,\big(x\big(\mathcal{E}_s^M\big)\big) \quad si \quad \deg \mathcal{E}_s^M = \deg \mathcal{E}_s^{M'} + 1\,.$$

Remarque : Dans la démonstration du lemme 16(i) du paragraphe 2d de [loc. cit.] on a déjà invoqué la propriété plus faible que si $N \hookrightarrow X$ est un niveau qui évite les spécialisations du pôle et du zéro et si M' est le transformé de M par un bon sous-espace W de V^M, alors aucun des homomorphismes induits

$$u_s : {}^{\tau}\Lambda^s(\mathcal{E}(M) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N) \to \Lambda^s(\mathcal{E}(M) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N)\,,\ 1 \le s \le r\,,$$

n'est nilpotent, même après réduction modulo π_A (ce qui équivaut à dire que tous les dégénérateurs de M évitent N) si et seulement si c'est vrai pour M'. Cela résulte simplement de ce que, d'après le lemme 10 du paragraphe 2c de [loc. cit.], les transformations “à la Langton” des fibrés $\mathcal{E}(M)$ commutent avec le foncteur $\cdot \bigotimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N$ de restriction des fibrés de X à N.

Démonstration : Soit donc $s \in \underline{r}'^{+}$. Notons $\infty = \infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) = \infty(\widetilde{\mathcal{E}}^{M'})$, $0 = 0(\widetilde{\mathcal{E}}^M) = 0(\widetilde{\mathcal{E}}^{M'})$, $x = x(\mathcal{E}_s^M)$ et $x' = x(\mathcal{E}_s^{M'})$.

Par définition de x et x', on a

$$\det\big({}^{\tau}\mathcal{E}_s^M\big) \cong \det\big(\mathcal{E}_s^M\big)(\infty - x)\,,$$

$$\det\big({}^{\tau}\mathcal{E}_s^{M'}\big) \cong \det\big(\mathcal{E}_s^{M'}\big)(\infty - x')$$

et aussi $\det({}^{\tau}\mathcal{E}^M) \otimes \det(\mathcal{E}^M)^{-1} \cong \mathcal{O}(\infty - 0) \cong \det({}^{\tau}\mathcal{E}^{M'}) \otimes \det(\mathcal{E}^{M'})^{-1}$.

Si $\deg \mathcal{E}_s^M = \deg \mathcal{E}_s^{M'}$, on a $\mathcal{E}_s^{M'} \cong \mathcal{E}_s^M$ si $s \le w$ [resp. $\mathcal{E}^M/\mathcal{E}_s^M \cong \mathcal{E}^{M'}/\mathcal{E}_s^{M'}$ si $s \ge w$] et donc $x' = x$.

Si au contraire $\deg \mathcal{E}_s^M = \deg \mathcal{E}_s^{M'} + 1$, il existe un point $y \in X(\kappa_A)$ tel que $\det(\mathcal{E}_s^M) \cong \det(\mathcal{E}_s^{M'})(y)$ [resp. $\det(\mathcal{E}^{M'}/\mathcal{E}_s^{M'}) \cong \det(\mathcal{E}^M/\mathcal{E}_s^M)(y)$] et il s'agit de prouver que $y = x$ ou, ce qui revient au même, $\tau(y) = x'$.

Mais d'après la suite exacte

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{E}}_w^{M'} \longrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}^{M'} \longrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}_w^M \longrightarrow 0$$

[resp.

$$0 \longrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}_w^M \longrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}^M \longrightarrow \overline{\mathcal{E}}_w^{M'} \longrightarrow 0\,]\,,$$

on a un plongement

$$^{\tau}\mathcal{E}_s^M \hookrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}^{M'}/\overline{\mathcal{E}}_s^{M'}$$

puis

$$^{\tau}\mathcal{E}_s^M/{}^{\tau}\mathcal{E}_s^{M'} \hookrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}^{M'}/\big({}^{\tau}\mathcal{E}_s^{M'} \oplus \overline{\mathcal{E}}_s^{M'}\big)$$

[resp. un épimorphisme

$$^{\tau}\mathcal{E}^{M'}/\big({}^{\tau}\mathcal{E}_s^{M'} \oplus \overline{\mathcal{E}}_s^{M'}\big) \twoheadrightarrow {}^{\tau}\big(\mathcal{E}^{M'}/\mathcal{E}_s^{M'}\big)/{}^{\tau}\big(\mathcal{E}^M/\mathcal{E}_s^M\big)\ ]$$

et comme ${}^{\tau}\mathcal{E}^{M'}/({}^{\tau}\mathcal{E}_s^{M'} \oplus \overline{\mathcal{E}}_s^{M'})$ est supporté par x', on conclut $\tau(y) = x'$. □

Si M est un φ-réseau itéré dans la fibre générique V du chtouca $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \overset{\sim}{\leftarrow} {}^{\tau}\mathcal{E})$ sur K_A, on notera $\underline{x}(M)$ ou $\underline{x}(\widetilde{\mathcal{E}}^M)$ le sous-ensemble fini de $X(\kappa_A)$ constitué du pôle $\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M)$, du zéro $0(\widetilde{\mathcal{E}}^M)$ et des dégénérateurs $x(\mathcal{E}_s^M)$.

Nous allons déduire des lemmes V.15 et V.16 :

Proposition V.17. – *Soient M et M' deux φ-réseaux itérés dans la fibre générique V d'un chtouca $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \overset{\sim}{\leftarrow} {}^{\tau}\mathcal{E})$ sur K_A.*

Alors pour tout $x \in \underline{x}(M)$, il existe $x' \in \underline{x}(M')$ et deux entiers $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que

$$\mathrm{Frob}^n(x) = \mathrm{Frob}^{n'}(x')\ .$$

Démonstration : On sait d'après le lemme V.16 et le lemme V.15(ii) que cet énoncé est vrai quand M' est le transformé de M par un bon sous-espace W de $M/\pi_A M = V^M$ ou l'inverse (auquel cas on dit que M' est un transformé réciproque de M). Il est vrai aussi quand M et M' peuvent être reliés l'un à l'autre par une chaîne de telles transformations élémentaires directes ou réciproques.

Pour conclure, il suffit de montrer que deux φ-réseaux itérés arbitraires M et M' peuvent toujours être reliés par une telle chaîne.

Choisissons un polygone de troncature p (assez convexe en fonction de X) tel que le chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ soit dans l'ouvert $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}$ de Cht^r.

Et soit M un φ-réseau arbitraire dans V.

Quitte à remplacer A par une extension finie et M par un φ-réseau itéré qui lui est relié, on peut supposer que le type $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$ de M est maximal pour l'ordre lexicographique parmi les types des φ-réseaux itérés reliés à M. Cela signifie que pour toute extension finie A' de A et pour tout φ-réseau itéré M' de $V \otimes_{K_{A_X}} K_{A'_X}$ relié à $M \otimes_{A_X} A'_X$, le type

$\underline{r}' = (r = r'_1 + \cdots + r'_{k'})$ de M' vérifie

$$r'_1 \leq r_1$$

$$r'_1 + r'_2 \leq r_1 + r_2 \qquad \text{si} \quad r'_1 = r_1$$

$$r'_1 + r'_2 + r'_3 \leq r_1 + r_2 + r_3 \quad \text{si} \quad r'_1 = r_1,\ r'_2 = r_2\ ,$$

$$\text{etc.}$$

À partir d'un tel M, la démonstration du théorème 20(i) du paragraphe 2e de [loc. cit.] permet de construire un φ-réseau itéré N relié à M et qui définit un point de $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,\overline{p}\leq p}(A)$. En effet, le procédé de construction de N à partir de M utilise uniquement des transformations élémentaires dans un sens ou dans l'autre et l'hypothèse qui était faite dans [loc. cit.] que le type du φ-réseau itéré de départ soit maximal peut être remplacée sans rien changer dans la démonstration par celle que son type soit maximal parmi ceux des φ-réseaux itérés reliés à lui.

D'après le théorème 20(ii) de [loc. cit.] paragraphe 2e, deux φ-réseaux itérés qui définissent des points de $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,\overline{p}\leq p}(A)$ sont nécessairement égaux et cela montre que tous les φ-réseaux itérés sont reliés par des chaînes de transformations élémentaires. □

d) Effet des correspondances de Hecke sur les dégénérateurs

Si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un chtouca itéré de type $\underline{r}$ à valeurs dans un corps, on note $\underline{x}(\widetilde{\mathcal{E}})$ l'ensemble constitué du pôle $\infty(\widetilde{\mathcal{E}})$, du zéro $0(\widetilde{\mathcal{E}})$ et des dégénérateurs $x(\mathcal{E}_s)$, $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$.

Comme conséquence de la proposition V.17, on a :

Corollaire V.18. – *Soit $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ un couple de chtoucas itérés (pas nécessairement de même type) à valeurs dans un corps et qui vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :*

(1) *Il existe deux polygones de troncature $q \geq p$ (assez convexes en fonction de X) et un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ soit un point de* $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times \overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,\overline{p}\leq q}$ *adhérent au graphe de l'inclusion* $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \hookrightarrow \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq q}$.

(2) *Il existe un polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ (assez convexe en fonction de X), une fonction $f \in \mathcal{H}^r_\emptyset/a^{\mathbb{Z}}$ et deux entiers $s, u \in \mathbb{N}$ tels que $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ soit un point de* $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathrm{Cht}}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ *supporté par la correspondance* $f \times \mathrm{Frob}^s_\infty \times \mathrm{Frob}^u_0$.

Alors pour tout point x de $\underline{x}(\widetilde{\mathcal{E}})$ [resp. $\underline{x}(\widetilde{\mathcal{F}})$], il existe un point x' de $\underline{x}(\widetilde{\mathcal{F}})$ [resp. $\underline{x}(\widetilde{\mathcal{E}})$] et deux entiers $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que

$$\mathrm{Frob}^n(x) = \mathrm{Frob}^{n'}(x')\ .$$

Démonstration : Dans le cas (1) [resp. (2)], le couple $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ peut s'écrire comme la spécialisation d'un point $(\widetilde{E}_K, \widetilde{F}_K)$ de $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p} \times \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}$ défini sur le corps des fractions K d'un anneau de valuation discrète A et qui est supporté par le graphe de l'identité [resp. par la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ au-dessus de $(X - T_f) \times (X - T_f) \times_{X\times X} \Lambda$].

Dans le cas (1), on a donc $\widetilde{E}_K = \widetilde{F}_K$ et $\widetilde{\mathcal{E}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont les spécialisations associées à deux φ-réseaux itérés de la fibre générique de $\widetilde{E}_K = \widetilde{F}_K$. On conclut d'après la proposition V.17.

Dans le cas (2), les chtoucas $\widetilde{E}_K$ et $\widetilde{F}_K$ qui sont des diagrammes de fibrés sur $X \otimes K$ coïncident en dehors de T_f et d'un ensemble fini de transformés du pôle et du zéro par des puissances de Frob. En particulier, ils ont même fibre générique V et les spécialisations $\widetilde{\mathcal{E}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont induites par deux φ-réseaux itérés M et N dans V.

Notons $\widetilde{\mathcal{G}}$ le chtouca dégénéré obtenu par spécialisation de $\widetilde{F}_K$ le long de M (au lieu de N). Le chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'')$ et le chtouca dégénéré $\widetilde{\mathcal{G}} = (\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{G}' \hookleftarrow \mathcal{G}'')$ ont même type $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$, les diagrammes qui les définissent s'identifient sur un ouvert de la courbe, leurs pôles d'une part et leurs zéros d'autre part diffèrent d'une puissance de Frob et d'après la proposition V.17 on a seulement à montrer qu'il en est de même de leurs dégénérateurs $x_s = x(\mathcal{E}_s)$ et $x'_s = x(\mathcal{G}_s)$, $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$. Notant ∞ et ∞' les pôles, on a par définition des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} {}^\tau \det(\mathcal{E}_s) &\cong \det(\mathcal{E}_s)(\infty - x_s) \ , \\ {}^\tau \det(\mathcal{G}_s) &\cong \det(\mathcal{G}_s)(\infty' - x'_s) \ . \end{aligned}$$

Comme $\det(\mathcal{E}_s)$ et $\det(\mathcal{G}_s)$ s'identifient sur un ouvert, il existe un ensemble fini de points x_ι et de multiplicités $m_\iota \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\det(\mathcal{G}_s) \cong \det(\mathcal{E}_s)\Big(\sum_\iota m_\iota \cdot x_\iota\Big)$$

d'où on déduit l'égalité entre diviseurs

$$\sum_\iota m_\iota \cdot (x_\iota - \tau(x_\iota)) = (\infty - \infty') + (x'_s - x_s) \ .$$

Disons que deux points sont équivalents s'ils sont images l'un de l'autre par une puissance de Frob. Pour tout indice ι, x_ι et $\tau(x_\iota)$ sont équivalents, de même que ∞ et ∞'. Donc x'_s et x_s sont équivalents. $\square$

Nous pouvons donner maintenant :

Démonstration du théorème V.14 : On considère donc un niveau $N = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$.

Pour tous polygones de troncatures $q \geq p$, la correspondance dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq q}}$ qui prolonge l'identité de $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ est au-dessus de la correspondance dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq q}}$ qui prolonge l'identité de $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$.

De même, si $s, u \in \mathbb{N}$ sont deux entiers et $f \in \mathcal{H}_N^r$ une fonction dans l'algèbre de Hecke de niveau N, il existe une fonction $|f|_K \in \mathcal{H}_\emptyset^r$ (par exemple celle déduite de $|f|$ par convolution à droite et à gauche avec la fonction caractéristique de $K = \mathrm{GL}_r(O_\mathbb{A})$) telle que la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z} \times \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z}$ soit au-dessus de la correspondance $|f|_K \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z} \times \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z}$.

Comme l'ouvert $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'$ dans chaque $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$ est l'image réciproque de l'ouvert $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}'$ de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$ défini en demandant que pôle, zéro et dégénérateurs évitent N, on conclut d'après le corollaire V.18. $\square$

3) Stabilité des chtoucas au voisinage des points fixes

a) La propriété de stabilité locale

Dans le but d'appliquer les théorèmes IV.7 et IV.12 (formule des points fixes dans un ouvert instable) aux correspondances $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans les $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z}$ et les $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^\mathbb{Z}$ ou les $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z}$ s'ils existent et de retrouver une interprétation cohomologique pour les nombres de points fixés par ces correspondances dans les fibres des ouverts $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^\mathbb{Z}$ au-dessus de $(X - N) \times (X - N)$, on doit montrer qu'elles stabilisent ces ouverts “au voisinage de leurs points fixes” au sens de la définition IV.3. Sous une forme un peu différente ce résultat dont on a besoin avait déjà été démontré par Drinfeld dans le cas du rang $r = 2$ (voir la proposition 7.2 de l'article [Drinfeld, 1989]). De façon générale, on a :

Théorème V.19. – *Considérons un niveau $N \hookrightarrow X$, une fonction $f \in \mathcal{H}_N^r$ et deux entiers $s, u \in \mathbb{N}$.*

Alors, pour tout polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ assez convexe et tout ouvert $X' \subseteq X - T_f$ assez petit en fonction de N, du support de f et de $t = u - s$, la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z}$ (ou $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z}$ s'il existe) stabilise l'ouvert $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^\mathbb{Z}$ au voisinage de ses points fixes au-dessus d'un ouvert de $X' \times X'$ qui contient $\Lambda \times_{X\times X} X' \times X'$ et ne dépend que du support de f et de t.

Démonstration : Par construction, $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$ (ou $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$) est muni d'un morphisme d'oubli des structures de niveau sur $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$ tel que l'image réciproque de l'ouvert des chtoucas $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}$ soit $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}$. Cela fait qu'il suffit de démontrer le théorème pour les correspondances dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^\mathbb{Z}$.

Associons en effet à la fonction $f \in \mathcal{H}_N^r$ la fonction $|f|_K = \mathbb{1}_K \cdot |f| \cdot \mathbb{1}_K$ déduite de $|f|$ par convolution à droite et à gauche par la fonction caractéristique $\mathbb{1}_K$ de $K = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$. Le support $\Gamma_N \subset \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ de la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ est contenu dans l'image réciproque du support $\Gamma \subset \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ de la correspondance $|f|_K \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$. En particulier, les "points fixes" de $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$, c'est-à-dire les points d'intersection de Γ_N avec les images des morphismes $(\mathrm{Frob}^n, \mathrm{Id})$, $n \in \mathbb{N}$, dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ sont au-dessus des points fixes de $|f|_K \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$. Et si p'_{Γ_N}, p''_{Γ_N} et p'_Γ, p''_Γ sont les deux projections de Γ_N et Γ, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} & \xleftarrow{p'_{\Gamma_N}} & \Gamma_N & \xrightarrow{p''_{\Gamma_N}} & \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} & \xleftarrow{p'_{\Gamma}} & \Gamma & \xrightarrow{p''_{\Gamma}} & \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}
\end{array}$$

Si U est un ouvert dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ tel que $p''^{-1}_\Gamma(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}) \cap U \subseteq p'^{-1}_\Gamma(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}) \cap U$, son image réciproque U_N dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ vérifie $p''^{-1}_{\Gamma_N}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}) \cap U_N \subseteq p'^{-1}_{\Gamma_N}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}) \cap U_N$. C'est ce qu'on voulait.

On raisonne de même pour les $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$.

Afin de prouver le théorème pour les correspondances dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$, il suffit de vérifier le critère valuatif (SV) du lemme IV.4. C'est l'objet des sous-paragraphes qui suivent. □

b) Un point double à valeurs dans un trait

Soient donc une fonction $f \in \mathcal{H}_\emptyset^r$ et deux entiers $u, s \in \mathbb{N}$. On doit montrer que pour $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone de troncature assez convexe et quitte à éviter dans $(X - T_f) \times (X - T_f)$ un ensemble fini de points fermés de $X - T_f$ et de transformées de la diagonale par des puissances de $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ ou $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ (tout cela ne dépendant que du support de f et de $t = u - s$), la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ vérifie le critère valuatif (SV) du lemme IV.4 relativement à l'ouvert $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$.

Considérons un point α de l'une des composantes de la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ à valeurs dans un anneau de valuation discrète A de corps des fractions K et de corps résiduel κ. Le point α a deux projections $\widetilde{\mathcal{E}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}(A)$ et on suppose que, au-dessus de $\mathrm{Spec}\, K$, le point générique $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est dans $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}(K)$ tandis que le point générique $\widetilde{\mathcal{F}}_K$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est dans une strate de bord $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p}\le p}(K)$ indexée par une partition non triviale $\underline{r} = (r_1, \dots, r_k)$, $r_1 + \cdots + r_k = r$, $k \ge 2$, de l'entier r. Il s'agit de montrer que sous toutes nos hypothèses le point spécial $\alpha_\kappa = (\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa, \widetilde{\mathcal{F}}_\kappa)$ n'est supporté par l'image d'aucun des morphismes

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(\mathrm{Frob}^n,\mathrm{Id})} \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}, n \in \mathbb{N}.$$

Nous devons d'abord traduire le fait que le point $\alpha = (\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ est supporté par l'une des composantes Γ de $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$. Cela signifie exactement qu'il existe un point $\beta = (\widetilde{E}, \widetilde{F})$ de Γ à valeurs dans un anneau de valuation discrète B dont le corps résiduel est K et dont on note $\mathbb{K}$ le corps des fractions, tel que le point spécial $\beta_K = (\widetilde{E}_K, \widetilde{F}_K)$ de β se confonde avec le point générique $\alpha_K = (\widetilde{\mathcal{E}}_K, \widetilde{\mathcal{F}}_K)$ de α et que son point générique $\beta_{\mathbb{K}} = (\widetilde{E}_{\mathbb{K}}, \widetilde{F}_{\mathbb{K}})$ s'envoie sur le point générique de Γ. Ainsi, $\widetilde{E}$ est un point de $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}(B)$ et $\widetilde{E}_{\mathbb{K}}$ et $\widetilde{F}_{\mathbb{K}}$ sont des points de $(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p} \times_{X\times X} \Lambda_f)(\mathbb{K})$. Comme $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ est bien définie en tant que correspondance dans $\mathrm{Cht}^r \times_{X\times X} \Lambda_f$, il existe un (unique) point $\widetilde{G}$ dans $\mathrm{Cht}^r(B)$ dont la générisation $\widetilde{G}_{\mathbb{K}}$ soit égale à $\widetilde{F}_{\mathbb{K}}$; mais puisque $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}}$ est séparé, la spécialisation $\widetilde{G}_K$ de $\widetilde{G}$ est nécessairement en dehors de l'ouvert $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}$ de Cht^r.

c) Filtration des points génériques

A partir de maintenant, nous allons constamment recourir aux résultats, au vocabulaire et aux notations de l'article [Lafforgue, 1998].

On note V la fibre générique du chtouca $\widetilde{F}_{\mathbb{K}} = \widetilde{G}_{\mathbb{K}}$ qui est aussi celle du chtouca $\widetilde{E}_{\mathbb{K}}$ puisque la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans $\mathrm{Cht}^r \times_{X\times X} \Lambda_f$ préserve les fibres génériques. Ce V est un φ-espace au sens du paragraphe 2a de [loc. cit.]. Les chtoucas $\widetilde{G}$ et $\widetilde{E}$ sur B sont définis par l'unique φ-réseau M de V et le chtouca itéré $\widetilde{F}$ est défini par un φ-réseau itéré M' de type $\underline{r}$ dans V. Et d'après [loc. cit.] on sait associer à M' une filtration du complété $\widehat{V}$ de V par des sous-espaces $\widehat{V}_v$ de dimensions $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$.

Bien sûr, la filtration $(\widehat{V}_v)$ de $\widehat{V}$ induit la filtration croissante canonique $(0 = \mathcal{F}_K^0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_K^v \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_K^r = \mathcal{F}_K)$ du chtouca itéré $\widetilde{F}_K = \widetilde{\mathcal{F}}_K = (\mathcal{F}_K \hookrightarrow \mathcal{F}_K' \hookleftarrow \mathcal{F}_K'' \Longleftarrow {}^\tau\mathcal{F}_K)$ de type $\underline{r}$ mais elle induit aussi des filtrations croissantes par des sous-objets maximaux $(\widetilde{E}_K^v = \widetilde{\mathcal{E}}_K^v)$ et $(\widetilde{G}_K^v)$ des chtoucas $\widetilde{E}_K = \widetilde{\mathcal{E}}_K$ et $\widetilde{G}_K$.

Lemme V.20. – *Dans la situation ci-dessus, on a pour tout rang* $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$ *:*

(i) *La différence* $\deg \widetilde{G}_K^v - \deg \widetilde{E}_K^v$ *est bornée par une constante qui ne dépend que de* $t = u - s$ *et du support de* f*, tout comme* $\deg \widetilde{G}_K - \deg \widetilde{E}_K$.

(ii) $\deg \widetilde{E}_K^v - \frac{v}{r} \deg \widetilde{E}_K \leq \deg \mathcal{F}_K^v - \frac{v}{r} \deg \mathcal{F}_K$.

(iii) $\deg \widetilde{G}_K^v > \deg \mathcal{F}_K^v$ *tandis que* $\deg \widetilde{G}_K = \deg \mathcal{F}_K$.

(iv) *Le zéro de* $\mathcal{F}_K^v$ *c'est-à-dire le dégénérateur en rang* v *du chtouca itéré* $\widetilde{F}_K = \widetilde{\mathcal{F}}_K$ *est*

$$x\big(\mathcal{F}_K^v\big) = \mathrm{Frob}^{\deg \widetilde{G}_K^v - \deg \mathcal{F}_K^v}(\infty(\widetilde{\mathcal{F}}_K))$$

si $\widetilde{G}_K^v$ *est un sous-objet trivial de* $\widetilde{G}_K$*, et*

$$x\big(\mathcal{F}_K^v\big) = \mathrm{Frob}^{\deg \widetilde{G}_K^v - \deg \mathcal{F}_K^v}(0(\widetilde{\mathcal{F}}_K))$$

si au contraire $\widetilde{G}_K / \widetilde{G}_K^v$ *est un quotient trivial de* $\widetilde{G}_K$.

Démonstration : (i) résulte de ce que le point double $(\widetilde{E}, \widetilde{G})$ est supporté par la correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ dans $\mathrm{Cht}^r \times_{X \times X} \Lambda_f$.

(ii) résulte simplement de ce que $\widetilde{E}_K$ est un point de l'ouvert tronqué $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}$ tandis que $\widetilde{F}_K = \widetilde{\mathcal{F}}_K$ est un point de la strate de bord $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p} \leq p}$ indexée par la partition $\underline{r}$ et qui est définie par les conditions de la proposition 9 de [loc. cit., paragraphe 1d].

(iii) Comme le chtouca $\widetilde{G}_K$ et le chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{F}}_K$ sont deux spécialisations du même chtouca générique $\widetilde{G}_{\mathbb{K}} = \widetilde{F}_{\mathbb{K}}$, on a $\deg \widetilde{G}_K = \deg \widetilde{G}_{\mathbb{K}} = \deg \widetilde{F}_{\mathbb{K}} = \deg \widetilde{\mathcal{F}}_K$.

Au-dessus de l'anneau de valuation discrète B, le chtouca itéré $\widetilde{F}$ est construit à partir du chtouca $\widetilde{G}$ en transformant le φ-réseau M de V en le φ-réseau itéré M' suivant les procédés de [loc. cit., paragraphe 2] qui sont mis en œuvre particulièrement à la fin de la démonstration du théorème 20(i), page 1034. Du fait que le point de départ $M = M^0$ est non pas seulement un φ-réseau itéré mais un véritable φ-réseau de V, cette démonstration est ici notablement simplifiée. Elle consiste à construire une suite finie $(M^n)_{0 \leq n \leq m}$ de φ-réseau itérés de V allant de $M^0 = M$ à $M^m = M'$ et qui vérifie :

- si $(\widehat{W}_w^n)_{w \in \underline{w}^n}$ désigne la filtration de $\widehat{V}$ associée à chaque M^n, la suite des rangs minimaux $w^n = \min(\underline{w}^n)$ des $\widehat{W}_w^n$, $w \in \underline{w}^n$, est strictement décroissante,
- pour chaque n, $0 \leq n < m$, $\widehat{W}_{w^{n+1}}^{n+1}$ est contenu dans tous les $\widehat{W}_w^n$, $w \in \underline{w}^n$, et M^{m+1} se déduit de M^n comme transformé strict (au sens de la proposition 12 de [loc. cit., paragraphe 2c]) une ou plusieurs fois par la filtration réunion de $\widehat{W}_{\underline{w}^{n+1}}^{n+1}$ et des $\widehat{W}_w^n$, $w \in \underline{w}^n$,
- le chtouca dégénéré induit par chaque M^n est un chtouca itéré dont on peut noter $\widetilde{\mathcal{F}}^{M^n} = (\mathcal{F}^{M^n} \hookrightarrow \mathcal{F}'^{M^n} \hookleftarrow \mathcal{F}''^{M^n} \Longleftarrow {}^\tau\mathcal{F}^{M^n})$ la spécialisation.

Ainsi, on a $\widetilde{\mathcal{F}}^{M^0} = \widetilde{G}_K$, $\widetilde{\mathcal{F}}^{M^m} = \widetilde{\mathcal{F}}_K$ et la filtration finale $(\widehat{W}^m_w)_{w \in \underline{w}^m}$ de $\widehat{V}$ n'est autre que $(\widehat{V}_v)$.

Pour tout $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$, le sous-espace $\widehat{V}_v$ de $\widehat{V}$ induit un sous-fibré maximal $\mathcal{F}_v^{M^n}$ dans chaque $\mathcal{F}^{M^n}$. D'après la proposition 12 de [loc. cit], la suite des $\deg(\mathcal{F}_v^{M^n})$, $0 \leq n \leq m$, est décroissante et elle n'est pas constante. Cela prouve

$$\deg \widetilde{G}_K^v = \deg \mathcal{F}_v^{M^0} > \deg \mathcal{F}_v^{M^m} = \deg \mathcal{F}_K^v \, .$$

(iv) Nous allons suivre encore le chemin de $M^0 = M$ à $M^m = M'$ à travers les M^n que nous venons de rappeler dans la démonstration de (iii) ci-dessus. Pour tout $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$, notons $\infty(\mathcal{F}_v^{M^0}) = \infty(\widetilde{G}_K) = \infty(\widetilde{\mathcal{F}}_K)$ et

$$x\big(\mathcal{F}_v^{M^0}\big) = \begin{cases} \infty(\widetilde{G}_K) = \infty(\widetilde{\mathcal{F}}_K) \text{ si } \widetilde{G}_K^v \text{ est un sous-objet trivial de } \widetilde{G}_K \, , \\ 0(\widetilde{G}_K) = 0(\widetilde{\mathcal{F}}_K) \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tous les cas, le déterminant $\det(\mathcal{F}_v^{M^0})$ du fibré $\mathcal{F}_v^{M^0}$ est muni d'un isomorphisme canonique

$$^{\tau} \det\big(\mathcal{F}_v^{M^0}\big) \cong \det\big(\mathcal{F}_v^{M^0}\big)\big(\infty\big(\mathcal{F}_v^{M^0}\big) - x\big(\mathcal{F}_v^{M^0}\big)\big).$$

Pour tout n, $0 \leq n \leq m$, $\det(\mathcal{F}_v^{M^n})$ a même fibre générique que $\det(\mathcal{F}_v^{M^0})$. Procédant par récurrence sur n, on déduit alors du lemme V.16 que l'isomorphisme ci-dessus devient

$$^{\tau} \det\big(\mathcal{F}_v^{M^n}\big) \cong \det\big(\mathcal{F}_v^{M^n}\big)\Big(\infty\big(\mathcal{F}_v^{M^0}\big) - \mathrm{Frob}^{\deg\left(\mathcal{F}_v^{M^0}\right) - \deg\left(\mathcal{F}_v^{M^n}\right)}\big(x\big(\mathcal{F}_v^{M^0}\big)\big)\Big).$$

C'est ce qu'on voulait. □

d) Filtration des points spéciaux

Nous voulons maintenant étudier le point $\alpha = (\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{\mathcal{F}})$ à valeurs dans l'anneau de valuation discrète A.

Le point générique $\widetilde{\mathcal{F}}_K$ est un chtouca itéré de type $\underline{r}$ donc sa spécialisation $\widetilde{\mathcal{F}}_\kappa$ est un chtouca itéré de type $\underline{r}'$ raffinant $\underline{r}$.

L'autre point générique $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ est dans l'ouvert tronqué $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}$ de Cht^r. Il est muni d'une filtration $(\widetilde{\mathcal{E}}_K^v)$ par des sous-objets maximaux $\widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ de rangs $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$. D'après le lemme V.20(i)(ii)(iii), les différences entre les valeurs prises en les entiers v par le polygone de cette filtration et le polygone de troncature p sont bornées par une constante qui ne dépend que de t et du support de f. Si p est assez convexe en fonction de t et du support de f, cela implique en particulier que les $\widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ figurent dans la filtration canonique de Harder-Narasimhan de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$.

Si le chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa$, spécialisation de $\widetilde{\mathcal{E}}$, n'a pas le même type $\underline{r}'$ que $\widetilde{\mathcal{F}}_\kappa$, le point spécial $\alpha_\kappa = (\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa, \widetilde{\mathcal{F}}_\kappa)$ n'est évidemment supporté par l'image d'aucun des morphismes $(\mathrm{Frob}^n, \mathrm{Id})$, $n \in \mathbb{N}$.

Supposons donc que $\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa = (\mathcal{E}_\kappa \hookrightarrow \mathcal{E}'_\kappa \hookleftarrow \mathcal{E}''_\kappa \Longleftarrow {}^\tau\mathcal{E}_\kappa)$ a le même type $\underline{r}'$ raffinant $\underline{r}$ que $\widetilde{\mathcal{F}}_\kappa$. Dans la filtration croissante canonique de $\mathcal{E}_\kappa$, il y a alors des sous-fibrés maximaux $\mathcal{E}_\kappa^v$ de rangs les $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$.

Lemme V.21. – *Dans la situation ci-dessus et si le polygone p est assez convexe en fonction de t et du support de f, on a pour tout $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$:*

(i) $\deg \mathcal{E}_\kappa^v \geq \deg \widetilde{\mathcal{E}}_K^v$, *avec* $\deg \mathcal{E}_\kappa = \deg \widetilde{\mathcal{E}}_K$.

(ii) $\deg \mathcal{E}_\kappa^v - \deg \widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ *est majoré par une constante qui ne dépend que de t et du support de f.*

(iii) *Notant $\overline{\infty}$ et $\overline{0}$ les pôle et zéro de $\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa$ et $\overline{x}_v$ son dégénérateur en rang v, on a*

$$\overline{\infty} = \mathrm{Frob}^{\deg \mathcal{E}_\kappa^v - \deg \widetilde{\mathcal{E}}_K^v}(\overline{x}_v)$$

si $\widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ est un sous-objet trivial de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$, et

$$\overline{0} = \mathrm{Frob}^{\deg \mathcal{E}_\kappa^v - \deg \widetilde{\mathcal{E}}_K^v}(\overline{x}_v)$$

si au contraire $\widetilde{\mathcal{E}}_K / \widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ est un quotient trivial de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$.

Démonstration : (i) résulte simplement de ce que $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ est un point de l'ouvert tronqué $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}$ tandis que sa spécialisation $\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa$, qui a automatiquement même degré, est un point de la strate de bord $\mathrm{Cht}_{\underline{r}'}^{r,\overline{p}\leq p}$ indexée par la partition $\underline{r}'$ raffinant $\underline{r}$.

(ii) En les entiers v, le polygone de la filtration $(\mathcal{E}_\kappa^v)$ est compris entre $p - 1$ et p tandis que, comme on a dit, la différence entre le polygone de la filtration $(\widetilde{\mathcal{E}}_K^v)$ et p est bornée par une constante qui ne dépend que de t et du support de f.

(iii) Soit W la fibre générique du chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}_K$; c'est un φ-espace. Le chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}}$ sur A qui prolonge $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ est défini par un φ-réseau itéré N de W de type $\underline{r}' = (r'_1, r'_2, \dots, r'_{k'})$. Il lui est associé une filtration du complété $\widehat{W}$ de W par des sous-espaces $\widehat{W}_w$ de rangs $w \in \{r'_1, r'_1 + r'_2, \dots, r'_1 + \cdots + r'_{k'-1}\}$. Et comme la partition $\underline{r}'$ de r raffine $\underline{r}$, la filtration $(\widehat{W}_w)$ comprend en particulier des sous-espaces $\widehat{W}_v$ de rangs les $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$.

Fixant un tel v, nous allons envisager un certain nombre de φ-réseaux itérés M de W dont la filtration de $\widehat{W}$ associée est contenue dans $(\widehat{W}_w)$ et comprend $\widehat{W}_v$. Comme dans [loc. cit., paragraphe 2], on notera $\widetilde{\mathcal{E}}(M)$ le chtouca dégénéré prolongement de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ sur A associé à un tel M, $\widetilde{\mathcal{E}}^M = (\mathcal{E}^M \hookrightarrow \mathcal{E}'^M \hookleftarrow \mathcal{E}''^M \Longleftarrow {}^\tau\mathcal{E}^M)$ sa spécialisation au-dessus de κ et $\mathcal{E}_v^M$ le sous-fibré maximal de rang v dans $\mathcal{E}^M$ induit par $\widehat{W}_v$. Ainsi a-t-on $\widetilde{\mathcal{E}}(N) = \widetilde{\mathcal{E}}$, $\widetilde{\mathcal{E}}^N = \widetilde{\mathcal{E}}_\kappa$, $\mathcal{E}^N = \mathcal{E}_\kappa$ et $\mathcal{E}_v^N = \mathcal{E}_\kappa^v$.

Notons $n_v = \deg \mathcal{E}_\kappa^v - \deg \widetilde{\mathcal{E}}_K^v \geq 0$. On sait que $\widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ figure dans la filtration canonique de Harder-Narasimhan de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$. D'après le corollaire 18 de [loc. cit., paragraphe 2d], il existe une suite $N = N^0, N^1, \ldots, N^{n_v}$ de φ-réseaux itérés de W dont chacun est le transformé strict du précédent par les $\widehat{W}_w$, $w \geq v$ (quitte à remplacer A par une extension finie), avec en particulier $\deg(\mathcal{E}_v^{N^n}) = \deg(\mathcal{E}_v^{N^{n-1}}) - 1$, $0 < n \leq n_v$. Comme $\overline{\infty}$ désigne le pôle de $\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa = \widetilde{\mathcal{E}}^N = \widetilde{\mathcal{E}}^{N^0}$ et $\overline{x}_v$ désigne son dégénérateur en rang v, le déterminant du fibré $\mathcal{E}_v^{N^0}$ est muni d'un isomorphisme canonique

$$^\tau \det\left(\mathcal{E}_v^{N^0}\right) \cong \det\left(\mathcal{E}_v^{N^0}\right)(\overline{\infty} - \overline{x}_v).$$

Pour tout n, $0 < n \leq n_v$, $\det(\mathcal{E}_v^{N^n})$ a même fibre générique que $\det(\mathcal{E}_v^{N^0})$. Procédant par récurrence sur n, on déduit du lemme V.16 que l'isomorphisme ci-dessus devient

$$^\tau \det\left(\mathcal{E}_v^{N^n}\right) \cong \det\left(\mathcal{E}_v^{N^n}\right)(\overline{\infty} - \mathrm{Frob}^n(\overline{x}_v)).$$

En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$^\tau \det\left(\mathcal{E}_v^{N^{n_v}}\right) \cong \det\left(\mathcal{E}_v^{N^{n_v}}\right)(\overline{\infty} - \mathrm{Frob}^{n_v}(\overline{x}_v)).$$

Montrons maintenant que N^{n_v} n'admet pas de transformé strict par $\widehat{W}_v$. En effet, s'il en admettait un noté N', on aurait d'une part

$$\deg \mathcal{E}_v^{N'} = \deg \mathcal{E}_v^{N^{n_v}} - 1 = \deg \widetilde{\mathcal{E}}_K^v - 1\ .$$

D'autre part, le polygone canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa$ et celui de $\widetilde{\mathcal{E}}^{N'}$ ne différeraient en tous les points que d'au plus $n_v + 1$. D'après (ii), on en déduirait que si p a été choisi assez convexe en fonction de t et du support de f, le sous-fibré de $\mathcal{E}^{N'}$ induit par le sous-objet $\widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ et qui a pour rang $v = \mathrm{rg}\ \mathcal{E}_v^{N'}$ et pour degré $\deg \widetilde{\mathcal{E}}_K^v = \deg \mathcal{E}_v^{N'} + 1$, serait contenu dans $\mathcal{E}_v^{N'}$. Il y aurait contradiction.

On peut donc construire à partir de N^{n_v} une suite infinie $(N^n)_{n \geq n_v}$ de transformés successifs de N^{n_v} par $\widehat{W}_v$ avec

$$\mathcal{E}_v^{N^n} = \mathcal{E}_v^{N^{n-1}}\ ,\ \forall n > n_v\ ,$$

comme dans la démonstration de la proposition 14 de [loc. cit., paragraphe 2d]. La limite projective

$$\varprojlim_{n \geq n_v} \widetilde{\mathcal{E}}(N^{n_v})/\widetilde{\mathcal{E}}(N^n)$$

est un quotient localement libre de l'image réciproque de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ sur le complété formel de $X \otimes A$ le long de $X \otimes \kappa$. Elle provient du quotient localement libre de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ par un sous-objet de rang v et de degré $\deg \mathcal{E}_v^{N^{n_v}} = \deg \widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ qui est nécessairement $\widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ puisque celui-ci figure dans la filtration canonique de Harder-Narasimhan de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$.

On en déduit un isomorphisme canonique

$$^\tau \det\left(\mathcal{E}_v^{N^{nv}}\right) \cong \det\left(\mathcal{E}_v^{N^{nv}}\right) \cong \det\left(\mathcal{E}_v^{N^{nv}}\right)(\overline{\infty} - \overline{\infty})$$

si $\widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ est un sous-objet trivial de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$, ou bien

$$^\tau \det\left(\mathcal{E}_v^{N^{nv}}\right) \cong \det\left(\mathcal{E}_v^{N^{nv}}\right)(\overline{\infty} - \overline{0})$$

si au contraire $\widetilde{\mathcal{E}}_K/\widetilde{\mathcal{E}}_K^v$ est un quotient trivial de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$.

D'où la conclusion. □

e) Fin de la démonstration

Nous pouvons maintenant achever la vérification du critère valuatif (SV) de stabilité au voisinage des points fixes et donc du théorème V.19.

Rappelons que nous avons noté $\overline{\infty}$, $\overline{0}$ et $\overline{x}_v$, $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$ les pôle, zéro et dégénérateurs en les rangs v de $\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa$. Dans le lemme V.21, nous avons prouvé que si le polygone de troncature p est assez convexe en fonction de t et du support de f, il existe des entiers $n_v \geq 0$, $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$, majorés par une constante qui ne dépend que de t et du support de f, tels que pour tout v

$$\mathrm{Frob}^{n_v}(\overline{x}_v) = \overline{\infty} \text{ ou } \overline{0} .$$

De même, notons $\overline{\infty}'$, $\overline{0}'$ et $\overline{x}'_v$, $v \in \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\}$, les pôle, zéro et dégénérateurs en les rangs v de $\widetilde{\mathcal{F}}_\kappa$. Par spécialisation du lemme V.20, on voit qu'il existe des entiers $n'_v > 0$, majorés par une constante qui ne dépend que de t et du support de f, tels que pour tout v

$$\overline{x}'_v = \mathrm{Frob}^{n'_v}(\overline{\infty}') \text{ ou } \mathrm{Frob}^{n'_v}(\overline{0}').$$

Or, si $n \in \mathbb{N}$ est un entier tel que le point double spécial $(\widetilde{\mathcal{E}}_\kappa, \widetilde{\mathcal{F}}_\kappa)$ est supporté par l'image de $(\mathrm{Frob}^n, \mathrm{Id})$, on a automatiquement

$$\begin{aligned} &\overline{\infty} = \mathrm{Frob}^n(\overline{\infty}') \ , \ \overline{0} = \mathrm{Frob}^n(\overline{0}') \ \text{ et} \\ &\overline{x}_v = \mathrm{Frob}^n(\overline{x}'_v) \ , \ \forall v \ . \end{aligned}$$

Pour tout v, l'entier $n_v + n'_v \geq 1$ qui est majoré par une constante qui ne dépend que de t et du support de f, doit donc vérifier l'une au moins des quatre équations

$$\begin{aligned} &\overline{\infty} = \mathrm{Frob}^{n_v+n'_v}(\overline{\infty}), \\ \text{ou } \ &\overline{0} = \mathrm{Frob}^{n_v+n'_v}(\overline{0}), \\ \text{ou } \ &\overline{\infty} = \mathrm{Frob}^{n_v+n'_v}(\overline{0}), \\ \text{ou } \ &\overline{0} = \mathrm{Frob}^{n_v+n'_v}(\overline{\infty}). \end{aligned}$$

Cela entraîne que ou bien $\overline{\infty}$ ou $\overline{0}$ est supporté par un ensemble fini de points fermés de $X - T_f$ qui ne dépend que de t et du support de f, ou bien $(\overline{\infty}, \overline{0})$ est supporté par une réunion finie de transformées de la diagonale de $X \times X$ par des puissances de $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ ou $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ qui ne dépend elle aussi que de t et du support de f.

L'ouvert de $(X - T_f) \times (X - T_f)$ qui est défini en enlevant ces deux familles finies de fermés répond à la question posée. □

Remarque : A la fin de la démonstration ci-dessus on doit écarter de $|X - T_f|$ l'ensemble fini des points ∞ ou 0 dont le degré divise une constante non nulle qui ne dépend que de t et du support de f. Cette condition était déjà apparue dans la formule de comptage du théorème 1 du paragraphe V.2a de [Lafforgue, 1997] via le lemme 11 du paragraphe V.2d de ce livre, et on l'avait reproduite dans l'énoncé des théorèmes I.5, I.7 et I.13 du présent travail.

Chapitre VI

Cohomologie des chtoucas et correspondance globale

Dans ce chapitre, nous réalisons la correspondance de Langlands globale pour les groupes GL_r sur le corps des fonctions d'une courbe X dans la cohomologie ℓ-adique au-dessus du point générique de $X \times X$ des champs de chtoucas de rang r, généralisant le théorème en rang $r = 2$ obtenu par Drinfeld. On met en œuvre pour cela les différents types de résultat rassemblés dans les chapitres précédents et dans les deux appendices.

On commence par rappeler les propriétés générales des fonctions L de systèmes locaux ℓ-adiques sur les variétés définies sur le corps fini de base $\mathbb{F}_q$. D'après Grothendieck, elles ont une interprétation cohomologique qui entraîne en particulier que ce sont des fractions rationnelles et on peut situer leurs zéros et pôles grâce au théorème de pureté de Deligne, ce qui est essentiel pour la suite. S'agissant d'un système local ℓ-adique sur un ouvert de la courbe X, on peut lui associer des facteurs L et ε locaux en tous les points fermés de X. Comme conséquence de la dualité de Grothendieck, la fonction L globale définie comme produit de tous les facteurs L locaux vérifie une équation fonctionnelle ; et d'après un théorème de Laumon essentiel ici, on sait que la constante dans cette équation fonctionnelle est le produit de tous les facteurs ε locaux.

On énonce alors la correspondance de Langlands globale pour le corps des fonctions de la courbe X. Toutes les informations que nous avons rassemblées à propos des fonctions L, tant de systèmes locaux ℓ-adiques que de paires automorphes, permettent de procéder à beaucoup de réductions et finalement on se ramène à démontrer l'énoncé suivant : Pour tout entier $r \geq 2$ et supposant la correspondance de Langlands déjà connue en rangs $< r$, on peut associer à toute représentation automorphe cuspidale π de GL_r un système local ℓ-adique σ_π sur un ouvert de X qui a les mêmes facteurs L locaux en toutes les places non ramifiées. On réalise ce σ_π dans la cohomologie ℓ-adique d'un champ de chtoucas $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus du point générique de $X \times X$.

Tout d'abord, on définit dans la cohomologie de $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$, $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ (ou éventuellement $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$) et $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ une partie négligeable (celle qui provient des rangs inférieurs) et une partie essentielle (le reste). La séparation des deux est rendue possible par l'hypothèse de récurrence et par la connaissance qu'on a des zéros et pôles des fonctions L. On montre que

$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$, $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ (ou éventuellement $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$) et $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ ont même cohomologie essentielle. Et bien sûr, c'est là qu'on doit s'attendre à trouver un morceau égal à σ_π.

Pour isoler un tel morceau et achever ainsi la démonstration, on scinde la cohomologie essentielle en faisant agir les correspondances de Hecke.

1) Enoncé de la correspondance de Langlands et réductions

a) Fonctions L *des systèmes locaux ℓ-adiques*

On fixe un nombre premier ℓ qui ne divise pas le cardinal q du corps fini de base $\mathbb{F}_q$.

Pour tout schéma V de type fini sur $\mathbb{F}_q$, on note $\mathcal{G}_\ell(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux ℓ-adiques lisses sur V. Si V est connexe et $\overline{x}$ est un point géométrique de V, $\mathcal{G}_\ell(V)$ s'identifie à l'ensemble des représentations du groupe fondamental de Grothendieck $\pi_1(V,\overline{x})$ qui sont continues et de dimension finie sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$ et qui sont définies sur une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Tout faisceau ℓ-adique lisse sur V est alors de rang constant égal à la dimension de la représentation associée de $\pi_1(V,\overline{x})$. Le groupe de Galois de $\mathbb{F}_q$ est engendré par Frob et il s'identifie au complété $\widehat{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$. Par conséquent, chaque $\pi_1(V,\overline{x})$ est muni d'un homomorphisme canonique continu et surjectif $\pi_1(V,\overline{x}) \to \widehat{\mathbb{Z}}$. Le groupe de Weil $W(V,\overline{x}) = \mathrm{Ker}[\pi_1(V,\overline{x}) \to \widehat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}]$ est un sous-groupe dense de $\pi_1(V,\overline{x})$ et toute représentation ℓ-adique de $\pi_1(V,\overline{x})$ est uniquement déterminée par sa restriction à $W(V,\overline{x})$.

On note $|V|$ l'ensemble des points fermés de V. Pour tout faisceau ℓ-adique lisse $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(V)$ de rang r et tout point fermé $x \in |V|$, la fibre σ_x de σ en x peut être vue comme un espace vectoriel de dimension r muni d'une action par automorphisme de l'élément de Frobenius $\mathrm{Frob}_x = \mathrm{Frob}^{\deg(x)}$; on note $z_1(\sigma_x), \ldots, z_r(\sigma_x)$ les valeurs propres de cet automorphisme.

On définit le facteur L local de σ en x comme

$$\mathrm{L}_x(\sigma_x, Z) = \frac{1}{\det_{\sigma_x}\left(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}_x^{-1}\cdot Z^{\deg(x)}\right)} = \prod_{1\leq i\leq r} \frac{1}{1 - z_i(\sigma_x)^{-1} Z^{\deg(x)}}$$

puis la fonction L globale de σ comme le produit

$$\mathrm{L}_V(\sigma, Z) = \prod_{x\in|V|} \mathrm{L}_x(\sigma_x, Z).$$

Elle est bien définie en tant que série formelle en l'indéterminée Z, de même que sa dérivée logarithmique

$$\frac{\mathrm{L}'_V(\sigma,Z)}{\mathrm{L}_V(\sigma,Z)} = \sum_{x\in|V|} \deg(x) \sum_{k\geq 1} (z_1(\sigma_x)^{-k} + \cdots + z_r(\sigma_x)^{-k}) Z^{k\deg(x)-1}.$$

Plus généralement, si σ est un faisceau ℓ-adique constructible sur V, sa fibre σ_x en tout point fermé $x \in |V|$ est un espace vectoriel de dimension finie muni d'une action par automorphisme de Frob_x et on peut poser

$$\mathrm{L}_x(\sigma, Z) = \frac{1}{\det_{\sigma_x}\left(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}_x^{-1} \cdot Z^{\deg(x)}\right)}$$

puis $\mathrm{L}_V(\sigma, Z) = \prod_{x \in |V|} \mathrm{L}_x(\sigma, Z)$.

On a le théorème fondamental suivant de Grothendieck :

Théorème VI.1. – *Etant donné $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(V)$ un faisceau ℓ-adique lisse (ou plus généralement σ un faisceau ℓ-adique constructible) sur un schéma V de type fini sur $\mathbb{F}_q$, soient $H_c^\nu(\sigma)$, $0 \leq \nu \leq 2 \dim V$, les groupes de cohomologie étale à supports compacts de σ au-dessus du point* $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$.

Alors la série formelle $\mathrm{L}_V(\sigma, Z)$ est égale à la fraction rationnelle en l'indéterminée Z

$$\prod_\nu \left[\det_{H_c^\nu(\sigma)}(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}^{-1} \cdot Z)\right]^{(-1)^{\nu+1}}. \qquad \square$$

A partir de maintenant, on fixe un isomorphisme entre la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$ et $\mathbb{C}$.

On dit que $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(V)$ est pur de poids $n \in \mathbb{Z}$ si pour tout $x \in |V|$ les valeurs propres de Frob_x^{-1} dans la fibre σ_x sont de module $q^{\frac{n}{2}\deg(x)}$.

On dit que σ est mixte de poids $\leq n \in \mathbb{Z}$ si elle admet une filtration dont tous les quotients successifs sont purs de poids $\leq n$.

On a l'autre théorème fondamental suivant dû à Deligne :

Théorème VI.2. – *Si σ est mixte de poids $\leq n$, chaque $H_c^\nu(\sigma)$, $\nu \in \mathbb{N}$, est mixte de poids $\leq n + \nu$.*

Si V est propre et lisse sur $\mathbb{F}_q$ et si σ est pur de poids n, chaque $H_c^\nu(\sigma)$, $\nu \in \mathbb{N}$, est pur de poids $n + \nu$.

Si $s \in \mathbb{C}$ est tel que $q^s \in \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ soit une unité ℓ-adique, il définit un faisceau ℓ-adique lisse $\mathbb{Q}_\ell(s)$ de rang 1 sur $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$ et donc, par image réciproque, sur tout schéma V de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(V)$, on note alors $\sigma(s)$ le produit tensoriel $\sigma \otimes \mathbb{Q}_\ell(s)$.

On remarque que si s est un nombre complexe arbitraire, $\sigma(s)$ a au moins un sens en tant que faisceau ℓ-adique lisse sur $V \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ muni d'une action de Frob ou, si l'on préfère, en tant que représentation du groupe de Weil $W(V, \overline{x})$ en n'importe quel point géométrique $\overline{x}$ de V.

Des théorèmes VI.1 et VI.2, on déduit le résultat suivant qui permet d'extraire les sous-faisceaux irréductibles d'un faisceau ℓ-adique lisse :

Corollaire VI.3. – *Soit V un schéma de type fini et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$.*

Soient $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(V)$ un faisceau ℓ-adique mixte de poids $\leq n$ et $\sigma' \in \mathcal{G}_\ell(V)$ un faisceau ℓ-adique irréductible et pur de poids m.

Alors dans la zone

$$|Z| < q^{\frac{m-n}{2} - \dim V + \frac{1}{2}}$$

la fraction rationnelle $\mathrm{L}_V(\sigma \otimes \check{\sigma}', Z)$ *n'a pas de zéro. Elle y a des pôles exactement en les points de la forme* $q^{-\dim V - s}$ *tels que* $\mathrm{Re}\, s = \frac{n-m}{2}$ *et que* $\sigma'(-s)$ *soit un sous-faisceau de* σ*, et l'ordre d'un tel pôle est égal à la multiplicité de* $\sigma'(-s)$ *dans* σ*.*

Démonstration : Compte tenu des théorèmes VI.1 et VI.2, cela résulte de ce que chaque espace $H_c^{2\dim V}(\sigma \otimes \check{\sigma}' \otimes \mathbb{Q}_\ell(\dim V + s))$ est dual de $\mathrm{Hom}(\sigma'(-s), \sigma)$. □

b) Facteurs L *locaux en les places ramifiées et équation fonctionnelle*

A partir de maintenant, on considère à nouveau la courbe projective, lisse et géométriquement connexe X sur le corps de base $\mathbb{F}_q$. On rappelle que F désigne son corps des fonctions, F_x le complété de F en n'importe quel point fermé $x \in |X|$ et O_x le sous-anneau des entiers de F_x.

Considérons σ_x un faisceau ℓ-adique lisse sur $\mathrm{Spec}\, F_x$ (qu'on peut voir aussi comme une représentation ℓ-adique du groupe de Galois de F_x). Son image directe par l'immersion ouverte $\mathrm{Spec}\, F_x \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, O_x$ est un faisceau ℓ-adique constructible dont on note $\overline{\sigma}_x$ la fibre au point fermé x ; celle-ci peut être vue comme un espace vectoriel muni d'une action par automorphisme de l'élément de Frobenius $\mathrm{Frob}_x = \mathrm{Frob}^{\deg(x)}$.

Le facteur L de la représentation locale σ_x est défini comme la fraction rationnelle

$$\mathrm{L}_x(\sigma_x, Z) = \frac{1}{\det_{\overline{\sigma}_x}\left(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}_x^{-1} \cdot Z^{\deg(x)}\right)} \,.$$

De cette définition, on déduit facilement :

Lemme VI.4. – *Soient* σ_x *un faisceau* ℓ*-adique lisse sur* $\mathrm{Spec}\, F_x$ *et* χ_x *un faisceau* ℓ*-adique inversible sur* $\mathrm{Spec}\, F_x$ (*c'est-à-dire un caractère du groupe de Galois de* F_x)*. Alors :*

(i) *Si* σ_x *et* χ_x *sont non ramifiés* (*c'est-à-dire s'étendent en des faisceaux* ℓ*-adiques lisses sur* $\mathrm{Spec}\, O_x$)*, on a*

$$\mathrm{L}_x(\chi_x \otimes \sigma_x, Z) = \frac{1}{\det_{\chi_x \otimes \sigma_x}\left(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}_x^{-1} \cdot Z^{\deg(x)}\right)} \,.$$

(ii) *Si* σ_x *est non ramifié mais* χ_x *est ramifié, on a*

$$\mathrm{L}_x(\chi_x \otimes \sigma_x, Z) = 1 \,.$$

(iii) *Si* χ_x *est suffisamment ramifié en fonction de* σ_x*, on a*

$$\mathrm{L}_x(\chi_x \otimes \sigma_x, Z) = 1 \,.$$

□

On note $\mathcal{G}_\ell(F)$ l'ensemble des faisceaux ℓ-adiques lisses sur Spec F qui s'étendent en un faisceau lisse sur un ouvert de la courbe X. Si l'on préfère, c'est l'ensemble des faisceaux ℓ-adiques lisses σ sur Spec F dont l'image directe par le morphisme Spec $F \hookrightarrow X$, notée encore σ, est un faisceau constructible sur X qui est lisse sur un ouvert non vide.

Chaque tel σ induit des faisceaux ℓ-adiques lisses σ_x sur les Spec F_x et les fibres du faisceau constructible σ en les points fermés $x \in |X|$ sont égales aux $\overline{\sigma}_x$. Les fractions rationnelles $\mathrm{L}_x(\sigma_x, Z)$ sont les facteurs L locaux de σ en toutes les places $x \in |X|$.

On a le résultat suivant de Deligne :

Proposition VI.5. – *Soit $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F)$ un faisceau ℓ-adique qui est lisse et pur de poids $n \in \mathbb{Z}$ sur un ouvert non vide de la courbe X.*

Alors, en tout $x \in |X|$, chaque pôle de la fraction rationnelle

$$\mathrm{L}_x(\sigma_x, Z)$$

a un module de la forme

$$q^{\frac{-n+m}{2}}$$

pour un certain entier $m \geq 0$.

Démonstration : Voir le théorème 1.8.4 de [Deligne]. □

A tout élément $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F)$, on peut maintenant associer une fonction L globale sur la courbe X toute entière

$$\mathrm{L}(\sigma, Z) = \prod_{x \in |X|} \mathrm{L}_x(\sigma_x, Z)$$

qui est certainement bien définie en tant que série formelle en l'indéterminée Z. D'après le théorème VI.1, c'est une fraction rationnelle.

Tout faisceau ℓ-adique $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F)$ a un dual $\check{\sigma} \in \mathcal{G}_\ell(F)$. Leurs fonctions L globales sont reliées par l'équation fonctionnelle de Grothendieck :

Théorème VI.6. – *Pour tout faisceau ℓ-adique $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F)$, les fractions rationnelles* $\mathrm{L}(\sigma, Z)$ *et* $\mathrm{L}(\check{\sigma}, Z)$ *vérifient l'équation fonctionnelle*

$$\mathrm{L}(\sigma, Z) = \varepsilon(\sigma, Z)\mathrm{L}\left(\check{\sigma}, \frac{1}{qZ}\right)$$

où

$$\varepsilon(\sigma, Z) = \prod_{\nu=0}^{2} \left[\det{}_{H_c^\nu(\sigma)}(-\operatorname{Frob}^{-1} \cdot Z)\right]^{(-1)^{\nu+1}}$$

est le produit d'une constante non nulle et d'une puissance de Z.

Démonstration : On note encore σ et $\check{\sigma}$ les faisceaux ℓ-adiques constructibles obtenus par prolongement sur la courbe X tout entière. Leurs groupes de cohomologie sont notés $H_c^\nu(\sigma)$ et $H_c^\nu(\check{\sigma})$, $0 \leq \nu \leq 2$.

D'après le théorème VI.1 de Grothendieck, on a les interprétations cohomologiques

$$\mathrm{L}(\sigma, Z) = \prod_\nu \left[\det_{H_c^\nu(\sigma)}(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}^{-1} \cdot Z)\right]^{(-1)^{\nu+1}},$$

$$\mathrm{L}(\check{\sigma}, Z) = \prod_\nu \left[\det_{H_c^\nu(\check{\sigma})}(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}^{-1} \cdot Z)\right]^{(-1)^{\nu+1}}.$$

D'autre part, le complexe ℓ-adique dualisant sur la courbe lisse X est $\mathbb{Q}_\ell(1)[2]$ et on a un quasi-isomorphisme

$$R\mathcal{H}om(\sigma, \mathbb{Q}_\ell(1)[2]) \xrightarrow{\sim} \check{\sigma}(1)[2].$$

Il résulte alors de la dualité de Grothendieck que pour tout ν, $H_c^\nu(\sigma)$ est dual de $H_c^{2-\nu}(\check{\sigma})(1)$. L'équation fonctionnelle s'en déduit. □

c) Facteurs ε locaux et formule du produit de Laumon

Notant comme toujours $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles du corps des fonctions F de X, on fixe un caractère additif non trivial ψ de $\mathbb{A}/F$. Ses composantes ψ_x en les places $x \in |X|$ sont des caractères additifs non triviaux des F_x. On sait que le choix de ψ est équivalent à celui d'une forme différentielle méromorphe non triviale sur la courbe X.

En toute place $x \in |X|$, on sait associer aux faisceaux ℓ-adiques lisses σ_x sur $\mathrm{Spec}\, F_x$ des facteurs ε locaux

$$\varepsilon_x(\sigma_x, Z, \psi_x)$$

qui sont le produit d'une constante non nulle et d'une puissance positive ou négative de l'indéterminée Z (voir le paragraphe 3.1.5 de [Laumon, 1987]).

On sait les calculer en particulier dans les cas simples suivants :

Lemme VI.7. – *En une place $x \in |X|$, soient σ_x un faisceau ℓ-adique lisse de rang r et χ_x un faisceau ℓ-adique inversible sur* $\mathrm{Spec}\, F_x$. *Alors :*

(i) *Si σ_x est non ramifié, on a*

$$\varepsilon_x(\chi_x \otimes \sigma_x, Z, \psi_x) = \varepsilon_x(\chi_x, Z, \psi_x)^{r-1} \varepsilon_x(\chi_x \otimes \det(\sigma_x), Z, \psi_x)$$

lequel vaut 1 *si χ_x et ψ_x sont également non ramifiés.*

(ii) (*Deligne, Henniart*) *Si χ_x est suffisamment ramifié en fonction de σ_x, on a aussi*

$$\varepsilon_x(\chi_x \otimes \sigma_x, Z, \psi_x) = \varepsilon_x(\chi_x, Z, \psi_x)^{r-1} \varepsilon_x(\chi_x \otimes \det(\sigma_x), Z, \psi_x).$$ □

On rappelle que les éléments $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F)$ induisent des faisceaux ℓ-adiques lisses σ_x sur le complété F_x en toute place x. Et d'après l'assertion (i) du lemme ci-dessus, les facteurs ε locaux

$$\varepsilon_x(\sigma_x, Z, \psi_x)$$

valent 1 en toutes les places x sauf un nombre fini. Leur produit est bien défini et il vérifie la formule fondamentale suivante démontrée par Laumon :

Théorème VI.8. – *Pour tout faisceau ℓ-adique $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F)$, le facteur $\varepsilon(\sigma, Z)$ de l'équation fonctionnelle du théorème* VI.6 *se décompose en*

$$\varepsilon(\sigma, Z) = \prod_{x \in |X|} \varepsilon_x(\sigma_x, Z, \psi_x).$$

□

d) La correspondance de Langlands globale

Commençons par rappeler la définition des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ dont le caractère central est d'ordre fini.

Tout d'abord, une forme automorphe cuspidale en rang r est une fonction

$$\varphi : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- Elle est invariante à gauche par le sous-groupe discret $\mathrm{GL}_r(F)$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.
- Elle est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.
- Il existe un élément $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul tel que

$$\varphi(ag) = \varphi(g)\ ,\ \ \forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}).$$

- Pour tout sous-groupe parabolique standard $P \subsetneq \mathrm{GL}_r$ de radical unipotent N_P et si dn_P désigne une mesure de Haar sur $N_P(\mathbb{A})$, on a

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi(n_P g) = 0\ ,\ \ \forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}).$$

On note Aut_c^r l'espace de ces formes automorphes cuspidales. Il est muni d'une action à droite du groupe $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ par translation ou, si l'on préfère, de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^r = C_c^\infty(\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}))$ par convolution. Comme tel, il est somme directe de représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ ou $\mathcal{H}^r$; ce sont les représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ dont le caractère central est d'ordre fini. On note $\mathcal{A}^r(F)$ leur ensemble.

D'autre part, on note $\mathcal{G}_\ell^r(F)$ l'ensemble des faisceaux ℓ-adiques $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F)$ qui sont irréductibles de rang r et dont le déterminant est d'ordre fini au sens que

$$(\det \sigma)^{\otimes n} \cong \mathbb{Q}_\ell \quad \text{pour un entier } n \neq 0\ .$$

On dit qu'une représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et un faisceau ℓ-adique $\sigma \in \mathcal{G}_\ell(F)$ irréductible de rang r se correspondent au sens de Langlands si en toute place $x \in |X|$ où π et σ sont non ramifiées, la famille des valeurs propres de Hecke

$$z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$$

et la famille des valeurs propres de Frobenius

$$z_1(\sigma_x), \ldots, z_r(\sigma_x)$$

se confondent à l'ordre près, ce qui s'écrit encore

$$\mathrm{L}_x(\pi_x, Z) = \mathrm{L}_x(\sigma_x, Z).$$

L'objet du présent travail est de démontrer l'énoncé suivant proposé par Langlands :

Théorème VI.9. –

(i) *Pour tout entier $r \geq 1$, la correspondance de Langlands définit une bijection*

$$\pi \mapsto \sigma_\pi$$

de l'ensemble $\mathcal{A}^r(F)$ sur l'ensemble $\mathcal{G}_\ell^r(F)$.
De plus, une représentation automorphe cuspidale $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ et le faisceau ℓ-adique $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ qui lui correspond sont ramifiés exactement en les mêmes places.

(ii) *Pour toute paire de représentations automorphes cuspidales $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$, $\pi' \in \mathcal{A}^{r'}(F)$ de rangs $r, r' \geq 1$ et si $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$, $\sigma' \in \mathcal{G}_\ell^{r'}(F)$ sont les faisceaux ℓ-adiques qui leur correspondent, on a en toute place $x \in |X|$ les identités*

$$\mathrm{L}_x\big(\pi_x \times \pi'_x, Z\big) = \mathrm{L}_x\big(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z\big),$$
$$\varepsilon_x\big(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x\big) = \varepsilon_x\big(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z, \psi_x\big).$$

Remarque : Le cas particulier du rang 1 dans cet énoncé est la théorie du corps de classes sur le corps de fonctions F. La première démonstration géométrique en fut donnée par Lang et Rosenlicht (voir le livre [Serre]).

Notre démonstration va se faire en partant de ce cas déjà connu, par récurrence sur le rang r et en généralisant la démonstration de Drinfeld du cas $r = 2$. □

En même temps, nous allons prouver :

Théorème VI.10. –

(i) (*Conjecture de Ramanujan-Petersson*) *Pour tout entier $r \geq 1$ et toute représentation automorphe cuspidale $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$, les facteurs locaux π_x de π en toutes les places $x \in |X|$ sont tempérés.*

En particulier, en les places $x \in |X|$ où π_x est non ramifié, ses valeurs propres de Hecke vérifient

$$|z_i(\pi_x)| = 1\ ,\ \ 1 \leq i \leq r\ .$$

(ii) (*Hypothèse de Riemann généralisée*) *Pour toute paire de représentations automorphes cuspidales $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$, $\pi' \in \mathcal{A}^{r'}(F)$ de rangs r, $r' \geq 1$, tous les zéros de la fonction* L *globale*

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z)$$

sont sur le cercle

$$|Z| = q^{-1/2}\,.$$

Remarque : On a déjà vu dans le livre [Lafforgue, 1997] que (i) implique (ii). Bien sûr, (ii) est aussi une conséquence immédiate de (i) et du théorème VI.9 d'après le théorème VI.1 (interprétation cohomologique des fonctions L) de Grothendieck et le théorème VI.2 (pureté) de Deligne. □

e) Hypothèse de récurrence et réductions

A partir de maintenant, on fixe un entier $r \geq 2$.

On commence par remarquer qu'à toute $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ il ne peut correspondre au sens de Langlands qu'au plus une $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$, comme il résulte du théorème de densité de Chebotarev. Et réciproquement, à toute $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ ne peut correspondre qu'au plus une $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ d'après le "théorème de multiplicité un fort" de Piatetski-Shapiro.

Précisons le pas de récurrence :

Proposition VI.11. – *Supposons les théorèmes* VI.9 *et* VI.10(i) *déjà connus en tous les rangs $< r$. Alors :*

(i) *Pour tout faisceau ℓ-adique $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$, on peut construire une représentation automorphe cuspidale $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ non ramifiée partout où σ est non ramifié et qui lui corresponde au sens de Langlands.*

(ii) *Si de plus on sait associer à toute $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ un faisceau ℓ-adique $\sigma_\pi \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ non ramifié partout où π est non ramifiée, pur de poids* 0 *et qui lui corresponde au sens de Langlands, on peut conclure que les théorèmes* VI.9 *et* VI.10(i) *sont connus en tous les rangs $\leq r$.*

Démonstration : Le théorème VI.9 est déjà connu en rang 1. Cela signifie qu'on peut identifier les caractères d'ordre fini de $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ aux faisceaux ℓ-adiques de rang 1 et d'ordre fini $\chi \in \mathcal{G}_\ell^1(F)$. Cette identification respecte les facteurs L et ε locaux en toutes les places.

(i) Considérons donc un faisceau ℓ-adique irréductible $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ et notons S l'ensemble fini des places $x \in |X|$ où σ est ramifié.

En toute place $x \notin S$, on note π_x la représentation irréductible non ramifiée de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ dont les valeurs propres de Hecke sont les $z_1(\sigma_x), \ldots, z_r(\sigma_x)$. En les places $x \in S$, on peut certainement choisir une représentation π_x de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui est irréductible et induite de type de Whittaker et dont le caractère central χ_{π_x} correspond à $\det(\sigma_x)$. Ainsi, $\pi = \bigotimes\limits_{x\in|X|} \pi_x$ est une représentation lisse admissible irréductible de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ dont le caractère central $\chi_\pi = \bigotimes\limits_{x\in|X|} \chi_{\pi_x}$ correspond à $\det\sigma$.

Soit $\chi = \bigotimes\limits_{x\in|X|} \chi_x$ un caractère d'ordre fini de $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ qui est très ramifié en les places $x \in S$. On veut montrer que si $\pi' = \bigotimes\limits_{x\in|X|} \pi'_x \in \mathcal{A}^{r'}(F)$ est une représentation automorphe cuspidale en rang $r' < r$ qui est non ramifiée en les places $x \in S$, les deux séries formelles

$$\mathrm{L}(\chi\pi \times \pi', Z) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}(\chi^{-1}\check{\pi} \times \check{\pi}', Z)$$

sont des polynômes et satisfont l'équation fonctionnelle

$$\mathrm{L}(\chi\pi \times \pi', Z) = \varepsilon(\chi\pi \times \pi', Z)\mathrm{L}\left(\chi^{-1}\check{\pi} \times \check{\pi}', \frac{1}{qZ}\right),$$

ce qui permettra d'appliquer le théorème B.13.

Or d'après l'hypothèse de récurrence π' correspond au sens de Langlands à un faisceau ℓ-adique $\sigma' \in \mathcal{G}_\ell^{r'}(F)$ si bien que $\chi\pi'$ et $\chi\otimes\sigma'$ se correspondent et ont les mêmes facteurs L et ε locaux en toutes les places.

En les places $x \notin S$, le facteur π_x est non ramifié et on a automatiquement

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_x\big(\chi_x\pi_x \times \pi'_x, Z\big) = \mathrm{L}_x\big(\sigma_x \otimes \chi_x \otimes \sigma'_x, Z\big),\\
&\mathrm{L}_x\big(\chi_x^{-1}\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z\big) = \mathrm{L}_x\big(\check{\sigma}_x \otimes \chi_x^{-1} \otimes \check{\sigma}'_x, Z\big),\\
&\varepsilon_x\big(\chi_x\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x\big) = \varepsilon_x\big(\sigma_x \otimes \chi_x \otimes \sigma'_x, Z, \psi_x\big).
\end{aligned}$$

D'autre part, en les places $x \in S$, le facteur π'_x est non ramifié si bien que si χ_x a été choisi suffisamment ramifié en fonction de π_x et σ_x, on a d'après le lemme B.3, le lemme VI.4(iii) et le lemme VI.7(ii)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_x\big(\chi_x\pi_x \times \pi'_x, Z\big) = 1 = \mathrm{L}_x\big(\sigma_x \otimes \chi_x \otimes \sigma'_x, Z\big),\\
&\mathrm{L}_x\big(\chi_x^{-1}\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z\big) = 1 = \mathrm{L}_x\big(\check{\sigma}_x \otimes \chi_x^{-1} \otimes \check{\sigma}'_x, Z\big)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x\big(\chi_x\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x\big) &= \varepsilon_x\big(\chi_x, Z, \psi_x\big)^{rr'-1}\varepsilon_x\big(\chi_x\chi_{\pi_x}^{r'}\chi_{\pi'_x}^{r}, Z, \psi_x\big)\\
&= \varepsilon_x\big(\chi_x, Z, \psi_x\big)^{rr'-1}\varepsilon_x\big(\det(\sigma_x)^{r'}\chi_x\det\big(\sigma'_x\big)^r, Z, \psi_x\big)\\
&= \varepsilon_x\big(\sigma_x \otimes \chi_x \otimes \sigma'_x, Z, \psi_x\big).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\chi\pi \times \pi', Z) &= \mathrm{L}(\sigma \otimes \chi \otimes \sigma', Z), \\ \mathrm{L}\big(\chi^{-1}\breve{\pi} \times \breve{\pi}', Z\big) &= \mathrm{L}\big(\breve{\sigma} \otimes \chi^{-1} \otimes \breve{\sigma}', Z\big) \end{aligned}$$

et d'après la formule du produit de Laumon

$$\varepsilon(\chi\pi \times \pi', Z) = \varepsilon(\sigma \otimes \chi \otimes \sigma', Z).$$

On voit déjà que $\mathrm{L}(\chi\pi \times \pi', Z)$ et $\mathrm{L}(\chi^{-1}\breve{\pi} \times \breve{\pi}', Z)$ sont des fractions rationnelles qui vérifient

$$\mathrm{L}(\chi\pi \times \pi', Z) = \varepsilon(\chi\pi \times \pi', Z)\mathrm{L}\left(\chi^{-1}\breve{\pi} \times \breve{\pi}', \frac{1}{qZ}\right).$$

Il reste à voir que ce sont des polynômes. Mais ceci résulte de l'interprétation cohomologique de Grothendieck

$$\mathrm{L}(\sigma \otimes \chi \otimes \sigma', Z) = \prod_{\nu=0}^{2} \big[\det_{H_c^\nu(\sigma\otimes\chi\otimes\sigma')}(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}^{-1} \cdot Z)\big]^{(-1)^{\nu+1}}$$

$$\mathrm{L}(\breve{\sigma} \otimes \chi \otimes \breve{\sigma}', Z) = \prod_{\nu=0}^{2} \big[\det_{H_c^\nu(\breve{\sigma}\otimes\chi^{-1}\otimes\breve{\sigma}')}(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}^{-1} \cdot Z)\big]^{(-1)^{\nu+1}}$$

puisque, comme σ et σ' sont irréductibles de rangs r et r' différents, les $H_c^\nu(\sigma \otimes \chi \otimes \sigma')$ et $H_c^\nu(\breve{\sigma} \otimes \chi \otimes \breve{\sigma}')$ sont nuls pour $\nu = 0$ ou 2.

D'après le théorème B.13, on peut maintenant affirmer que quitte à changer les facteurs irréductibles π_x de π en les places $x \in S$, la représentation $\chi\pi$ est automorphe (c'est-à-dire se représente comme sous-quotient de l'espace des formes automorphes sur $\mathrm{GL}_r(F)\backslash\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$) et donc aussi $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$.

Si $S = \emptyset$, on sait même que $\chi\pi$ et π sont automorphes cuspidales et on a terminé.

Si $S \neq \emptyset$, il reste encore à prouver que π est cuspidale. Raisonnant par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas. D'après Langlands, il existe une partition non triviale $r = r_1 + \cdots + r_k$ de l'entier r et des représentations automorphes cuspidales $\pi^1, \ldots, \pi^k$ de $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}), \ldots, \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$ non ramifiées en dehors de S telles que pour tout $x \notin S$ l'ensemble des valeurs propres de Hecke

$$z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$$

soit la réunion disjointe sur les i, $1 \leq i \leq k$, des familles

$$z_1\big(\pi_x^i\big), \ldots, z_{r_i}\big(\pi_x^i\big).$$

Par hypothèse de récurrence, les $\pi^1, \ldots, \pi^k$ correspondent au sens de Langlands à des faisceaux ℓ-adiques $\sigma^1, \ldots, \sigma^k \in \mathcal{G}_\ell(F)$ irréductibles de rangs

$r_1, \ldots, r_k$. Le faisceau irréductible σ et le faisceau semi-simple $\sigma^1 \oplus \cdots \oplus \sigma^k$ ont les mêmes valeurs propres de Frobenius en tous les points $x \notin S$. D'après le théorème de densité de Chebotarev c'est impossible.

Pour démontrer la partie (ii) de la proposition, on a besoin du lemme suivant :

Lemme VI.12. – *En une place $x_0 \in |X|$, soit π_{x_0} une représentation admissible irréductible supercuspidale de* $\mathrm{GL}_r(F_{x_0})$ *dont le caractère central $\chi_{\pi_{x_0}}$ est d'ordre fini.*

Alors il existe une représentation automorphe cuspidale $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ dont le facteur en x_0 est π_{x_0}.

Démonstration du lemme : On reprend celle du lemme 15.10 de [Laumon, Rapoport, Stuhler] mais sans demander autant de conditions.

Soit a un élément de degré non nul dans $F_{x_0}^\times$ pour lequel $\chi_{\pi_{x_0}}(a) = 1$. D'après le théorème 2.42 de [Bernstein, Zelevinski], il existe une fonction $h_{x_0} \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_r(F_{x_0})/a^{\mathbb{Z}})$ telle que

$$\mathrm{Tr}_{\pi_{x_0}}(h_{x_0}) \neq 0$$

mais que pour toute autre représentation admissible irréductible π'_{x_0} de $\mathrm{GL}_r(F_{x_0})$ vérifiant $\chi_{\pi'_{x_0}}(a) = 1$, on ait

$$\mathrm{Tr}_{\pi'_{x_0}}(h_{x_0}) = 0\,.$$

En deux autres places x_1 et x_2, on choisit deux fonctions supercuspidales $h_{x_1} \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_r(F_{x_1}))$ et $h_{x_2} \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_r(F_{x_2}))$ qui ont au moins une intégrale orbitale non nulle.

Pour toute fonction $h^{x_0,x_1,x_2} \in C_c^\infty(\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^{x_0,x_1,x_2}))$, on peut former le produit $h = h_{x_0} \otimes h_{x_1} \otimes h_{x_2} \otimes h^{x_0,x_1,x_2}$ dans $C_c^\infty(\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$.

La trace tronquée d'Arthur $\mathrm{Tr}^{\leq p}(h)$ d'une telle fonction h ne dépend pas du polygone de troncature p et d'après le théorème 10 du paragraphe V.2d de [Lafforgue, 1997], elle s'écrit

$$\mathrm{Tr}(h) = \sum_{\gamma} \int_{\mathrm{GL}_r(F)_\gamma \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot h(g^{-1}\gamma g)$$

où γ décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison d'éléments elliptiques de $\mathrm{GL}_r(F)$ et $\mathrm{GL}_r(F)_\gamma$ désigne leurs sous-groupes de commutateurs.

Les fonctions $h_{x_0}, h_{x_1}, h_{x_2}$ étant déjà fixées, on peut choisir h^{x_0,x_1,x_2} de façon que

$$\mathrm{Tr}(h) \neq 0\,.$$

D'autre part, la formule des traces d'Arthur-Selberg (voir le théorème 12 du paragraphe VI.2f de [Lafforgue, 1997]) s'écrit ici simplement

$$\mathrm{Tr}(h) = \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{A}^r(F) \\ \chi_\pi(a)=1}} \mathrm{Tr}_\pi(h).$$

Il y a donc un $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ tel que $\mathrm{Tr}_\pi(h) \neq 0$. Comme h comprend h^{x_0} en facteur, la composante de π en x_0 ne peut être que π_{x_0}. $\square$

Démonstration de la proposition VI.11(ii) : Soit $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$. On sait déjà qu'il lui correspond un faisceau ℓ-adique $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ qui est non ramifié exactement là où π est non ramifié et qui est pur de poids 0.

De même, soient $r' \leq r$ un entier, $\pi' \in \mathcal{A}^{r'}(F)$ et σ' le faisceau ℓ-adique pur de poids 0 qui correspond à π' dans $\mathcal{G}_\ell^{r'}(F)$.

Notons S l'ensemble fini des places $x \in |X|$ où π_x ou π'_x est ramifié. Il résulte du lemme B.1 et des lemmes VI.4(i)(ii) et VI.7(i) que pour tous caractères d'ordre fini $\chi, \chi' \in \mathcal{A}^1(F) = \mathcal{G}_\ell^1(F)$, on a en toute place $x \notin S$

$$\mathrm{L}_x\big(\chi_x\pi_x \times \chi'_x\pi'_x, Z\big) = \mathrm{L}_x\big(\chi_x\chi'_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma'_x, Z\big),$$

$$\mathrm{L}_x\big(\chi_x^{-1}\check{\pi}_x \times \chi_x'^{-1}\check{\pi}'_x, Z\big) = \mathrm{L}_x\big(\chi_x^{-1}\chi_x'^{-1} \otimes \check{\sigma}_x \otimes \check{\sigma}'_x, Z\big),$$

$$\varepsilon_x\big(\chi_x\pi_x \times \chi'_x\pi'_x, Z, \psi_x\big) = \varepsilon_x\big(\chi_x\chi'_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma'_x, Z, \psi_x\big).$$

D'après le lemme B.3 et les lemmes VI.4(iii) et VI.7(ii), ces égalités sont également vérifiées en n'importe quelle place $x \in S$ dès que $\chi_x\chi'_x$ est suffisamment ramifié.

Comme les produits de ces facteurs L et ε locaux vérifient les équations fonctionnelles

$$\mathrm{L}(\chi\pi \times \chi'\pi', Z) = \varepsilon(\chi\pi \times \chi'\pi', Z)\mathrm{L}\left(\chi^{-1}\check{\pi} \times \chi'^{-1}\check{\pi}', \frac{1}{qZ}\right),$$

$$\mathrm{L}(\chi\chi' \otimes \sigma \otimes \sigma', Z) = \varepsilon(\chi\chi' \otimes \sigma \otimes \sigma', Z)\mathrm{L}\left(\chi^{-1}\chi'^{-1} \otimes \check{\sigma} \otimes \check{\sigma}', \frac{1}{qZ}\right),$$

on déduit de la proposition B.11 qu'en toute place x

$$\frac{\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)}{\varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x)\mathrm{L}_x\big(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, \frac{1}{qZ}\big)} = \frac{\mathrm{L}_x(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z)}{\varepsilon_x(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z, \psi_x)\mathrm{L}_x\big(\check{\sigma}_x \otimes \check{\sigma}'_x, \frac{1}{qZ}\big)}.$$

D'après la proposition VI.5, on sait aussi que les pôles de $\mathrm{L}_x(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z)$ et $\mathrm{L}_x(\check{\sigma}_x \otimes \check{\sigma}'_x, \frac{1}{qZ})$ ne se rencontrent pas et que leurs modules sont des puissances de $q^{\frac{1}{2}}$.

En une place $x \in |X|$ où π_x est ramifié, soit ρ une représentation supercuspidale irréductible de caractère central d'ordre fini qui apparaît à torsion près dans l'écriture de Bernstein et Zelevinski de π_x. D'après le lemme VI.12 ci-dessus, on a pu choisir π' de façon que $\pi'_x = \check{\rho}$. Comme π_x est unitaire et admet un modèle de Whittaker et que π'_x est tempérée, le corollaire B.7 dit que $\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)$ et $\mathrm{L}_x(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, \frac{1}{qZ})$ n'ont pas de pôle commun. Donc

$$\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z) = \mathrm{L}_x(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z)$$

et les pôles de $\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z) = \mathrm{L}_x(\pi_x \times \check{\rho}, Z)$ ont pour modules des puissances de $q^{\frac{1}{2}}$. D'après le théorème B.5 et la proposition B.6, cela implique que π_x est tempérée.

On revient maintenant à un π' général de rang $r' \leq r$, tout en sachant désormais que les π_x et π'_x sont tempérés. D'après le corollaire B.7, $\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)$ et $\mathrm{L}_x(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, \frac{1}{qZ})$ n'ont jamais de pôle commun et on peut conclure qu'en toute place $x \in |X|$,

$$\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z) = \mathrm{L}_x(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z)$$

et

$$\varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x) = \varepsilon_x(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z, \psi_x).$$

On a démontré tout ce qu'on voulait. □

2) Cohomologie essentielle des champs de chtoucas

a) Cohomologie ℓ-adique des chtoucas et de leurs compactifications

On fixe donc un entier $r \geq 2$ et on fait l'hypothèse de récurrence que le théorème VI.9 et le théorème VI.10(i) sont déjà connus en tous les rangs $< r$. D'après la proposition VI.11, on sait aussi associer à tout faisceau ℓ-adique $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ une représentation automorphe cuspidale $\pi \in \mathcal{A}_\ell^r(F)$ qui est non ramifiée partout où σ est non ramifié et lui correspond au sens de Langlands.

Pour terminer la récurrence, il suffit de construire pour toute $\pi \in \mathcal{A}_\ell^r(F)$ un faisceau $\sigma_\pi \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ qui est non ramifié partout où π est non ramifiée, est pur de poids 0 et correspond à π.

Il suffit même de traiter le cas où le caractère central χ_π de π vérifie $\chi_\pi(a) = 1$ pour un certain idèle $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré $\deg(a) = 1$ que l'on fixe. Etant donné un niveau arbitraire $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$, on rappelle que $\mathcal{H}_N^r$ désigne la sous-algèbre de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ constituée des fonctions invariantes à droite et à gauche par $K_N = \operatorname{Ker}[K = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)]$; elle admet un élément unité $\mathbb{1}_N$ qui est le quotient de la fonction caractéristique de K_N par son volume. Il s'agit d'associer à toute représentation automorphe cuspidale

$$\pi \in \{\pi\}_N^r = \left\{\pi \in \mathcal{A}^r(F) \mid \chi_\pi(a) = 1 \ \wedge \ \pi \cdot \mathbb{1}_N \neq 0\right\}$$

un faisceau ℓ-adique $\sigma_\pi \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ non ramifié sur $X - N$, pur de poids 0 et qui correspond à π au sens de Langlands.

Notant $F^2 = \operatorname{Frac}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} F)$ le corps des fonctions de la surface $X \times X$ et $q', q'' : X \times X \rightrightarrows X$ les deux projections de celle-ci sur la courbe X, nous allons construire les σ_π en identifiant dans la cohomologie ℓ-adique à supports compacts des $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $\operatorname{Spec} F^2$ des morceaux de la forme $q'^*\sigma_\pi \otimes q''^*\check{\sigma}_\pi(1-r)$.

On rappelle que si $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ est un polygone de troncature assez convexe en fonction de X, on a construit des compactifications $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ des $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ qui sont propres sur $X \times X$ et lisses sur $\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$. Pour $N \hookrightarrow X$ un niveau non vide et si p est assez convexe en fonction de X et N, les normalisations $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ des $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$ dans les $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ sont propres sur $(X-N)\times(X-N)$ et lisses sur $(X-N)\times(X-N)\times\mathcal{C}_N^r$. L'ouvert $\mathcal{C}_N'^r$ de $\mathcal{C}_N^r$ est lisse sur $\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$ si bien que les ouverts images réciproques $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ dans les $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ sont lisses sur $(X-N)\times(X-N)\times\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$. Quand $\mathcal{C}_N^r$ admet une résolution des singularités $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ lisse sur le champ torique $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,N}$ quotient d'une variété torique lisse $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}$ par son tore $\mathcal{A}_\emptyset^{r,N}$ (par exemple si N n'a pas de multiplicités ou si $r=2$), les $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{\mathcal{C}_N^r} \widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ sont propres sur $(X-N)\times(X-N)$ et lisses sur $(X-N)\times(X-N)\times\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,N}$. Les bords des $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$, des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ ou éventuellement des $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ sont des diviseurs à croisements normaux relatifs ; ils se décomposent en strates ouvertes et en strates fermées qui sont les images réciproques des points de $\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$ (ou $\widetilde{\mathcal{A}}^{r,N}/\mathcal{A}_\emptyset^{r,N}$) et de leurs adhérences schématiques.

D'après la proposition V.1, tous ces champs sur $X\times X$ ou $(X-N)\times(X-N)$ sont sereins et de même les $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$, $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ ou $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$.

Si $\mathfrak{X}$ est un ouvert $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$, $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$, un compactifié $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$, $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ ou une strate de bord ouverte ou fermée de celui-ci, on notera $H_c^\nu(\mathfrak{X})$ les faisceaux de cohomologie ℓ-adique à supports compacts de $\mathfrak{X}$ au-dessus de $X\times X$. D'après le théorème A.9(i), ce sont des faisceaux ℓ-adiques lisses sur $X\times X$.

Pour N un niveau non vide, $\mathcal{C}$ un champ algébrique représentable quasi-projectif sur $\mathcal{C}_N^r$, $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{\mathcal{C}_N^r} \mathcal{C}$ ou $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times_{\mathcal{C}_N^r} \mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ un complexe de faisceaux ℓ-adiques sur $\mathcal{C}$, on notera $H_c^\nu(\mathfrak{X},\mathcal{F})$ les faisceaux de cohomologie ℓ-adique à supports compacts au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$ du complexe sur $\mathfrak{X}$ déduit de $\mathcal{F}$ via le morphisme lisse de restriction de X à N

$$\mathrm{Res} : \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}, \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{C}_N^r \, .$$

Ici encore, il résulte du théorème A.9(i) que les $H_c^\nu(\mathfrak{X},\mathcal{F})$ sont des faisceaux ℓ-adiques lisses sur $(X-N)\times(X-N)$. Quand $\mathcal{F}$ est le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ [resp. le complexe d'intersection], on notera simplement $H_c^\nu(\mathfrak{X},\mathcal{F}) = H_c^\nu(\mathfrak{X})$ [resp. $H_c^\nu(\mathfrak{X},\mathcal{F}) = IH_c^\nu(\mathfrak{X})$].

Si $\mathfrak{X}$ est égal à $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$, $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ (ou éventuellement $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$, $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$) ou à une de leurs strates fermées, les faisceaux ℓ-adiques lisses $H_c^\nu(\mathfrak{X})$ sur $X\times X$ (ou $(X-N)\times(X-N)$) sont purs de poids ν. De même, si $\mathcal{C}$ est un champ représentable projectif sur $\mathcal{C}_N^r$ et $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{\mathcal{C}_N^r} \mathcal{C}$ ou $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \times_{\mathcal{C}_N^r} \mathcal{C}$, les faisceaux ℓ-adiques lisses $IH_c^\nu(\mathfrak{X})$ sur $(X - N) \times (X - N)$ sont purs de poids ν.

Dans tous les cas, on notera $H_c^\nu(\mathfrak{X})^{ss}$, $IH_c^\nu(\mathfrak{X})^{ss}$, $H_c^\nu(\mathfrak{X}, \mathcal{F})^{ss}$ les semi-simplifiés des $H_c^\nu(\mathfrak{X})$, $IH_c^\nu(\mathfrak{X})$, $H_c^\nu(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ et $H_c^*(\mathfrak{X})$, $IH_c^*(\mathfrak{X})$, $H_c^*(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ les faisceaux ℓ-adiques virtuels

$$H_c^*(\mathfrak{X}) = \sum_\nu (-1)^\nu H_c^\nu(\mathfrak{X})^{ss} ,$$
$$IH_c^*(\mathfrak{X}) = \sum_\nu (-1)^\nu IH_c^\nu(\mathfrak{X})^{ss} ,$$
$$H_c^*(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) = \sum_\nu (-1)^\nu H_c^\nu(\mathfrak{X}, \mathcal{F})^{ss} .$$

b) Faisceaux ou représentations ℓ-adiques r-négligeables

On rappelle que q' et q'' désignent les deux projections $X \times X \rightrightarrows X$.

On choisit un point géométrique η de $X \times X$ supporté par le point générique Spec F^2 et on note η', η'' ses images par q' et q''.

Pour tous ouverts X' et X'' de X, on a des homomorphismes induits entre groupes fondamentaux

$$\pi_1(X' \times X'', \eta) \to \pi_1(X', \eta') \, , \; \pi_1(X' \times X'', \eta) \to \pi_1(X'', \eta'')$$

au-dessus de $\widehat{\mathbb{Z}}$, et entre groupes de Weil

$$W(X' \times X'', \eta) \to W(X', \eta') \, , \; W(X' \times X'', \eta) \to W(X'', \eta'')$$

au-dessus de $\mathbb{Z}$. L'endomorphisme de Frobenius partiel $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ ne fixe pas η mais il définit certainement un homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans le groupe des automorphismes extérieurs de $W(X' \times X'', \eta)$ et donc un groupe $\mathbb{Z}W(X' \times X'', \eta)$ s'inscrivant dans une suite exacte

$$1 \to W(X' \times X'', \eta) \to \mathbb{Z}W(X' \times X'', \eta) \to \mathbb{Z} \to 0 .$$

On dispose aussi des groupes de Galois $G_{F^2}^\eta = \pi_1(\mathrm{Spec}\, F^2, \eta)$, $G_F^{\eta'} = \pi_1(\mathrm{Spec}\, F, \eta')$, $G_F^{\eta''} = \pi_1(\mathrm{Spec}\, F, \eta'')$ et des groupes de Weil $W_{F^2}^\eta = G_{F^2}^\eta \times_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$, $W_F^{\eta'} = G_F^{\eta'} \times_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$, $W_F^{\eta''} = G_F^{\eta''} \times_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$ que relient les homomorphismes $q' : W_{F^2}^\eta \to W_F^{\eta'}$, $q'' : W_{F^2}^\eta \to W_F^{\eta''}$ au-dessus de $\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ définit une extension $\mathbb{Z}W_{F^2}^\eta$ de $\mathbb{Z}$ par $W_{F^2}^\eta$. On a :

Lemme VI.13. –

(i) *Pour tous ouverts X' et X'' de X, le groupe $\mathbb{Z}W(X' \times X'', \eta)$ est naturellement muni d'un homomorphisme continu et surjectif*

$$\mathbb{Z}W(X' \times X'', \eta) \to W(X', \eta') \times W(X'', \eta'')$$

qui prolonge $W(X' \times X'', \eta) \to [W(X', \eta') \times W(X'', \eta'')] \times_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.

(ii) *De même, $\mathbb{Z}W^{\eta}_{F^2}$ est naturellement muni d'un homomorphisme continu et surjectif*

$$\mathbb{Z}W^{\eta}_{F^2} \to W^{\eta'}_F \times W^{\eta''}_F$$

qui prolonge $(q', q'') : W^{\eta}_{F^2} \to [W^{\eta'}_F \times W^{\eta''}_F] \times_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.

Démonstration : (i) résulte de ce que, d'après Drinfeld, la catégorie des paires de revêtements finis étales de X' et X'' est équivalente à celle des revêtements finis étales de $X' \times X''$ munis d'un relèvement de $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$.

(ii) est une conséquence évidente de (i). □

On pose la définition suivante qui nous permettra d'enlever de la cohomologie des $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ ou de leurs compactifications tout ce qui n'est pas intéressant pour nous :

Définition VI.14. – *Un faisceau ℓ-adique [resp. virtuel] dans $\mathcal{G}_{\ell}(F^2)$ ou plus généralement une représentation de $W^{\eta}_{F^2}$ sera dit r-négligeable si tous ses sous-quotients irréductibles [resp. ses composantes] sont des facteurs directs de faisceaux ou de représentations de la forme*

$$q'^{*}\sigma' \otimes q''^{*}\sigma'' \ ,$$

avec σ', σ'' deux faisceaux ℓ-adiques dans $\mathcal{G}_{\ell}(F)$ ou deux représentations de $W^{\eta'}_F$ et $W^{\eta''}_F$ irréductibles de rangs $< r$.

Il sera dit essentiel si aucun de ses sous-quotients irréductibles [resp. aucune de ses composantes] n'est r-négligeable.

Remarque : Attention !

Même si σ' et σ'' sont irréductibles, $q'^{*}\sigma' \otimes q''^{*}\sigma''$ ne l'est pas nécessairement. Mais d'après le lemme VI.13(ii), elle est toujours semi-simple, ses facteurs apparaissent avec la même multiplicité et ils sont images les uns des autres par les puissances de $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$. Leur nombre est égal à celui des caractères non ramifiés χ tels que $\sigma' \otimes \chi^{-1} \cong \sigma'$ et $\sigma'' \otimes \chi \cong \sigma''$ et il divise les rangs r' et r'' de σ' et σ''.

On dira qu'un faisceau semi-simple [resp. virtuel] dans $\mathcal{G}_{\ell}(F^2)$ ou plus généralement une telle représentation de $W^{\eta}_{F^2}$ est r-négligeable complet s'il est somme d'objets de la forme $q'^{*}\sigma' \otimes q''^{*}\sigma''$ avec σ', σ'' irréductibles de rangs $< r$. Pour qu'un tel σ r-négligeable soit complet, il faut et il suffit qu'il soit invariant par $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et même s'il ne l'est pas, $\bigoplus_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X)^*\sigma$ ou $\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X)^*\sigma$ l'est. □

En même temps que les théorèmes VI.9 et VI.10(i) en rang r, nous allons prouver :

Proposition VI.15. – *Pour tout polygone de troncature $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ (assez convexe en fonction de X et N), on a :*

(i) *Tous les faisceaux de cohomologie ℓ-adique à supports compacts $H_c^\nu(\mathfrak{X})$ du bord $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} - \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ (si $N = \emptyset$) ou éventuellement $\mathfrak{X} = \widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} - \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ (si $N \neq \emptyset$ et $\mathfrak{C}_N^r$ admet une résolution des singularités $\widetilde{\mathfrak{C}}_N^r$) sont r-négligeables.*

De même, si $N \neq \emptyset$, $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{F}$ est la restriction au bord $\mathfrak{C}_N^r - \mathfrak{C}_{N,\emptyset}^r$ du complexe d'intersection sur $\mathfrak{C}_N^r$, tous les faisceaux ℓ-adiques lisses $H_c^\nu(\mathfrak{X},\mathcal{F})$ sont r-négligeables.

(ii) *Les faisceaux de cohomologie $H_c^\nu(\mathfrak{X})$ de toute strate de bord ouverte ou fermée $\mathfrak{X}$ de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ (si $N = \emptyset$), $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ (si $N \neq \emptyset$) ou éventuellement $\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ sont r-négligeables.*

(iii) *Les $H_c^\nu(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ sont $(r+1)$-négligeables.*

Remarque : Pour $r = 1$, il n'y a pas de troncature ni de bord et (iii) se prouve facilement sans calcul.

En effet, $\mathrm{Cht}_N^1/a^{\mathbb{Z}}$ est un revêtement fini étale de $(X-N)\times(X-N)$. Comme il provient par changement de base du revêtement de la variété de Picard de X par l'isogénie de Lang, c'est un revêtement abélien et les sous-quotients irréductibles des $H^\nu(\mathrm{Cht}_N^1/a^{\mathbb{Z}})$ sont des caractères. Ils sont nécessairement de la forme $q'^*\chi' \otimes q''^*\chi''$ car $\mathrm{Cht}_N^1/a^{\mathbb{Z}}$ est muni de l'action des endomorphismes de Frobenius partiels Frob_∞ et Frob_0. □

On fait aussi l'hypothèse de récurrence que la proposition VI.15 est déjà connue en les rangs $< r$.

c) Vérification de ce que le bord est r-négligeable

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition VI.15 (i) et (ii).

Commençons par le cas facile où $N = \emptyset$:

Le cas sans niveau :

Il est équivalent de montrer les propriétés requises pour $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ ou pour les $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$.

Comme le bord de chaque $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ et ses strates fermées sont réunions disjointes des strates ouvertes qu'ils contiennent, il suffit d'après le lemme de dévissage A.15 de vérifier que les faisceaux de cohomologie ℓ-adique à supports compacts sur $X \times X$ des strates ouvertes de bord de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ sont r-négligeables.

Les strates ouvertes du bord de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ sont indexées par les partitions non triviales $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_k)$ de l'entier r ; on les a notées $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p}$.

D'après le corollaire III.4, chacune est munie d'un morphisme

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \to \mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1} \times \mathrm{Cht}^{r_2,d_2,\overline{p}\leq p_2} \times_{X,\mathrm{Frob}} \cdots \times_{X,\mathrm{Frob}} \mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k}$$

au-dessus de l'endomorphisme $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ de $X \times X$ lequel préserve les représentations r-négligeables. De plus, ce morphisme induit des isomorphismes en cohomologie car c'est le composé d'un morphisme de gerbe et d'un morphisme représentable, fini, surjectif et radiciel.

On est réduit à montrer que la cohomologie à supports compacts de

$$\mathcal{C} = \mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1} \times_X \mathrm{Cht}^{r_2,d_2,\overline{p}\leq p_2} \times_{X,\mathrm{Frob}} \cdots \times_{X,\mathrm{Frob}} \mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k}$$

au-dessus de $X \times X$ est r-négligeable. Considérons la factorisation du morphisme de structure sur $X \times X$ à travers $X \times X^{k-1} \times X$ et notons $q_0, q_1, \ldots, q_k$ les $k+1$ projections de $X \times X^{k-1} \times X$ sur X. D'après les hypothèses de récurrence, la cohomologie à supports compacts de $\mathcal{C}$ au-dessus de $X \times X^{k-1} \times X$ est composée avec des facteurs directs de faisceaux de la forme

$$\left(q_0^*\sigma_0 \otimes q_1^*\sigma_1'\right) \otimes \left(q_1^*\sigma_1 \otimes q_2^*\sigma_2'\right) \otimes \cdots \otimes \left(q_{k-1}^*\sigma_{k-1} \otimes q_k^*\sigma_k'\right)$$

où $\sigma_0, \sigma_1', \sigma_1, \sigma_2', \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k'$ sont des faisceaux ℓ-adiques sur X irréductibles de rangs $\leq \max\{r_1, \ldots, r_k\} < r$. D'après la formule de Künneth, la cohomologie de $\mathcal{C}$ au-dessus de $X \times X$ est alors composée avec des facteurs directs de faisceaux de la forme

$$q_0^*\sigma_0 \otimes \chi \otimes q_k^*\sigma_k'$$

où σ_0 et σ_k' sont comme ci-dessus et les χ sont des faisceaux ℓ-adiques irréductibles donc de rang 1 sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$. Elle est r-négligeable. □

Afin de traiter le cas où il y a un niveau $N \neq \emptyset$, on a besoin d'un lemme préparatoire.

Pour tout entier $d_0 \geq 1$, on note $W^{\eta}_{F^2_{d_0}}$, $W^{\eta'}_{F_{d_0}}$ et $W^{\eta''}_{F_{d_0}}$ les sous-groupes de $W^{\eta}_{F^2}$, $W^{\eta'}_{F}$ et $W^{\eta''}_{F}$ images réciproques de $d_0\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. On a :

Lemme VI.16. – *Soit $d_0 \geq 1$ un entier.*

(i) *Etant donnée σ une représentation ℓ-adique irréductible de $W^{\eta'}_{F_{d_0}}$ ou $W^{\eta''}_{F_{d_0}}$, toutes les représentations irréductibles de $W^{\eta'}_{F}$ ou $W^{\eta''}_{F}$ qui la contiennent ont même dimension ; quand celle-ci est $< r$, on dit que σ est r-négligeable.*

(ii) *Soit σ une représentation ℓ-adique irréductible de $W^{\eta}_{F^2_{d_0}}$. Si, parmi les représentations irréductibles de $W^{\eta}_{F^2}$ qui la contiennent, l'une est r-négligeable, il en est de même des autres. On dit alors que σ est r-négligeable.*
C'est équivalent à demander qu'elle soit facteur direct d'une représentation de la forme $q'^*\sigma' \otimes q''^*\sigma''$, avec σ', σ'' deux représentations irréductibles r-négligeables de $W^{\eta'}_{F_{d_0}}$ et $W^{\eta''}_{F_{d_0}}$.

Démonstration : Cela résulte de ce que le sous-groupe $W_{d_0} = W^{\eta'}_{F_{d_0}}$, $W^{\eta''}_{F_{d_0}}$ ou $W^{\eta}_{F^2_{d_0}}$ est distingué dans $W = W^{\eta'}_F$, $W^{\eta''}_F$ ou $W^{\eta}_{F^2}$ et de ce que le quotient $W/W_{d_0} \cong \mathbb{Z}/d_0\mathbb{Z}$ est abélien. En effet, deux représentations irréductibles de W qui contiennent une même représentation irréductible de W_{d_0} ne peuvent alors différer que d'une torsion par un caractère de $\mathbb{Z}/d_0\mathbb{Z}$. □

Nous pouvons maintenant traiter :

Le cas où il y a un niveau N :

Pour $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ un niveau non vide, les assertions (i) et (ii) de la proposition VI.15 sont des cas particuliers du résultat général suivant :

Proposition VI.17. – *Soient p un polygone de troncature assez convexe en fonction de X et N et $d \in \mathbb{Z}$ un degré.*

Soient $\mathcal{C}$ un champ algébrique représentable quasi-projectif sur $\mathcal{C}^{r,N}$ et $\mathfrak{X} \xrightarrow{p_{\mathfrak{X}}} (X - N) \times (X - N)$ le champ serein compactifiable sur $(X - N) \times (X - N)$ qui est défini comme produit fibré dans le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathcal{C}^{r,N} \end{array}$$

Alors pour tout complexe de faisceaux ℓ-adiques constructibles $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$ qui est supporté par le bord (l'image réciproque du bord $\mathcal{C}^{r,N} - \mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ de $\mathcal{C}^{r,N}$), les faisceaux ℓ-adiques lisses sur $(X - N) \times (X - N)$

$$R^i(p_{\mathfrak{X}})_! \mathrm{Res}^* \mathcal{F}$$

sont r-négligeables.

Démonstration : Quitte à prolonger $\mathcal{F}$ par 0, on peut supposer que $\mathcal{C}$ est représentable projectif sur $\mathcal{C}^{r,N}$ et même que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{r,N}$ puisque les foncteurs cohomologiques d'images directes par les morphismes propres commutent aux changements de base.

On se place donc sur $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} (X - N) \times (X - N)$.

Raisonnant par récurrence croissante sur la dimension du support, nous pouvons supposer le résultat déjà connu pour les faisceaux ℓ-adiques sur $\mathcal{C}^{r,N} - \mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ dont le support est de codimension $> c$ et nous devons le montrer pour les faisceaux ℓ-adiques constructibles $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}^{r,N} - \mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$ dont le support est de codimension $\geq c$.

D'après le lemme VI.16 et avec ses notations, il suffit de prouver que les $R^i(p_{\mathfrak{X}})_! \mathrm{Res}^* \mathcal{F}$ sont r-négligeables comme représentations de $W^{\eta}_{F^2_{d_0}}$ pour $d_0 \geq 1$ un entier assez grand.

On peut se limiter au cas où $\mathcal{F}$ est un faisceau lisse sur un sous-champ localement fermé $\mathcal{C}$ de codimension c de $\mathcal{C}^{r,N}$ qui est contenu dans une strate $\mathcal{C}^{r,N}_{\underline{r}}$ associée à une partition non triviale $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$ de l'entier r.

Comme on a vu au paragraphe 2b du chapitre III, la strate $\widetilde{\mathcal{C}}^{r,N}_{\underline{r}}$ qui contient $\mathcal{C}^{r,N}_{\underline{r}}$ comme ouvert est munie d'un morphisme

$$\widetilde{\mathcal{C}}^{r,N}_{\underline{r}} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N} = \overline{\mathcal{C}}^{r_1,N}_{\emptyset} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} {}^{r_2}\overline{\mathcal{C}}^{N}_{\emptyset} \times \cdots \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} {}^{r_k}\overline{\mathcal{C}}^{N}_{\emptyset} \,.$$

D'autre part, $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{\underline{r}}$ est une gerbe dont le groupe de structure est plat, fini et radiciel au-dessus de

$$\mathrm{Cht}^{\underline{r},d,\overline{p}\leq p} \subset \mathrm{Cht}^{\underline{r}} = \mathrm{Cht}^{r_1} \times_X {}^{r_2}\mathrm{Cht} \times \cdots \times_X {}^{r_k}\mathrm{Cht}$$

et on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}_{\underline{r}} & \xrightarrow{(2)} & \widetilde{\mathcal{C}}^{r,N}_{\underline{r}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle (3)} \\ \mathrm{Cht}^{\underline{r},d,\overline{p}\leq p} & \xrightarrow{(1)} & \overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N} \end{array}$$

Dans ce carré, le morphisme (1) est lisse de dimension $2r - k + 1$ (d'après le lemme II.1), (2) est lisse de dimension $2r$ (c'est la proposition III.5) et les groupes d'automorphismes des points de $\widetilde{\mathcal{C}}^{r,N}_{\underline{r}}$ au-dessus de leurs images dans $\overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N}$ sont géométriquement connexes de dimension $k-1$; il en résulte en particulier que tout point de $\overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N}$ n'a dans $\widetilde{\mathcal{C}}^{r,N}_{\underline{r}}$ (ou plutôt dans l'image ouverte de (2)) qu'un nombre fini d'antécédents. Quitte à remplacer $\mathcal{C}$ par un ouvert dense, on peut supposer que la projection de $\mathcal{C}$ sur son image par (3) est le composé d'un morphisme de gerbe dont le groupe de structure est plat à fibres géométriquement connexes, d'un morphisme fini, plat et radiciel et d'un morphisme fini étale. Puis, quitte à remplacer $\mathcal{F}$ par un faisceau lisse sur $\mathcal{C}$ dont il est facteur direct, on peut supposer aussi que $\mathcal{F}$ provient d'un faisceau lisse sur un sous-champ localement fermé de $\overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N}$.

Souvenons-nous encore qu'on a deux morphismes radiciels surjectifs

$$\mathrm{Cht}^{\underline{r},d,\overline{p}\le p}\longrightarrow \mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\le p_1}\times_X \mathrm{Cht}^{r_2,d_2,\overline{p}\le p_2}\times_{X,\mathrm{Frob}}\cdots\times_{X,\mathrm{Frob}}\mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\le p_k}$$

$$\overline{\mathcal{C}}^{\underline{r},N}\longrightarrow \overline{\mathcal{C}}^{r_1,N}_{\emptyset}\times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N}\overline{\mathcal{C}}^{r_2,N}_{\emptyset}\times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N,\mathrm{Frob}}\times\cdots\times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N,\mathrm{Frob}}\overline{\mathcal{C}}^{r_k,N}_{\emptyset}$$

au-dessus l'un de l'autre.

L'image de $\mathcal{C}^{r,N}_{\underline{r}}$ dans $\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N}_{\emptyset}$ [resp. $\overline{\mathcal{C}}^{r_k,N}_{\emptyset}$] est constituée de "chtoucas sur N" qui n'ont pas de pôle [resp. pas de zéro]. A isomorphisme près il n'y a qu'un nombre fini de tels chtoucas sur N et on peut supposer que les deux images du support $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ dans $\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N}_{\emptyset}$ et $\overline{\mathcal{C}}^{r_k,N}_{\emptyset}$ consistent en deux points localement fermés $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ définis sur l'extension $\mathbb{F}_{q_0}$ de $\mathbb{F}_q$ de degré d_0.

En tant que champs, $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ s'écrivent comme les quotients de $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_{q_0}$ par deux groupes d'automorphismes $\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_1$ et $\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_k$; ceux-ci ont une partie "continue" (la composante de l'unité) $(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{cont}}$ ou $(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_k)^{\mathrm{cont}}$ qui est géométriquement connexe et une partie "discrète" $(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{disc}} = \operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_1/(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{cont}}$ ou $(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_k)^{\mathrm{disc}} = \operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_k/(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_k)^{\mathrm{cont}}$ qui est un groupe fini. Les quotients de $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_{q_0}$ par $(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{cont}}$ et $(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_k)^{\mathrm{cont}}$ définissent deux revêtements finis étales galoisiens $\widetilde{\mathcal{B}}'_1$ et $\widetilde{\mathcal{B}}'_k$ de $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_k$; les faisceaux ℓ-adiques y sont triviaux au sens qu'ils proviennent de $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_{q_0}$.

On note $\alpha : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ le revêtement fini étale galoisien de $\mathcal{C}$ déduit de $\widetilde{\mathcal{B}}'_1\times\widetilde{\mathcal{B}}'_k \to \widetilde{\mathcal{B}}_1\times\widetilde{\mathcal{B}}_k$ par le changement de base $\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{B}}_1\times\widetilde{\mathcal{B}}_k$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est un facteur direct du faisceau ℓ-adique lisse sur $\mathcal{C}$

$$\mathcal{F}' = \alpha_*\alpha^*\mathcal{F}$$

et il suffit de montrer que les $R^\nu(p_{\mathfrak{X}})_!\operatorname{Res}^*\mathcal{F}'$ sont r-négligeables comme représentations de $W^{\eta}_{F^2_{d_0}}$.

L'intérêt d'avoir remplacé $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}'$ est que $\mathcal{F}'$ s'écrit comme le produit tensoriel externe des trois faisceaux ℓ-adiques suivants :

- le faisceau $\mathcal{F}_1$ sur $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ associé à la représentation régulière du groupe fini $(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{disc}}$,
- le faisceau $\mathcal{F}_k$ sur $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ associé à la représentation régulière du groupe fini $(\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{B}}_k)^{\mathrm{disc}}$,
- un faisceau ℓ-adique lisse $\mathcal{F}''$ sur un certain sous-champ localement fermé de
$$\overline{\mathcal{C}}^{r_2,N}_{\emptyset}\times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N,\mathrm{Frob}}\cdots\times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N,\mathrm{Frob}}\overline{\mathcal{C}}^{r_{k-1},N}_{\emptyset}\,.$$

Ceci permet d'appliquer la formule de Künneth comme dans le cas sans niveau. On calcule la cohomologie au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$ en deux temps, en calculant d'abord la cohomologie au-dessus de $(X-N)\times X\times X\times(X-N)$ (où les deux facteurs X du milieu sont le premier et le dernier dégénérateurs situés en rangs r_1 et $r-r_k$) et on se ramène à montrer :

- Si $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ a un zéro [resp. n'en a pas], les espaces de cohomologie H^ν_c de
$$\mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\le p_1}\times_{\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N}_{\emptyset}}\widetilde{\mathcal{B}}'_1$$

au-dessus du point générique de X [resp. de $X \times X$] sont r-négligeables comme représentations de $W^{\eta'}_{F_{d_0}}$ [resp. $W^{\eta}_{F^2_{d_0}}$].

- Si $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ a un pôle [resp. n'en a pas], les espaces de cohomologie H^ν_c de

$$\mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k} \times_{\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N}_{\emptyset}} \widetilde{\mathcal{B}}'_k$$

au-dessus du point générique de X [resp. de $X \times X$] sont r-négligeables comme représentations de $W^{\eta''}_{F_{d_0}}$ [resp. $W^{\eta}_{F^2_{d_0}}$].

Traitons par exemple le cas de $\widetilde{\mathcal{B}}_1$, celui de $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ étant semblable.

Si $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ n'a pas de zéro, Aut $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ est discret, $\mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1} \times_{\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N}_{\emptyset}} \widetilde{\mathcal{B}}'_1$ s'identifie à $\mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1}_N \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q_0}$ et la conclusion résulte de la proposition VI.15(iii) supposée déjà connue en rang $r_1 < r$.

Si au contraire $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ a un zéro 0 (qui est un point de N défini sur $\mathbb{F}_{q_0}$), introduisons le produit fibré

$$\mathfrak{X}^{d_1}_1 = \overline{\mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1}} \times_{X\times X} (X - N) \times 0 \,.$$

C'est un champ serein et propre sur $X - N$ et d'après la proposition III.5, le morphisme produit

$$(p_{\mathfrak{X}^{d_1}_1}, \mathrm{Res}_1) : \mathfrak{X}^{d_1}_1 \longrightarrow (X - N) \times \left(\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}^N_m} 0\right)$$

est lisse. D'après le théorème A.9(i), pour tout complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{F}_1$ sur le champ $\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}^N_m} 0$, tous les faisceaux de cohomologie ℓ-adique $R^\nu (p_{\mathfrak{X}^{d_1}_1})_! \,\mathrm{Res}^*_1\, \mathcal{F}_1$ sont lisses sur $X - N$.

Il suffit de montrer :

Lemme VI.18. – *Pour tout rang $r_1 < r$, tout polygone de troncature p_1 (assez convexe en fonction de X et N), tout degré d_1 et tout complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{F}_1$ sur $\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}^N_m} 0$, les faisceaux de cohomologie*

$$R^\nu (p_{\mathfrak{X}^{d_1}_1})_! \,\mathrm{Res}^*_1\, \mathcal{F}_1$$

sont r-négligeables comme représentations de $W^{\eta'}_{F_{d_0}}$.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur le rang r_1 et sur la dimension du support de $\mathcal{F}_1$. Supposons donc le résultat déjà connu en les rangs $< r_1$ et, en rang r_1, pour les complexes $\mathcal{F}_1$ dont le support est de codimension $> c$.

Il s'agit de prouver le lemme pour un faisceau ℓ-adique $\mathcal{F}_1$ lisse sur un sous-champ localement fermé $\mathcal{C}$ de codimension c de $\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}^N_m} 0$. On peut supposer que $\mathcal{C}$ est contenu dans une seule strate associée à une partition $\underline{r}_1$ de l'entier r_1.

Si $\underline{r}_1$ est non triviale, on raisonne comme nous avons fait pour nous ramener à l'énoncé du lemme VI.18 et on conclut d'après d'hypothèse de récurrence.

Sinon, on peut supposer que $\mathcal{F}_1$ est supporté par un unique point localement fermé $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ de $\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{r_1,N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} 0$ et même que c'est le faisceau ℓ-adique (pur de poids 0) associé à la représentation régulière du groupe fini $(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{disc}} = \mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{B}}_1/(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{cont}}$.

Le résultat étant déjà connu quand la codimension du support est $> c$, il est équivalent de montrer que si $\mathcal{F}_1'$ désigne le faisceau pervers qui est le prolongement intermédiaire de $\mathcal{F}_1$ sur l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ dans $\overline{\mathcal{C}}_{\emptyset}^{r_1,N} \times_{\mathbb{A}^N/\mathbb{G}_m^N} 0$, les $R^\nu(p_{\mathfrak{X}_1^{d_1}})_!\ \mathrm{Res}_1^*\ \mathcal{F}_1'$ sont r-négligeables. D'après le théorème A.9(ii) ceux-ci sont purs de poids ν et il en est de même des faisceaux de cohomologie

$$R^\nu(p_{\mathfrak{X}_1})_!\ \mathrm{Res}_1^*\ \mathcal{F}_1' = \bigoplus_{1\le d_1\le r_1|\deg(a)|} R^\nu(p_{\mathfrak{X}_1^{d_1}})_!\ \mathrm{Res}_1^*\ \mathcal{F}_1'$$

à coefficients dans $\mathcal{F}_1'$ de $\mathfrak{X}_1 = \coprod_{d_1\in\mathbb{Z}} \mathfrak{X}_1^{d_1}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\le d_1\le r_1|\deg(a)|} \mathfrak{X}_1^{d_1}$. Dans la somme alternée

$$H_c^*\big(\mathfrak{X}_1, \mathcal{F}_1'\big) = \sum_\nu (-1)^\nu \big[R^\nu(p_{\mathfrak{X}_1})_!\ \mathrm{Res}_1^*\ \mathcal{F}_1'\big]^{ss},$$

il ne peut y avoir de simplification et il suffit de montrer que $H_c^*(\mathfrak{X}_1, \mathcal{F}_1')$ est r-négligeable en tant que représentation virtuelle de $W_{F_{d_0}}^{\eta'}$.

Toujours d'après l'hypothèse de récurrence, c'est équivalent à prouver que

$$H_c^*(\mathfrak{X}_1, \mathcal{F}_1) = \sum_\nu (-1)^\nu \big[R^\nu(p_{\mathfrak{X}_1})_!\ \mathrm{Res}^*\ \mathcal{F}_1\big]^{ss}$$

est r-négligeable. Or, avec les notations qui suivent la proposition II.4, la cohomologie sur $X - N$ à coefficients dans $\mathcal{F}_1$ de $\mathfrak{X}_1$ s'identifie à la cohomologie sur $X - N$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ de

$$\mathrm{Cht}_{N,\widetilde{\mathcal{B}}_1}^{r_1,\overline{p}\le p_1}/a^{\mathbb{Z}}.$$

En effet, si $\widetilde{\mathcal{B}}_1'$ est le revêtement fini étale galoisien de groupe $(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{disc}}$ de $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ que définit $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_{q_0}/(\mathrm{Aut}\,\widetilde{\mathcal{B}}_1)^{\mathrm{cont}}$, on a pour tout degré d_1

$$\mathfrak{X}_1^{d_1} \times_{\overline{\mathcal{C}}^{r_1,N}} \widetilde{\mathcal{B}}_1' = \mathrm{Cht}_{N,\widetilde{\mathcal{B}}_1}^{r_1,d_1,\overline{p}\le p_1}.$$

D'après la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz et le théorème II.15, il existe des constantes c_ι, des entiers $m_\iota \ge 0$, des scalaires λ_ι et des représentations automorphes cuspidales π^ι de rangs $r_\iota \le r_1 < r$ non ramifiées sur $X - N$ telles qu'on ait la formule suivante :

Pour toute place $\infty \in |X - N|$ (en dehors d'un nombre fini) et pour tout multiple assez grand $s = \deg(\infty)s'$ de $\deg(\infty)$ et d_0 (choisi suffisamment divisible),

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Frob}_\infty^{-s'}, H_c^*\left(\mathrm{Cht}_{N,\widetilde{\mathcal{B}}_1}^{r_1,\overline{p}\leq p_1}/a^{\mathbb{Z}}\right)\right)\\ &= \sum_\iota c_\iota s^{m_\iota}\lambda_\iota^s\left(z_1\left(\pi_\infty^\iota\right)^{-s'}+\cdots+z_{\pi_\iota}\left(\pi_\infty^\iota\right)^{-s'}\right).\end{aligned}$$

Dans cette expression, les termes tels que $m_\iota > 0$ doivent se simplifier mutuellement et on peut supposer que tous les m_ι valent 0.

D'après l'hypothèse de récurrence, chaque représentation automorphe cuspidale π^ι tordue par λ^ι correspond au sens de Langlands à une représentation ℓ-adique σ_ι de $W_F^{\eta'}$ irréductible de rang $r_\iota \leq r_1 < r$. Les deux représentations virtuelles de $W_F^{\eta'}$

$$H_c^*\left(\mathrm{Cht}_{N,\widetilde{\mathcal{B}}_1}^{r_1,\overline{p}\leq p_1}/a^{\mathbb{Z}}\right) \quad \text{et} \quad \sum_\iota c_\iota\sigma_\iota$$

coïncident quand on les restreint au sous-groupe $W_{F_{d_0}}^{\eta'}$. Cela conclut le raisonnement. □

Remarque : Pour démontrer que la cohomologie à supports compacts des strates de bord ouvertes ou fermées des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ est r-négligeable, on peut procéder comme dans le cas sans niveau et se ramener à dire que, d'après la proposition VI.15(iii) déjà connue en rang r et la formule de Künneth, la cohomologie à supports compacts au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$ des

$$\mathrm{Cht}_N^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1}\times_{X-N}\mathrm{Cht}_N^{r_2,d_2,\overline{p}\leq p_2}\times_{X-N,\mathrm{Frob}}\cdots\times_{X-N,\mathrm{Frob}}\mathrm{Cht}_N^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k}$$

est r-négligeable.

Cependant, on a aussi besoin d'arguments de pureté et pour cela de vérifier que la différence entre les $H_c^\nu(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ et les $IH_c^\nu(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$ est r-négligeable. C'est pourquoi la proposition VI.17 dans toute sa généralité est nécessaire à notre démonstration de la correspondance de Langlands et il en est de même du contenu du chapitre II qui intervient dans la preuve de cette proposition via le lemme VI.18.

d) Séparation de la cohomologie essentielle

On rappelle qu'on a fixé un entier $r\geq 2$ et un niveau $N=\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_N\hookrightarrow X$ et qu'on a noté

$$\{\pi\}_N^r=\left\{\pi\in\mathcal{A}^r(F)\mid \chi_\pi(a)=1\ \wedge\ \pi\cdot 1\!\!1_N\neq 0\right\}.$$

Notre but est d'identifier la partie essentielle de $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$. On commence par :

Lemme VI.19. – *Pour tout polygone de troncature $p:[0,r]\to\mathbb{R}_+$ (assez convexe en fonction de X et N), il existe une combinaison linéaire formelle $H_{N,\mathrm{ess}}^*$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de faisceaux ℓ-adiques lisses irréductibles dans*

$\mathcal{G}_\ell((X-N)\times(X-N))$ éventuellement tordus par des caractères de $\mathbb{Z}$, telle que :

(i) *La différence formelle*

$$H^*_{N,\mathrm{ess}} - \frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}\big(\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X\big)^* H_c^*\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}\big),$$

vue comme représentation virtuelle de $W^{\eta}_{F^2}$, est r-négligeable complète.

(ii) *Pour tout point fermé x de $X\times X$ au-dessus de deux points fermés distincts $\infty, 0 \in |X-N|$, et notant* Frob_x *l'élément de Frobenius en x dans $W((X-N)\times(X-N),\eta)$, on a pour tout multiple $s=$ $\deg(\infty)s' =$ $\deg(0)u'$ de $\deg(x) =$ ppcm$(\deg(0),\deg(\infty))$*

$$\mathrm{Tr}_{H^*_{N,\mathrm{ess}}}\big(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\big) = q^{(r-1)s}\sum_{\pi\in\{\pi\}_N^r}\mathrm{Tr}_\pi(\mathbb{1}_N)$$

$$\big(z_1(\pi_\infty)^{-s'}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi_0)^{u'}+\cdots+z_r(\pi_0)^{u'}\big).$$

Remarque : D'après la proposition VI.15(i) déjà démontrée en rang r, la différence $H_c^*(\overline{\mathrm{Cht}}^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}) - H_c^*(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$ (si $N=\emptyset$), $IH_{\underset{\sim}{c}}^*(\overline{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}) - H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$ (si $N\neq\emptyset$) ou éventuellement $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}) - H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$ est r-négligeable.

Dans l'énoncé du lemme, on peut donc remplacer dans (i) le terme $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$ par $\underset{\sim}{H_c^*}(\overline{\mathrm{Cht}}^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$ (si $N=\emptyset$), $IH_c^*(\overline{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$ ou éventuellement $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$.

Démonstration : D'après la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz pour les puissances de Frob et le théorème I.13 appliqué à $f=\mathbb{1}_N$ et $t=0$, on a pour tout point $x\mapsto(\infty,0)$ et tout multiple $s=\deg(\infty)s'=\deg(0)u'$ comme dans l'énoncé

$$\mathrm{Tr}_{\frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}\left(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X\right)^* H_c^*\left(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}\right)}\big(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\big)$$

$$= q^{(r-1)s}\sum_{\pi\in\{\pi\}_N^r}\mathrm{Tr}_\pi(\mathbb{1}_N)\big(z_1(\pi_\infty)^{-s'}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi_0)^{u'}+\cdots+z_r(\pi_0)^{u'}\big)$$

$$+\sum_\iota c_\iota s^{m_\iota}\lambda_\iota^s\big(z_1(\pi'^\iota_\infty)^{-s'}+\cdots+z_{r'_\iota}(\pi'^\iota_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi^\iota_0)^{u'}+\cdots+z_{r_\iota}(\pi^\iota_0)^{u'}\big)$$

où les c_ι sont des constantes, les m_ι des entiers ≥ 0, les λ_ι des scalaires non nuls et les π^ι et π'^ι des représentations automorphes cuspidales en rangs r_ι et $r'_\iota < r$.

Les termes indexés par les ι tels que $m_\iota > 0$ doivent se simplifier mutuellement et on peut supposer que tous les m_ι valent 0. De même, on peut supposer que tous les c_ι sont dans $\mathbb{Q}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, les π'^{ι} et π^{ι} correspondent au sens de Langlands à des faisceaux ℓ-adiques irréductibles de rangs r'_{ι} et r_{ι} dans $\mathcal{G}_{\ell}(X-N)$ et les termes

$$\lambda_{\iota}^{s}\big(z_1\big(\pi'^{\iota}_{\infty}\big)^{-s'}+\cdots+z_{r'_{\iota}}\big(\pi'^{\iota}_{\infty}\big)^{-s'}\big)\big(z_1\big(\pi_0^{\iota}\big)^{u'}+\cdots+z_{r_{\iota}}\big(\pi_0^{\iota}\big)^{u'}\big)$$

se récrivent sous la forme

$$\mathrm{Tr}_{\sigma_{\iota}}\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)$$

où les σ_{ι} sont des faisceaux ℓ-adiques lisses dans $\mathcal{G}_{\ell}((X-N)\times(X-N))$, éventuellement tordus par des caractères de $\mathbb{Z}$ et qui sont r-négligeables complets.

Alors la différence formelle

$$H^*_{N,\mathrm{ess}}=\frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}\left(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X\right)^*H_c^*\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}\big)-\sum_{\iota}c_{\iota}\cdot\sigma_{\iota}$$

répond à la question posée. □

On remarque que d'après la partie (ii) du lemme, $H^*_{N,\mathrm{ess}}$ ne dépend pas du polygone de troncature p. Montrons que c'est la partie essentielle des faisceaux ℓ-adiques virtuels $\frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X)^*H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$:

Proposition VI.20. –

(i) *Aucune des composantes irréductibles de $H^*_{N,\mathrm{ess}}$ n'est r-négligeable. Toutes apparaissent avec des multiplicités positives et sont des faisceaux ℓ-adiques lisses dans $\mathcal{G}_{\ell}((X-N)\times(X-N))$ purs de poids* $2r-2$.

(ii) *Pour p un polygone (assez convexe en fonction de X et N), les $H_c^{\nu}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})$, $\nu\neq 2r-2$, sont r-négligeables de même que la différence formelle*

$$\frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}\left(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X\right)^*H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}\big)^{ss}-H^*_{N,\mathrm{ess}}\,.$$

Remarque : D'après le lemme VI.19(ii), il est équivalent de dire que $H^*_{N,\mathrm{ess}}$ est pur de poids $2r-2$ ou que les représentations $\pi\in\{\pi\}_N^r$ vérifient la conjecture de Ramanujan-Petersson en toutes les places en dehors de N.

Démonstration de la proposition :

(ii) Pour tout ν, notons $H^{\nu}=H_c^{\nu}(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})^{ss}$ si $N=\emptyset$ et $H^{\nu}=IH_c^{\nu}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})^{ss}$ (ou éventuellement $H^{\nu}=H_c^{\nu}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}})^{ss}$) si $N\neq\emptyset$.

Dans tous les cas, les H^ν sont purs de poids ν si bien qu'il ne peut y avoir de simplification dans la somme

$$\sum_{n=1}^{r!} \sum_{\nu=0}^{2(2r-2)} (-1)^\nu \left(\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X\right)^* H^\nu .$$

Donc (ii) est impliqué par (i), le lemme VI.19 et la proposition VI.15(i) déjà démontrée en rang r.

(i) Notons $H = H^*_{N,\mathrm{ess}}(r-1)$.

On voit sur la formule du lemme VI.19(ii) que $H^*_{N,\mathrm{ess}}$ ou H est invariante par l'action de $\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X$. Il en est de même de sa partie r-négligeable qui donc est complète.

D'après l'hypothèse de récurrence, toutes les représentations ℓ-adiques r-négligeables et irréductibles sont pures. Donc toutes les composantes de H sont pures d'un certain poids. Il résulte de la proposition B.2 de Jacquet et Shalika que l'ensemble des poids de H est contenu dans l'intervalle $]-2,2[$ et d'autre part il est symétrique par rapport à 0.

Considérons σ', σ'' deux faisceaux dans $\mathcal{G}_\ell(X-N)$ irréductibles de rangs $r', r'' < r$ et purs de poids 0. D'après l'hypothèse de récurrence, il leur correspond au sens de Langlands deux représentations automorphes cuspidales unitaires π', π'' en rangs r', r'' qui sont non ramifiées en dehors de N.

Le théorème B.10 entraîne que pour toute $\pi \in \{\pi\}_N^r$ les séries dérivées logarithmiques des fonctions L

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\pi\times\check{\pi}',Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\pi\times\check{\pi}',Z)} &= \sum_{\infty\in|X-N|}\deg(\infty)\sum_{k\geq 1}\left(z_1(\pi_\infty)^{-k}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-k}\right)\\ &\qquad \left(z_1\left(\pi'_\infty\right)^k+\cdots+z_{r'}\left(\pi'_\infty\right)^k\right)Z^{k\deg(\infty)-1}\\ &= \sum_{s\geq 1} Z^{s-1}\sum_{\substack{\infty\in|X-N|\\ \frac{s}{\deg(\infty)}=s'\in\mathbb{N}}}\deg(\infty)\left(z_1\left(\pi_\infty\right)^{-s'}+\cdots+z_r\left(\pi_\infty\right)^{-s'}\right)\\ &\qquad \left(z_1\left(\pi'_\infty\right)^{s'}+\cdots+z_r\left(\pi'_\infty\right)^{s'}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\check{\pi}\times\check{\pi}'',Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\check{\pi}\times\check{\pi}'',Z)} &= \sum_{0\in|X-N|}\deg(0)\sum_{k\geq 1}\left(z_1(\pi_0)^{k}+\cdots+z_r(\pi_0)^{k}\right)\\ &\qquad \left(z_1\left(\pi''_0\right)^k+\cdots+z_{r}\left(\pi''_0\right)^k\right)Z^{k\deg(0)-1}\\ &= \sum_{s\geq 1} Z^{s-1}\sum_{\substack{0\in|X-N|\\ \frac{s}{\deg(0)}=u'\in\mathbb{N}}}\deg(0)\left(z_1\left(\pi_0\right)^{u'}+\cdots+z_r\left(\pi_0\right)^{u'}\right)\\ &\qquad \left(z_1\left(\pi''_0\right)^{u'}+\cdots+z_{r''}\left(\pi''_0\right)^{u'}\right)\end{aligned}$$

sont absolument convergentes dans une zone $|Z| < q^{-1+\varepsilon}$ (pour $\varepsilon > 0$ un réel assez petit).

Par conséquent, la série “produit”

$$= \sum_{s\geq 1} Z^{s-1} \sum_{\substack{\infty,0\in|X-N| \\ \frac{s}{\deg(\infty)}=s'\in\mathbb{N},\, \frac{s}{\deg(0)}=u'\in\mathbb{N}}} \deg(\infty)\deg(0)\big(z_1(\pi_\infty)^{-s'}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)$$

$$\big(z_1(\pi_0)^{u'}+\cdots+z_r(\pi_0)^{u'}\big)\big(z_1\big(\pi'_\infty\big)^{s'}+\cdots+z_{r'}\big(\pi'_\infty\big)^{s'}\big)\big(z_1\big(\pi''_0\big)^{u'}+\cdots+z_{r''}\big(\pi''_0\big)^{u'}\big)$$

est absolument convergente dans la zone $|Z| < q^{-2+2\varepsilon}$.

D’autre part et bien que les composantes de H apparaissent a priori avec des coefficients dans $\mathbb{Q}$, on peut définir la dérivée logarithmique

$$\frac{\mathrm{L}'_{(X-N)\times(X-N)}\big(H\otimes\big(q_\infty^*\check{\sigma}'\otimes q_0^*\check{\sigma}''\big),Z\big)}{\mathrm{L}_{(X-N)\times(X-N)}\big(H\otimes\big(q_\infty^*\check{\sigma}'\otimes q_0^*\check{\sigma}''\big),Z\big)}$$

comme série formelle en Z. Comme σ' et σ'' correspondent au sens de Langlands à π' et π'' et d’après le lemme VI.19(ii), cette série ne peut différer de la somme sur les $\pi\in\{\pi\}_N^r$ des séries “produits” ci-dessus que par les termes indexés par les $\infty, 0\in|X-N|$ tels que $\infty=0$. Si $\varepsilon>0$ a été choisi assez petit pour que $2(1-2\varepsilon)$ majore tous les poids de H, cette différence est bornée à une constante multiplicative près par

$$\sum_{s\geq 1}|Z|^{s-1}\sum_{\substack{\infty\in|X-N|\\ \deg(\infty)|s}}\deg(\infty)^2 q^{(1-2\varepsilon)s}$$

qui converge pour $|Z| < q^{-2+2\varepsilon}$.

Récapitulant, on a prouvé que la série

$$\frac{\mathrm{L}'_{(X-N)\times(X-N)}\big(H\otimes\big(q_\infty^*\check{\sigma}'\otimes q_0^*\check{\sigma}''\big),Z\big)}{\mathrm{L}_{(X-N)\times(X-N)}\big(H\otimes\big(q_\infty^*\check{\sigma}'\otimes q_0^*\check{\sigma}''\big),Z\big)}$$

converge absolument pour $|Z| < q^{-2+2\varepsilon}$.

Comme on a pu prendre σ' et σ'' arbitraires (et que H est invariante par $(\mathrm{Frob}_X\times\mathrm{Id}_X)^*$), on conclut d’après le corollaire VI.3 que parmi les composantes de poids maximal (nécessairement compris dans $[0,2[$) de H, aucune n’est r-négligeable. Modulo la torsion par $r-1$, elles proviennent donc toutes des $(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X)^*H^{2r-1}$ ou des $(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X)^*H^{2r-2}$; le premier cas est impossible car il ferait apparaître des coefficients -1. Donc le poids maximal de H est 0, par symétrie H est pur de poids 0, il n’a pas de composante r-négligeable et provient entièrement des $(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X)^*H^{2r-2}$ ou, ce qui est équivalent, des $(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X)^*H^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})^{ss}$. $\square$

e) Effet r-négligeable des troncatures

Si N est un niveau non vide, on a noté $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'$ l'ouvert lisse de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$ défini en demandant que les dégénérateurs évitent N. Si $N = \emptyset$, on notera simplement $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}' = \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$.

D'après la proposition VI.20(ii) et la proposition VI.15(ii) déjà démontrée en rang r, nous savons qu'en tout degré $\nu \neq 2r-2$, tous les $H_c^\nu(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ et $H_c^\nu(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ sont r-négligeables. En le degré médiant $\nu = 2r-2$ où se concentre la cohomologie essentielle, nous pouvons préciser :

Corollaire VI.21. – (i) *Pour tout polygone de troncature p (assez convexe en fonction de X et N), le noyau et le conoyau de l'homomorphisme*

$$H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}\big) \to H_c^{2r-2}\big(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}\big)$$

induits par l'immersion ouverte

$$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$$

sont r-négligeables.

(ii) *Pour tous polygones de troncature $p \leq q$ (assez convexes en fonction de X et N), le noyau et le conoyau de l'homomorphisme*

$$H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}\big) \to H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}/a^{\mathbb{Z}}\big)$$

induits par l'inclusion

$$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}/a^{\mathbb{Z}}$$

sont r-négligeables.

Démonstration : (i) résulte de ce que ce noyau et ce conoyau se plongent dans la cohomologie du bord $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}} - \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ laquelle est r-négligeable.

(ii) D'après le théorème V.14(i), la normalisation du graphe de l'inclusion de $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}/a^{\mathbb{Z}}$ définit une correspondance de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}}'/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$ et donc un homomorphisme

$$H_c^{2r-2}\big(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}}'/a^{\mathbb{Z}}\big) \to H_c^{2r-2}\big(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}\big)$$

qui, d'après le lemme A.7, fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}/a^{\mathbb{Z}}\big) & \longrightarrow & H_c^{2r-2}\big(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}}'/a^{\mathbb{Z}}\big) \\
\uparrow & & \downarrow \\
H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}\big) & \longrightarrow & H_c^{2r-2}\big(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}\big)
\end{array}$$

De ceci et de (i) on déduit que le noyau de $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}) \to H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}/a^{\mathbb{Z}})$ est r-négligeable. Il en est de même de son conoyau car d'après la proposition VI.20, les parties essentielles de $\bigoplus_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X)^*$ $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})^{ss}$ et $\bigoplus_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X)^*$ $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}/a^{\mathbb{Z}})^{ss}$ sont égales. □

Remarque : Bien sûr, quand $\mathcal{C}_N^r$ admet une résolution des singularités $\widetilde{\mathcal{C}}_N^r$ (par exemple si N n'a pas de multiplicités ou si $r = 2$), on peut remplacer partout dans l'énoncé du corollaire et sa démonstration les $H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ et $H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}}'/a^{\mathbb{Z}})$ par $H_c^{2r-2}(\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ et $H_c^{2r-2}(\widetilde{\mathrm{Cht}}_N^{r,\overline{p}\leq q}/a^{\mathbb{Z}})$. Alors on n'utilise pas le théorème V.14(i).

3) Scindage au moyen des correspondances de Hecke

Dans ce paragraphe qui termine la démonstration, nous décomposons la cohomologie essentielle de $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ en faisant agir les correspondances de Hecke (et les endomorphismes de Frobenius partiels).

a) Action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_N^r$ *et de* Frob_∞ *et* Frob_0

Jusqu'à présent, $H_{N,\mathrm{ess}}^*$ a été pour nous la partie essentielle des $\frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}_X^n \times \mathrm{Id}_X)^* H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})^{ss}$ et en tant que telle, elle n'a pas reçu d'autre structure que celle de représentation virtuelle (à coefficients rationnels positifs dont le dénominateur divise $r!$) de $W((X-N)\times(X-N),\eta)$.

Mais on sait d'autre part que les correspondances de Hecke définissent un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ dans l'algèbre des correspondances finies étales sur $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ (au-dessus du point générique Spec F^2 de $X \times X$) et que Cht_N^r est aussi muni des deux endomorphismes de Frobenius partiels Frob_∞ et Frob_0 au-dessus de $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ qui vérifient $\mathrm{Frob}_\infty \circ \mathrm{Frob}_0 = \mathrm{Frob}_0 \circ \mathrm{Frob}_\infty = \mathrm{Frob}$ et commutent avec les correspondances de Hecke. Pour $p, q : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ des polygones de troncature convexes, une correspondance $f \times \mathrm{Frob}_\infty^s \times \mathrm{Frob}_0^u$ associée à une fonction $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ et à des entiers $s, u \in \mathbb{N}$ envoie $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq q}/a^{\mathbb{Z}}$ dès que $q - p$ est assez grand en fonction du support de f et de $t = u - s$.

Par conséquent, la limite inductive

$$H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}\big) = \varinjlim_p H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}\big)$$

est munie d'une action du groupe $\mathbb{Z}W^{\eta}_{F^2}$ et d'une action de l'algèbre $\mathcal{H}^r_N/a^{\mathbb{Z}}$ qui commutent.

Nous définissons maintenant dans $H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ une filtration croissante $(F^i H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}))_{i\geq 0}$ par des sous-espaces stables par les actions de $\mathbb{Z}W^{\eta}_{F^2}$ et de $\mathcal{H}^r_N/a^{\mathbb{Z}}$.

On part de $F^0 H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}) = 0$.

Puis, supposant $F^{2i} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ déjà construit, on définit $F^{2i+1} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ et $F^{2i+2} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ de la manière suivante :

On prend pour quotient $F^{2i+1} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})/F^{2i} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ la somme de toutes les sous-représentations de dimension finie de $W^{\eta}_{F^2}$ dans $H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})/F^{2i} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ qui sont r-négligeables. Clairement, $F^{2i+1} H^{2r-2}_c \mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ est stable sous les actions de $\mathcal{H}^r_N/a^{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$.

Puis on considère le quotient $H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})/F^{2i+1} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ dans lequel on définit $F^{2i+2} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})/F^{2i+1} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ comme la somme de toutes les sous-représentations de dimension finie de $W^{\eta}_{F^2}$ qui sont essentielles ; elle est stable sous les actions de $\mathcal{H}^r_N/a^{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$.

Pour tout polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$, on note $(F^i H^{2r-2}_c (\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}_N/a^{\mathbb{Z}}))_{i\geq 0}$ la filtration de $H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}_N/a^{\mathbb{Z}})$ image réciproque de $(F^i H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}))_{i\geq 0}$ par l'homomorphisme $H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}_N/a^{\mathbb{Z}}) \to H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$.

On a :

Lemme VI.22. – (i) *Pour tout polygone de troncature p (assez convexe en fonction de X et N) et pour tout entier $i \geq 0$, le plongement*

$$F^{2i+2} H^{2r-2}_c\big(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}_N/a^{\mathbb{Z}}\big)/F^{2i+1} H^{2r-2}_c\big(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}_N/a^{\mathbb{Z}}\big) \hookrightarrow F^{2i+2} H^{2r-2}_c\big(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}\big)/F^{2i+1} H^{2r-2}_c\big(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}\big)$$

est un isomorphisme.

(ii) *Les $F^i H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ sont égaux à $H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ dès que i est assez grand.*

Démonstration : (i) résulte du corollaire VI.21(ii).

(ii) D'après (i) et comme $H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}_N/a^{\mathbb{Z}})$ est de dimension finie, on a $F^{2i+2} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}}) = F^{2i+1} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ dès que i est assez grand.

Mais d'autre part, si $H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})/F^{2i+1} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ n'est pas nul, il contient une sous-représentation de dimension finie de $W^{\eta}_{F^2}$ qu'on peut supposer irréductible ; d'après la façon dont $F^{2i+1} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ a été défini, elle est nécessairement essentielle et $F^{2i+2} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$ est strictement plus grand que $F^{2i+1} H^{2r-2}_c(\mathrm{Cht}^r_N/a^{\mathbb{Z}})$. D'où le résultat. □

La somme

$$\bigoplus_{i\geq 0} F^{2i+2} H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}\big)/F^{2i+1} H_c^{2r-2}\big(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}\big)$$

est une représentation de $\mathbb{Z}W_{F^2}^{\eta} \times \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$; sa semi-simplifiée comme représentation de $W_{F^2}^{\eta}$ est invariante par $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et elle est égale à $H_{N,\mathrm{ess}}^*$ (dont on voit maintenant que les coefficients sont des entiers positifs). On notera $H_{N,\mathrm{ess}}$ sa semi-simplifiée comme représentation de $\mathbb{Z}W_{F^2}^{\eta} \times \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$. Elle est automatiquement semi-simple comme représentation de $W_{F^2}^{\eta}$ et s'identifie à $H_{N,\mathrm{ess}}^*$ donc l'action de $\mathbb{Z}W_{F^2}^{\eta}$ sur $H_{N,\mathrm{ess}}$ se factorise à travers $\mathbb{Z}W((X-N)\times(X-N),\eta)$.

b) Lien avec les correspondances tronquées et stabilisées

Nous allons déterminer $H_{N,\mathrm{ess}}$ en tant que représentation semi-simple de $W((X-N)\times(X-N),\eta)\times \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ en calculant ses traces. Pour cela, il faut faire le lien avec les formules pour les nombres de points fixes dans les ouverts tronqués $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ et ce lien s'établit à travers l'action des correspondances de Hecke induites dans les ouverts lisses et stables $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'$ des compactifiés $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ ou dans les compactifications lisses $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ quand elles existent.

Fixons en effet une fonction $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$.

Comme on a vu dans le paragraphe 2a du chapitre V, elle définit par normalisation une correspondance encore notée f dans les $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ ou éventuellement les $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$. D'après le théorème V.14(ii), cette correspondance stabilise les ouverts lisses $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$.

Selon la proposition A.6 ou le paragraphe 2 de l'appendice A, il est associé à une telle correspondance géométrique une correspondance cohomologique ou une classe de cohomologie ℓ-adique et donc une famille d'endomorphismes des espaces $H_c^{\nu}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ ou $H_c^{\nu}(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$, $0\leq \nu\leq 2(2r-2)$, de cohomologie ℓ-adique à supports compacts des $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ ou des $\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus du point générique $\mathrm{Spec}\, F^2$ de $X\times X$.

Lemme VI.23. – *Ayant fixé une fonction $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$, considérons un polygone de troncature $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$, assez convexe en fonction de X et N. Alors :*

(i) *Si σ décrit l'ensemble fini $\{\sigma\}$ des objets irréductibles de $\mathcal{G}_\ell((X-N)\times(X-N))$ qui figurent comme composantes des $H_c^{\nu} = H_c^{\nu}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$*

ou $H_c^\nu(\widetilde{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$*, il existe une unique famille de scalaires* c_σ *telle que pour tout* $\gamma \in W((X-N)\times(X-N),\eta)$*, on ait*

$$\sum_\nu (-1)^\nu \operatorname{Tr}_{H_c^\nu}(f\times\gamma) = \sum_{\sigma\in\{\sigma\}} c_\sigma \operatorname{Tr}_\sigma(\gamma).$$

(ii) *Si* $(F_\nu^\bullet)$ *est une filtration des* H_c^ν *respectée par l'action de* f *et* $(H_c'^\nu)$ *est une somme de gradués de* $(F_\nu^\bullet)$ *dont l'ensemble* $\{\sigma\}'$ *des composantes irréductibles est disjoint de celui des autres gradués, on a*

$$\sum_\nu (-1)^\nu \operatorname{Tr}_{H_c'^\nu}(f\times\gamma) = \sum_{\sigma\in\{\sigma\}'} c_\sigma \operatorname{Tr}_\sigma(\gamma)$$

pour tout élément $\gamma \in W((X-N)\times(X-N),\eta)$.

Remarque : Bien sûr, on voudra appliquer ce lemme en prenant pour $\{\sigma\}'$ le sous-ensemble de $\{\sigma\}$ constitué des représentations irréductibles essentielles. Comme d'après le précédent paragraphe $H^*_{N,\mathrm{ess}}$ est la partie essentielle des $H_c^\nu(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ ou des $H_c^\nu(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$ et qu'il est concentré en degré $\nu = 2r-2$, on notera dans ce cas

$$\operatorname{Tr}^{\leq p}_{H^*_{N,\mathrm{ess}}}(f\times\gamma) = \sum_{\sigma\in\{\sigma\}'} c_\sigma \operatorname{Tr}_\sigma(\gamma).$$

Démonstration du lemme : (i) L'unicité provient de ce que les caractères $\gamma \mapsto \operatorname{Tr}_\sigma(\gamma), \sigma\in\{\sigma\}$, sont linéairement indépendants. Et l'existence d'une telle relation résulte de ce que l'action de f commute avec celle du groupe $W((X-N)\times(X-N),\eta)$.

(ii) est conséquence évidente de (i). □

Avec la notation de la remarque qui suit l'énoncé du lemme ci-dessus, montrons :

Proposition VI.24. – *Ayant fixé* $f \in \mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ *et si* p *est un polygone de troncature (assez convexe en fonction de* X *et* N*), on a pour tout élément* $\gamma \in W((X-N)\times(X-N),\eta)$

$$\operatorname{Tr}_{H_{N,\mathrm{ess}}}(f\times\gamma) = \operatorname{Tr}^{\leq p}_{H^*_{N,\mathrm{ess}}}(f\times\gamma).$$

Démonstration : Montrons-le par exemple dans le cas où les $\operatorname{Tr}^{\leq p}_{H^*_{N,\mathrm{ess}}}(f\times\gamma)$ sont définis à partir de l'action de f sur les $H_c^\nu(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$, le cas des $H_c^\nu(\widetilde{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$ quand ils existent étant semblable.

Etant donnés deux autres polygones de troncature (assez convexes en fonction de X et N) p' et p'' vérifiant $p \le p' \le p''$, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p''}/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[rr] & & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p''}}'/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[dd] \\
H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p'}/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[u] \arrow[r] & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p'}}'/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[dr] & \\
H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[u] \arrow[rr] & & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif d'après le lemme A.7.

Comme $H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ est de dimension finie, on voit que si p' est assez grand alors pour tout $p'' \ge p'$ les images de $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p'}/a^{\mathbb{Z}})$ et $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p''}/a^{\mathbb{Z}})$ dans $H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})$ sont égales et même les filtrations induites sur cette image par $(F^i H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p'}/a^{\mathbb{Z}}))_{i\ge 0}$ et $(F^i H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p''}/a^{\mathbb{Z}}))_{i\ge 0}$ se confondent.

Fixons p' vérifiant cette propriété.

Puis choisissons $p'' \ge p'$ de façon que la correspondance finie étale f de $\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ envoie $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p'}/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p''}/a^{\mathbb{Z}}$. On a de nouveau un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p''}/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[rr] & & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p''}}'/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[dd] \\
H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p'}/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[u, "f"] \arrow[r] & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p'}}'/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[d] & \\
H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[u] \arrow[r] & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}}) \arrow[r, "f"] & H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})
\end{tikzcd}$$

où les deux flèches marquées "f" sont celles associées aux correspondances définies par f et les autres sont définies par les plongements et les correspondances canoniques.

La proposition se déduit maintenant des lemmes VI.23 et VI.22 et du corollaire VI.21. □

c) Calcul des traces des correspondances de Hecke

Au paragraphe 3a, nous avons construit $H_{N,\mathrm{ess}}$ comme une représentation semi-simple de $\mathbb{Z}W((X-N)\times(X-N),\eta)\times\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$. Nous allons maintenant calculer ses traces comme représentation de $W((X-N)\times(X-N),\eta)\times\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$. Cela utilise la proposition VI.24 ci-dessus, la formule de comptage des points fixes dans les ouverts $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$ du chapitre I, le théorème des points fixes d'un ouvert instable du chapitre IV, la stabilisation locale et globale des correspondances de Hecke réalisée au chapitre V et les mêmes arguments de fonctions L de paires que dans la démonstration de la proposition VI.20.

Théorème VI.25. – *Soit f une fonction dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$.*

Alors pour tout point fermé x de $(X-N)\times(X-N)$ au-dessus de deux places distinctes $\infty, 0\in|X-N|-T_f$ telles que $\deg(\infty)$ et $\deg(0)$ soient assez grands en fonction du support de f et pour tout multiple $s=\deg(\infty)s'=\deg(0)u'$ de $\deg(x)$, on a

$$\mathrm{Tr}_{H_{N,\mathrm{ess}}}\left(f\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)=q^{(r-1)s}\sum_{\pi\in\{\pi\}_N^r}\mathrm{Tr}_\pi(f)$$
$$\left(z_1(\pi_\infty)^{-s'}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s'}\right)\left(z_1(\pi_0)^{u'}+\cdots+z_r(\pi_0)^{u'}\right).$$

Démonstration : Fixons une fonction $f\in\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$. Nous allons raisonner à partir de l'action de f sur les $H_c^\nu(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}})$.

Si $\{H\}$ désigne l'ensemble fini des représentations irréductibles de $\mathbb{Z}W((X-N)\times(X-N),\eta)$ qui figurent comme composantes de $H_{N,\mathrm{ess}}$, il existe des constantes c_H telles que pour tout point fermé x de $(X-N)\times(X-N)$ et tout multiple s de $\deg(x)$

$$\mathrm{Tr}_{H_{N,\mathrm{ess}}}\left(f\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)=\sum_{H\in\{H\}}c_H\,\mathrm{Tr}_H\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right).$$

On sait d'autre part d'après la proposition VI.24 que si p est n'importe quel polygone de troncature (assez convexe en fonction de X et N), on a

$$\mathrm{Tr}_{H_{N,\mathrm{ess}}}\left(f\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)=\mathrm{Tr}_{H^*_{N,\mathrm{ess}}}\left(f\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right).$$

Notant $\{\sigma\}$ l'ensemble des représentations ℓ-adiques r-négligeables de $W((X-N)\times(X-N),\eta)$, il existe une famille presque nulle de constantes c_σ, $\sigma\in\{\sigma\}$, telle que pour tous x et s, on ait

$$\mathrm{Tr}_{H_c^*\left(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}}\right)}\left(f\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)=\mathrm{Tr}_{H^*_{N,\mathrm{ess}}}\left(f\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)$$
$$+\sum_{\sigma\in\{\sigma\}}c_\sigma\,\mathrm{Tr}_\sigma\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right).$$

Soit $\mathrm{Lef}_{N,x}^{r,\overline{p}\le p}(f\times\mathrm{Frob}^s)$ le nombre des points fixes de la correspondance $f\times\mathrm{Frob}^s$ dans la fibre de l'ouvert $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de n'importe quel point géométrique de $X\times X$ supporté par x. D'après le théorème V.19 (stabilité des chtoucas au voisinage des points fixes) et le théorème V.2

(schématisation des espaces de modules grossiers de chtoucas itérés), on peut appliquer à $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'$ le théorème IV.12 (formule des points fixes sur un ouvert instable dans le cas non propre) : Il existe des correspondances cohomologiques $\mathrm{cl}(f)_{\mathfrak{X}}$ dans les strates fermées $\mathfrak{X}$ du bord de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $(X-N)\times(X-N)$ telles que, si p a été choisi assez convexe et si les deux projections ∞ et 0 de x sont distinctes et de degrés assez grands (en fonction du support de f), on ait pour tout multiple s assez grand de $\deg(x)$

$$\mathrm{Lef}_{N,x}^{r,\overline{p}\leq p}(f\times\mathrm{Frob}^s)=\mathrm{Tr}_{H_c^*\left(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}',a^{\mathbb{Z}}\right)}\left(f\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)$$
$$+\sum_{\mathfrak{X}}(-1)^{\mathrm{codim}\mathfrak{X}}\,\mathrm{Tr}_{H_c^*(\mathfrak{X})}\left(\mathrm{cl}(f)_{\mathfrak{X}}\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right).$$

Et comme la cohomologie des strates de bord $\mathfrak{X}$ est r-négligeable d'après la proposition VI.15(ii) déjà démontrée en rang r, il existe une famille presque nulle de constantes c'_σ, $\sigma\in\{\sigma\}$, telles que

$$\sum_{\mathfrak{X}}(-1)^{\mathrm{codim}\mathfrak{X}}\mathrm{Tr}_{H_c^*(\mathfrak{X})}\left(\mathrm{cl}(f)_{\mathfrak{X}}\times\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)$$
$$=\sum_{\sigma\in\{\sigma\}}c'_\sigma\,\mathrm{Tr}_\sigma\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right).$$

En combinant toutes ces formules, on obtient pour tout x et tout s comme dans l'énoncé

$$\mathrm{Lef}_{N,x}^{r,\overline{p}\leq p}(f\times\mathrm{Frob}^s)=\sum_{H\in\{H\}}c_H\,\mathrm{Tr}_H\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)$$
$$+\sum_{\sigma\in\{\sigma\}}(c_\sigma+c'_\sigma)\,\mathrm{Tr}_\sigma\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right).$$

On peut dans cette formule remplacer partout x par un $(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X)(x)$, $r!\geq n\geq 1$, puis faire la moyenne des $r!$ formules obtenues. Chaque terme $\mathrm{Tr}_H(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)})$ reste inchangé car $H_{N,\mathrm{ess}}$ est invariante par $\mathrm{Frob}_X\times\mathrm{Id}_X$. Les $\mathrm{Tr}_\sigma(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)})$ se transforment en $\mathrm{Tr}_{\overline{\sigma}}(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)})$ où les $\overline{\sigma}=\frac{1}{r!}\sum_{n=1}^{r!}(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X)^*\sigma$ sont des représentations ℓ-adiques virtuelles r-négligeables complètes. Enfin, le théorème I.13 donne une expression automorphe pour la moyenne de la suite $n\mapsto\mathrm{Lef}_{N,(\mathrm{Frob}_X^n\times\mathrm{Id}_X)^*(x)}^{r,\overline{p}\leq p}(f\times\mathrm{Frob}^s)$ qui est périodique de période divisant $r!$. En invoquant la correspondance de Langlands déjà connue en rangs $<r$, on voit qu'il existe une famille finie de constantes c_ι, d'entiers $m_\iota\geq 0$, de scalaires λ_ι et de faisceaux ℓ-adiques

$\sigma_\iota, \sigma'_\iota \in \mathcal{G}_\ell(X-N)$ irréductibles de rangs $< r$ et purs de poids 0 tels que pour tout x et tout $s = \deg(\infty)s' = \deg(0)u'$ comme dans l'énoncé, on ait

$$\sum_{H \in \{H\}} c_H \frac{\mathrm{Tr}_H\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right)}{q^{(r-1)s}} - \sum_{\pi \in \{\pi\}_N^r} \mathrm{Tr}_\pi(f)\big(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)$$
$$\big(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}\big) = \sum_\iota c_\iota s^{m_\iota} \lambda_\iota^s \, \mathrm{Tr}_{q'^*\sigma'_\iota \otimes q''^*\sigma''_\iota}\left(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\right).$$

Nécessairement, les termes de droite tels que $m_\iota > 0$ doivent se simplifier mutuellement et on peut supposer que tous les m_ι valent 0. D'après la proposition VI.20(i) et la remarque qui la suit, les $H \in \{H\}$ sont pures de poids $2r-2$ et les $z_i(\pi_\infty)$ et $z_j(\pi_0)$ sont de module 1 donc on peut supposer aussi que les scalaires λ_ι sont tous de module 1.

Il reste à prouver que dans l'équation ci-dessus, le terme de droite et donc aussi celui de gauche vaut 0. Sinon, il existe deux faisceaux ℓ-adiques $\sigma', \sigma'' \in \mathcal{G}_\ell(X-N)$, irréductibles de rangs $r', r'' < r$ et purs de poids 0 tels que la dérivée logarithmique de fonctions L

$$\sum_\iota c_\iota \frac{\mathrm{L}'_{(X-N)\times(X-N)}\big((q'^*\sigma'_\iota \otimes q''^*\sigma''_\iota) \otimes (q'^*\check{\sigma}' \otimes q''^*\check{\sigma}''), \lambda_\iota Z\big)}{\mathrm{L}_{(X-N)\times(X-N)}\big((q'^*\sigma_\iota \otimes q''^*\sigma''_\iota) \otimes (q'^*\check{\sigma}' \otimes q''^*\check{\sigma}''), \lambda_\iota Z\big)}$$

admette au moins un pôle de module q^{-2}.

En revanche, comme les $H \in \{H\}$ n'ont pas de composante r-négligeable, la fraction rationnelle

$$\sum_H c_H \frac{\mathrm{L}'_{(X-N)\times(X-N)}(H \otimes (q'^*\check{\sigma}' \otimes q''^*\check{\sigma}''), q^{(1-r)}Z)}{\mathrm{L}_{(X-N)\times(X-N)}(H \otimes (q'^*\check{\sigma}' \otimes q''^*\check{\sigma}''), q^{(1-r)}Z)}$$

n'a pas de pôle de module q^{-2}.

D'autre part, σ' et σ'' correspondent au sens de Langlands à des représentations automorphes cuspidales π' et π'' de $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_{r''}(\mathbb{A})$ et d'après le théorème B.10, les fractions rationnelles

$$\frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\pi \times \check{\pi}', Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\pi \times \check{\pi}', Z)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\check{\pi} \times \check{\pi}'', Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\check{\pi} \times \check{\pi}'', Z)}\ , \ \pi \in \{\pi\}_N^r\ ,$$

n'ont pas de pôle de module $\leq q^{-1}$.

Comme dans la démonstration de la proposition VI.20, cela donne une contradiction. □

Remarque : Quand les compactifications lisses $\widetilde{\overline{\mathrm{Cht}}}{}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ existent (par exemple si N n'a pas de multiplicités ou si $r = 2$), on peut dans la démonstration ci-dessus raisonner à partir des $H_c^\nu(\widetilde{\overline{\mathrm{Cht}}}{}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ plutôt que des $H_c^\nu(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}{}'/a^{\mathbb{Z}})$. Dans ce cas, on n'a pas besoin d'appliquer le théorème général IV.12 mais seulement le théorème IV.7 (formule des points fixes sur un ouvert instable dans le cas propre). On ne se sert pas du théorème V.14 (stabilisation globale dans un ouvert lisse), du théorème V.2 de schématisation, de la formule générale des traces de Grothendieck-Lefschetz-Verdier ni du théorème de Fujiwara sur la conjecture de Deligne.

d) Conclusion du raisonnement

Grâce au théorème VI.25, nous pouvons maintenant déterminer la représentation $H_{N,\mathrm{ess}}$. On a d'abord :

Lemme VI.26. – *Comme représentation de* $\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}W((X-N)\times(X-N),\eta)$, $H_{N,\mathrm{ess}}$ *s'écrit*

$$\bigoplus_{\pi\in\{\pi\}_N^r} \pi \boxtimes H_\pi(1-r)\ ,$$

où, pour tout $\pi \in \{\pi\}_N^r$, H_π *est une représentation* ℓ*-adique semi-simple de* $\mathbb{Z}W((X-N)\times(X-N),\eta)$, *pure de poids* 0 *et telle que pour tout point fermé* x *de* $(X-N)\times(X-N)$ *se projetant sur deux places distinctes* $\infty, 0 \in |X-N|$ *dont les degrés sont assez grands et pour tout multiple* $s = \deg(\infty)s' = \deg(0)u'$ *de* $\deg(x)$, *on ait*

$$\mathrm{Tr}_{H_\pi}\big(\,\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\,\big)=\big(z_1(\pi_\infty)^{-s'}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi_0)^{u'}+\cdots+z_r(\pi_0)^{u'}\big).$$

Démonstration : Il existe un ensemble fini $\{\pi'\}$ de représentations irréductibles deux à deux distinctes de $\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$ ainsi que de représentations semi-simples $H_{\pi'}$, $\pi' \in \{\pi'\}$, de $\mathbb{Z}W((X-N)\times(X-N),\eta)$, tel que $H_{N,\mathrm{ess}}$ s'écrive comme représentation de $\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}W((X-N)\times(X-N),\eta)$

$$H_{N,\mathrm{ess}} = \bigoplus_{\pi'\in\{\pi'\}} \pi' \boxtimes H_{\pi'}(1-r).$$

Dans $\mathcal{H}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$, on peut choisir pour tout $\pi \in \{\pi\}_N^r \cup \{\pi'\}$ une fonction f_π telle que $\mathrm{Tr}_\pi(f_\pi) = 1$ et $\mathrm{Tr}_{\pi'}(f_\pi) = 0$ pour tout élément π' de $\{\pi\}_N^r$ ou de $\{\pi'\}$ qui est distinct de π.

On conclut d'après le théorème VI.25 appliqué aux fonctions f_π. □

Enfin, on montre :

Théorème VI.27. – *Pour tout* $\pi \in \{\pi\}_N^r$, *le facteur* H_π, *vu comme représentation semi-simple de* $W((X-N)\times(X-N),\eta)$, *est de la forme*

$$q'^{*}\sigma_\pi \otimes q''^{*}\check{\sigma}_\pi$$

où $\sigma_\pi \in \mathcal{G}_\ell(X-N)$ *est un faisceau* ℓ*-adique irréductible de rang* r *et pur de poids* 0 *qui correspond à* π *au sens de Langlands.*

Remarque : Ceci termine le pas en rang r de la démonstration par récurrence, y compris l'assertion de la proposition VI.15(iii).

Démonstration du théorème : Choisissons un point fermé $0 \in |X - N|$ dont le degré est assez grand pour que, pour tout $\infty \neq 0$ dans $|X - N|$ de degré assez grand, pour tout point fermé x de $(X - N) \times (X - N)$ au-dessus de $(\infty, 0)$ et pour tout multiple $s = \deg(\infty)s' = \deg(0)u'$ de $\deg(x)$, on ait

$$\mathrm{Tr}_{H_\pi}\big(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}\big) = \big(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)\big(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}\big).$$

Si on note $X_0 = X \times 0$, $N_0 = N \times 0$, σ_0 le faisceau ℓ-adique semi-simple et pur de poids 0 sur $X_0 - N_0$ image réciproque de H_π par

$$X_0 - N_0 = (X - N) \times 0 \xrightarrow{(\mathrm{Id},0)} (X - N) \times (X - N)$$

et H_π^0 l'image réciproque de H_π sur $(X_0 - N_0) \times_0 (X_0 - N_0)$, il existe des caractères $\chi_1, \ldots, \chi_{r^2}$ de $\deg(0)\widehat{\mathbb{Z}} = \pi_1(0)$ tels que les deux faisceaux ℓ-adiques semi-simples et purs de poids 0 sur $(X_0 - N_0) \times_0 (X_0 - N_0)$

$$q'^*\sigma_0 \otimes q''^*\check{\sigma}_0 \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i=1}^{r^2} \big(H_\pi^0 \otimes \chi_i\big)$$

aient les mêmes valeurs propres de Frobenius en tous les points fermés x dont les deux projections sont distinctes et de degrés assez grands. Cela impose qu'ils sont égaux.

On en déduit qu'existent des faisceaux ℓ-adiques σ' et σ'' sur $X - N$, lisses et purs de poids 0, tels que $q'^*\sigma' \otimes q''^*\sigma''$ et H_π aient au moins un facteur irréductible commun.

On peut même supposer que σ' et σ'' sont irréductibles et comme H_π est muni d'une action de $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$, il contient alors $q'^*\sigma' \otimes q''^*\sigma''$ comme sous-représentation.

On prétend que σ' est de rang au moins r.

Sinon, il correspond au sens de Langlands à une représentation automorphe cuspidale π' d'un $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, $r' < r$, et d'après le théorème B.10, la série

$$\frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\pi \times \check{\pi}', Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\pi \times \check{\pi}', Z)} = \sum_{s \geq 1} Z^{s-1} \sum_{\substack{\infty \in |X-N| \\ \frac{s}{\deg(\infty)} = s' \in \mathbb{N}}} \deg(\infty)\big(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}\big)$$
$$\big(z_1\big(\pi'_\infty\big)^{s'} + \cdots + z_{r'}\big(\pi'_\infty\big)^{s'}\big)$$

est absolument convergente dans une zone $|Z| < q^{-1+\varepsilon}$ (pour $\varepsilon > 0$ un réel assez petit).

D'autre part, comme tous les $z_i(\pi_0)$ et les $z_j(\sigma''_0)$ sont de module 1, la série

$$\frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\check{\pi} \times \check{\sigma}'', Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\check{\pi} \times \check{\sigma}'', Z)} = \sum_{s \geq 1} Z^{s-1} \sum_{\substack{0 \in |X-N| \\ \frac{s}{\deg(0)} = u' \in \mathbb{N}}} \deg(0)\big(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}\big)$$
$$\big(z_1\big(\sigma''_0\big)^{u'} + \cdots + z_{r''}\big(\sigma''_0\big)^{u'}\big)$$

est absolument convergente dans la zone $|Z| < q^{-1}$.

Par conséquent, la série “produit” (formée en faisant les produits des coefficients de même indice s) est absolument convergente dans la zone $|Z| < q^{-2+\varepsilon}$. Or cette série “produit” ne peut différer de

$$\frac{\mathrm{L}'_{(X-N)\times(X-N)}\big(H_\pi \otimes \big(q'^*\check{\sigma}' \otimes q''^*\check{\sigma}''\big), Z\big)}{\mathrm{L}_{(X-N)\times(X-N)}\big(H_\pi \otimes \big(q'^*\check{\sigma}' \otimes q''^*\check{\sigma}''\big), Z\big)}$$

que par les termes d’indice $x \in |(X-N)\times(X-N)|$ s’envoyant sur $\infty, 0 \in |X-N|$ tels que $\infty = 0$ ou que $\deg(\infty)$ ou $\deg(0)$ est plus petit qu’une constante. Cela implique que cette nouvelle série est aussi absolument convergente dans la zone $|Z| < q^{-2+\varepsilon}$ et qu’en particulier elle n’a pas de pôle de module q^{-2}. Il y a contradiction.

Ainsi a-t-on montré que σ' est de rang au moins r et il en est de même de σ''.

Comme $q'^*\sigma' \otimes q''^*\sigma''$ est plongé dans H_π qui est de rang r^2, σ' et σ'' sont exactement de rang r. D’après la proposition VI.11(i), il leur correspond au sens de Langlands deux représentations automorphes cuspidales π', π'' de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ non ramifiées en dehors de N.

Les deux fractions rationnelles

$$\frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\pi \times \check{\pi}', Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\pi \times \check{\pi}', Z)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\check{\pi} \times \check{\pi}'', Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\check{\pi} \times \check{\pi}'', Z)}$$

doivent avoir chacune un pôle en deux points de la forme q^{-1-s} et q^{-1+s} avec $\mathrm{Re}\, s = 0$. En effet, si ce n’était pas le cas et comme aucune des deux n’a de pôle de module $< q^{-1}$, la fraction rationnelle qui est leur série “produit” coefficient par coefficient n’aurait pas de pôle en $Z = q^{-2}$ et il en serait de même de

$$\frac{\mathrm{L}'_{(X-N)\times(X-N)}\big(H_\pi \otimes \big(q'^*\check{\sigma}' \otimes q''^*\check{\sigma}''\big), Z\big)}{\mathrm{L}_{(X-N)\times(X-N)}\big(H_\pi \otimes \big(q'^*\check{\sigma}' \otimes q''^*\check{\sigma}''\big), Z\big)} = \frac{\mathrm{L}'_{(X-N)\times(X-N)}\big(H_\pi \otimes \check{H}_\pi\big)}{\mathrm{L}_{(X-N)\times(X-N)}\big(H_\pi \otimes \check{H}_\pi\big)} .$$

Cela implique que les deux représentations σ' et $\check{\sigma}''$ sont égales, que $\sigma_\pi = \sigma'(s)$ correspond à π au sens de Langlands et que, comme représentations semi-simples de $W((X-N)\times(X-N), \eta)$, on a

$$H_\pi \cong q'^*\sigma_\pi \otimes q''^*\check{\sigma}_\pi \ .$$

On a fini. □

Chapitre VII

Conséquences de la correspondance globale

Dans ce dernier chapitre, nous rassemblons quelques conséquences de la correspondance de Langlands globale sur les corps de fonctions.

Les unes concernent la théorie des représentations des groupes. C'est d'une part toutes les fonctorialités prévues par Langlands entre représentations automorphes des groupes GL_r, et en particulier la possibilité de définir produit tensoriel, changement de base et induction automorphes. C'est d'autre part la correspondance de Langlands locale en caractéristique positive déjà démontrée dans [Laumon, Rapoport, Stuhler] et le fait que correspondances de Langlands globale et locales sont compatibles.

D'autres conséquences portent sur les faisceaux ℓ-adiques et plus précisément sur certaines conjectures de nature motivique énoncées dans [Deligne]. Sur une courbe lisse sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, la notion de faisceau ℓ-adique lisse irréductible "ne dépend pas de ℓ" et tout faisceau ℓ-adique lisse irréductible dont le déterminant est d'ordre fini est pur de poids 0 ; cette deuxième propriété s'étend automatiquement à toute variété sur $\mathbb{F}_q$ qui est normale.

Enfin, il y a ce qu'on appelle "l'assertion de descente" dans le programme de Langlands géométrique. On explique comment associer à tout système local ℓ-adique sur une courbe projective et lisse sur $\mathbb{F}_q$ un "faisceau automorphe" sur le champ des fibrés sur la courbe.

1) Conséquences sur les représentations de groupes

a) Quelques fonctorialités de Langlands

Etant donné F un corps de fonctions, on note ici $\mathbb{A}_F$ son anneau des adèles, X_F la courbe projective lisse qui lui est associée et $|X_F|$ l'ensemble des points fermés de X_F identifiés aux places de F.

On rappelle que d'après Langlands les représentations automorphes irréductibles isobares (voir [Langlands, 1979] ou [Clozel] pour une définition) π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ correspondent bijectivement aux familles de représentations automorphes cuspidales $\pi^1, \ldots, \pi^k$ de groupes $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}_F), \ldots, \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A}_F)$ dont la somme des rangs est $r_1 + \cdots + r_k = r$. Dans cette bijection, π correspond à $\pi^1, \ldots, \pi^k$ si et seulement si elle est non ramifiée exactement en les places $x \in |X_F|$ où $\pi^1, \ldots, \pi^k$ sont toutes non ramifiées et si en ces places-là on a l'égalité entre ensembles de valeurs propres de Hecke

$$\{z_1(\pi_x), \dots , z_r(\pi_x)\} = \coprod_{1\le i\le k} \left\{z_1\left(\pi_x^i\right), \dots , z_{r_i}\left(\pi_x^i\right)\right\}.$$

Sachant cela, on a comme conséquence immédiate du théorème VI.9(i) :

Théorème VII.1 – *Soit F un corps de fonctions.*

(i) (*Existence du produit tensoriel*). *Soient π et π' deux représentations automorphes irréductibles isobares de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ et $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A}_F)$. Alors il existe une représentation automorphe irréductible isobare Π de $\mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{A})$ qui, en toute place $x \in |X_F|$ où π et π' sont non ramifiées, est elle-même non ramifiée et vérifie*

$$\left\{z_i(\pi_x)z_j\left(\pi'_x\right) \mid 1 \le i \le r, 1 \le j \le r'\right\} = \{z_1(\Pi_x), \dots , z_{rr'}(\Pi_x)\}.$$

(ii) (*Changement de base*) *Soient F' une extension finie de F et π une représentation automorphe irréductible isobare de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$. Alors il existe une représentation automorphe irréductible isobare π' de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_{F'})$, non ramifiée en toute place $x' \in |X'_F|$ de degré $\frac{\deg(x')}{\deg(x)}$ au-dessus d'une place $x \in |X_F|$ où π est non ramifiée et qui vérifie*

$$\left\{z_1\left(\pi'_{x'}\right), \dots , z_r\left(\pi'_{x'}\right)\right\} = \{z_1(\pi_x)^{\frac{\deg(x')}{\deg(x)}}, \dots , z_r(\pi_x)^{\frac{\deg(x')}{\deg(x)}}\}.$$

(iii) (*Induction automorphe*) *Soient F' une extension finie de F de degré d et π' une représentation automorphe irréductible isobare de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$. Alors il existe une représentation automorphe irréductible isobare π de $\mathrm{GL}_{rd}(\mathbb{A}_F)$, non ramifiée en toute place $x \in |X_F|$ au-dessus de laquelle les places $x' \in |X_{F'}|$ sont non ramifiées sur x et pour π' et qui vérifie*

$$\mathrm{L}_x(\pi_x, Z) = \prod_{x'|x} \mathrm{L}_{x'}(\pi'_{x'}, Z).$$

□

b) La correspondance de Langlands locale

La correspondance de Langlands locale en caractéristique positive a été démontrée dans [Laumon, Rapoport, Stuhler] comme conséquence d'un bout de correspondance globale sur les corps de fonctions. Quand on dispose de la correspondance globale tout entière, on peut a fortiori recopier les mêmes arguments. On commence par citer :

Lemme VII.2 – *Soit F_x un corps local de caractéristique positive.*

(i) *Etant donné un faisceau ℓ-adique σ_x non nul sur $\mathrm{Spec}\, F_x$, σ_x est irréductible si et seulement si la fonction L locale $\mathrm{L}_x(\sigma_x \otimes \check{\sigma}_x, Z)$ a tous ses pôles sur le cercle $|Z| = 1$ et a un pôle simple au point $Z = 1$.*

(ii) *Etant donnés deux faisceaux ℓ-adiques irréductibles σ_x et σ'_x sur* Spec F_x, *ils sont isomorphes si et seulement si* $\mathrm{L}_x(\sigma'_x \otimes \check{\sigma}_x, Z)$ *a un pôle simple au point* $Z = 1$.

Démonstration : Voir la discussion au début du paragraphe 15 de [Laumon, Rapoport, Stuhler] et particulièrement le corollaire 15.4. □

Etant donné F_x un corps local de caractéristique positive, on considère un nombre premier ℓ différent de la caractéristique de F_x. On choisit un isomorphisme entre la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$ et $\mathbb{C}$. On fixe aussi un caractère additif non trivial ψ_x de F_x.

Pour tout entier $r \geq 1$, on note $\mathcal{G}^r_\ell(F_x)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux ℓ-adiques irréductibles de rang r sur Spec F_x dont le déterminant est d'ordre fini. Et on note $\mathcal{A}^r(F_x)$ l'ensemble des représentations admissibles lisses irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. On recopie l'énoncé du théorème 15.7 de [Laumon, Rapoport, Stuhler] :

Théorème VII.3. – *Il existe une unique famille d'applications bijectives indexées par les entiers $r \geq 1$*

$$\mathcal{A}^r(F_x) \to \mathcal{G}^r_\ell(F_x) : \pi_x \mapsto \sigma_{\pi_x}$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) *Pour toutes $\pi_x \in \mathcal{A}^r(F_x)$, $\pi'_x \in \mathcal{A}^{r'}(F_x)$, on a*

$$\mathrm{L}_x(\sigma_{\pi_x} \otimes \sigma_{\pi'_x}, Z) = \mathrm{L}_x\big(\pi_x \times \pi'_x, Z\big),$$
$$\varepsilon_x(\sigma_{\pi_x} \otimes \sigma_{\pi'_x}, \psi_x, Z) = \varepsilon_x\big(\pi_x \times \pi'_x, \psi_x, Z\big).$$

(ii) *Pour toute $\pi_x \in \mathcal{A}^r(F_x)$, on a*

$$\sigma_{\check{\pi}_x} = \check{\sigma}_{\pi_x} \ .$$

(iii) *Pour toute $\pi_x \in \mathcal{A}^r(F_x)$, le déterminant de σ_{π_x} et le caractère central de π_x se correspondent au sens de la théorie du corps de classes local.*

(iv) *Pour toute $\pi_x \in \mathcal{A}^r(F_x)$ et tout caractère d'ordre fini χ_x de $F_x^\times$, on a*

$$\sigma_{\pi_x \chi_x} = \sigma_{\pi_x} \chi_x \ .$$

Démonstration : L'unicité est prouvée par Henniart dans un appendice à [Laumon, Rapoport, Stuhler].

Pour l'existence, on suppose toutes les assertions déjà connues en les rangs $< r$ (pour r un entier ≥ 2) et on cherche à aller jusqu'au rang r.

Le corps local F_x peut être vu comme le localisé du corps des fonctions F d'une courbe X en une place $x \in |X|$.

Etant donnée une représentation supercuspidale $\pi_x \in \mathcal{A}^r(F_x)$, il existe d'après le lemme VI.12 une représentation cuspidale $\pi \in \mathcal{A}^r(F_x)$ dont la composante en la place x est π_x. D'après le théorème VI.9, il correspond à π un faisceau ℓ-adique $\sigma_\pi \in \mathcal{G}^r_\ell(F)$ et on peut écrire $\mathrm{L}_x((\sigma_\pi)_x \otimes (\check{\sigma}_\pi)_x, Z) =$

$\mathrm{L}_x(\pi_x \times \check{\pi}_x, Z)$ si bien que $\mathrm{L}_x((\sigma_\pi)_x \otimes (\check{\sigma}_\pi)_x, Z)$ vérifie les hypothèses du lemme VII.2(i) ci-dessus et que $(\sigma_\pi)_x$ est irréductible. Si $\pi' \in \mathcal{A}^r(F)$ est une autre représentation cuspidale dont la composante en x est $\pi'_x = \pi_x$, on a $\mathrm{L}_x((\sigma_{\pi'})_x \otimes (\check{\sigma}_\pi)_x, Z) = \mathrm{L}_x(\pi'_x \times \check{\pi}_x, Z)$ et d'après le lemme VII.2(ii), $(\sigma_{\pi'})_x$ est isomorphe à $(\sigma_\pi)_x$.

On a ainsi défini une application $\pi_x \mapsto \sigma_{\pi_x} = (\sigma_\pi)_x$ de $\mathcal{A}^r(F_x)$ dans $\mathcal{G}^r_\ell(F_x)$. Si $\pi_x \in \mathcal{A}^r(F_x)$ et $\pi'_x \in \mathcal{A}^{r'}(F_x)$ avec $r' \leq r$, π_x et π'_x s'écrivent comme les composantes en x de représentations cuspidales $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ et $\pi' \in \mathcal{A}^{r'}(F)$ et d'après le théorème VI.9 (ii) on a

$$\mathrm{L}_x(\sigma_{\pi_x} \otimes \sigma_{\pi'_x}, Z) = \mathrm{L}_x\big(\pi_x \times \pi'_x, Z\big)$$
$$\varepsilon_x(\sigma_{\pi_x} \otimes \sigma_{\pi'_x}, \psi_x, Z) = \varepsilon_x\big(\pi_x \times \pi'_x, \psi_x, Z\big).$$

En particulier, pour $\pi_x, \pi'_x \in \mathcal{A}^r(F_x)$, on a $\mathrm{L}_x(\sigma_{\pi'_x} \otimes \check{\sigma}_{\pi_x}, Z) = \mathrm{L}_x(\pi'_x \times \check{\pi}_x, Z)$ et on déduit du lemme VII.2(ii) que l'application $\mathcal{A}^r(F_x) \to \mathcal{G}^r_\ell(F_x)$, $\pi_x \mapsto \sigma_{\pi_x}$ est injective. D'autre part, il est évident qu'elle vérifie les propriétés (ii), (iii) et (iv).

Il reste seulement à prouver que l'application injective $\pi_x \mapsto \sigma_{\pi_x}$ est bijective. Cela se fait par un argument de comptage dû à Henniart qui est reproduit comme théorème 15.17 dans [Laumon, Rapoport et Stuhler]. □

c) Compatibilité entre correspondances locales et globale

On fixe à nouveau une courbe X projective et lisse sur un corps fini, F son corps des fonctions rationnelles et $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F. On note F_x le complété de F en une place $x \in |X|$.

On considère un nombre premier ℓ différent de la caractéristique du corps de base, un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ et un caractère additif non trivial ψ de $\mathbb{A}/F$ dont la composante sur F_x est notée ψ_x. On a :

Proposition VII.4. – *Etant donné un entier $r \geq 2$, soit $\sigma \in \mathcal{G}^r_\ell(F)$ un faisceau ℓ-adique irréductible de rang r et $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ la représentation automorphe cuspidale qui lui correspond au sens de Langlands. Alors le facteur local π_x de π en x est l'unique représentation lisse admissible irréductible de* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *telle que :*

- *le caractère central de π_x correspond au déterminant de σ_x au sens de la théorie du corps de classes local,*
- *pour tout entier $r' < r$ et toutes $\pi' \in \mathcal{A}^{r'}(F)$ et $\sigma' \in \mathcal{G}^{r'}_\ell(F)$ se correspondant au sens de Langlands, on a*

$$\mathrm{L}_x\big(\pi_x \times \pi'_x, Z\big) = \mathrm{L}_x\big(\sigma_x \otimes \sigma'_x, Z\big),$$
$$\mathrm{L}_x\big(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z\big) = \mathrm{L}_x\big(\check{\sigma}_x \otimes \check{\sigma}'_x, Z\big),$$
$$\varepsilon_x\big(\pi_x \times \pi'_x, \psi_x, Z\big) = \varepsilon_x\big(\sigma_x \otimes \sigma'_x, \psi_x, Z\big).$$

Démonstration : On sait déjà d'après le théorème VI.9(ii) que le facteur local π_x de π en x vérifie ces propriétés.

Réciproquement, considérons une représentation lisse admissible irréductible $\widetilde{\pi}_x$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui vérifie ces mêmes propriétés. Notons $\widetilde{\pi}$ la représentation lisse admissible irréductible de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ dont le facteur local en la place x est $\widetilde{\pi}_x$ et dont les facteurs locaux en toutes les autres places sont ceux de π.

La représentation $\widetilde{\pi}$ a même caractère central que π, le produit eulérien qui définit sa fonction L (égale à celle de π) est absolument convergent dans un disque et pour toute représentation automorphe cuspidale $\pi' \in \mathcal{A}^{r'}(F)$ en rang $r' < r$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(\widetilde{\pi} \times \pi', Z) &= \mathrm{L}(\pi \times \pi', Z),\\
\mathrm{L}(\check{\widetilde{\pi}} \times \check{\pi}', Z) &= \mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}', Z),\\
\varepsilon(\widetilde{\pi} \times \pi', Z) &= \varepsilon(\pi \times \pi', Z)
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{L}(\widetilde{\pi} \times \pi', Z)$ et $\mathrm{L}(\check{\widetilde{\pi}} \times \check{\pi}', Z)$ sont des polynômes qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$\mathrm{L}(\widetilde{\pi} \times \pi', Z) = \varepsilon(\widetilde{\pi} \times \pi', Z)\mathrm{L}\left(\check{\widetilde{\pi}} \times \check{\pi}', \frac{1}{qZ}\right).$$

D'après le théorème 1 de [Cogdell, Piatetski-Shapiro], on conclut que $\widetilde{\pi}$ est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. Comme elle coïncide avec π en toutes les places sauf peut-être x, on déduit du "théorème de multiplicité un fort" de Piatetski-Shapiro que $\widetilde{\pi}_x = \pi_x$. □

En utilisant la classification de Bernstein et Zelevinski (théorème B.4), il est facile d'étendre les bijections du théorème VII.3 en des applications indexées par les entiers $r \geq 1$ dont chacune envoie l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux ℓ-adiques de rang r sur Spec F_x dont le déterminant est d'ordre fini sur l'ensemble des représentations lisses admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ dont le caractère central est d'ordre fini. Ces applications préservent les facteurs L et ε locaux de paires, elles sont compatibles avec le passage aux contragrédientes, la torsion par les caractères d'ordre fini et la théorie du corps de classes local. Elles sont surjectives et deux faisceaux ℓ-adiques de même rang sur Spec F_x ont même image si et seulement si ils ont mêmes "Frob-semi-simplifiés".

En raisonnant par récurrence sur l'entier r, on déduit aussitôt de la proposition VII.4 :

Corollaire VII.5. – *Etant donné un entier $r \geq 1$, soit $\sigma \in \mathcal{G}_\ell^r(F)$ un faisceau ℓ-adique irréductible de rang r et $\pi \in \mathcal{A}^r(F)$ la représentation automorphe cuspidale qui lui correspond au sens de Langlands.*

Alors le facteur local π_x de π en x est l'image de σ_x par la correspondance de Langlands locale sur F_x. □

2) Conséquences sur les faisceaux ℓ-adiques

a) Le cas des courbes lisses

En dimension 1, la correspondance de Langlands globale permet de montrer la conjecture 1.2.10 de [Deligne] (sauf ce qui concerne l'existence de "petits camarades cristallins") :

Théorème VII.6. – *Soit X' une courbe lisse sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.*

Etant donné un nombre premier ℓ qui ne divise pas q, soit σ un faisceau ℓ-adique lisse sur X', qui est irréductible de rang r et dont le déterminant est un caractère d'ordre fini. Alors :

(i) *Il existe un corps de nombres $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ tel qu'en tout point fermé $x \in |X'|$, le polynôme $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$ soit à coefficients dans E.*

(ii) *En tout $x \in |X'|$, les racines du polynôme $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$ sont des nombres algébriques dont toutes les images complexes sont de module* 1.

(iii) *En toutes les places λ non archimédiennes et premières à q de E, les racines des polynômes $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$, $x \in |X'|$, sont des unités λ-adiques.*

(iv) *En toute place λ divisant q de E, les valuations $\lambda(\alpha)$ des racines α des polynômes $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$, $x \in |X'|$, satisfont l'encadrement*

$$|\lambda(\alpha)/\lambda(q^{\deg(x)})\ | \leq (r-1)^2/r\ .$$

(v) *Pour toute place λ de E au-dessus d'un nombre premier ℓ' ne divisant pas q, il existe sur X' un faisceau ℓ'-adique σ_λ lisse et irréductible de rang r tel que*

$$\det_\sigma\left(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1}\right) = \det_{\sigma_\lambda}\left(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1}\right), \forall x \in |X'|\ .$$

Le faisceau $(\sigma_\lambda)^r$ est défini sur la complétion E_λ de E et σ_λ est défini sur une extension finie de E_λ.

Démonstration : On peut supposer que X' est géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$. C'est un ouvert d'une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$. On note F le corps des fonctions rationnelles de X ou X' et $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F.

(i) On fixe un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

D'après le théorème VI.9(i), il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui est non ramifiée en les places $x \in |X'|$ et correspond à σ au sens de Langlands.

La représentation π apparaît comme facteur direct irréductible de multiplicité 1 dans la représentation Aut_c^r de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ constituée de toutes les fonctions automorphes cuspidales (voir le début du paragraphe VI.1d), laquelle est définie sur $\mathbb{Q}$. D'après la proposition 6 du paragraphe IV.3b de [Lafforgue, 1997], le corps de rationalité de π est une extension finie de $\mathbb{Q}$, ce qu'on appelle un corps de nombres, et π est définie sur son corps de rationalité.

Comme π et σ se correspondent au sens de Langlands et d'après le corollaire I.8, les coefficients de chaque polynôme $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$, $x \in |X'|$, peuvent s'écrire comme les traces sur π de certaines fonctions de $\mathcal{H}^r = C_c^\infty(\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}))$ qui prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$.

D'où le résultat.

(ii) Il résulte de (i) que toutes les racines des polynômes $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$, $x \in |X'|$, sont des nombres algébriques. D'après les théorèmes VI.9 et VI.10, tout isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ les transforme en des nombres complexes de module 1.

(iii) Etant donnée une place λ non archimédienne et première à q de E, fixons une clôture algébrique $\overline{E}_\lambda$ de E_λ et un isomorphisme $\overline{E}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Ce choix permet d'associer à π un faisceau λ-adique σ_λ lisse sur X', irréductible de rang r, de déterminant d'ordre fini et qui lui corresponde au sens de Langlands. En toute place $x \in |X'|$, on a

$$\det_\sigma\left(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1}\right) = \det_{\sigma_\lambda}\left(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1}\right),$$

et comme σ_λ est un faisceau λ-adique, les valeurs propres de Frob_x agissant sur σ_λ en n'importe quelle place $x \in |X'|$ sont des unités λ-adiques.

(v) Il reste seulement à prouver que $(\sigma_\lambda)^r$ est défini sur la complétion E_λ de E (en effet, σ_λ sera alors défini sur n'importe quelle extension finie de E_λ qui scinde l'algèbre centrale simple $\mathrm{End}(\sigma_\lambda)^r$ de dimension r^2 sur E_λ).

Pour cela, il nous faut revenir à la façon dont σ_λ a été réalisé, au paragraphe 3 du chapitre VI, comme morceau de la cohomologie ℓ'-adique des champs de chtoucas. Il n'y a pas de restriction à supposer que le caractère central χ_π de π est trivial sur un élément $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré 1 ; on choisit d'autre part un niveau $N \hookrightarrow X$ tel que $\pi \cdot \mathbb{1}_N \neq 0$.

Avec les notations du paragraphe VI.3a, la représentation $H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$ de $\mathcal{H}_N^r \times \mathbb{Z}W_{F^2}^\eta$ est définie sur $\mathbb{Q}_{\ell'}$, de même que sa filtration par les $F^i H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$. Donc $H_{N,\mathrm{ess}}$, qui est une représentation semi-simple de $\mathcal{H}_N^r \times W_F^{\eta'} \times W_F^{\eta''}$, est également définie sur $\mathbb{Q}_{\ell'}$. Sa torsion $H_{N,\mathrm{ess}}(1-r)$ contient un facteur direct irréductible de la forme $\pi \boxtimes (\sigma_\lambda \otimes \chi) \boxtimes (\check{\sigma}_\lambda \otimes \chi^{-1})$, avec χ un caractère de $\mathbb{Z}$, qui est défini sur E_λ puisque E_λ contient $\mathbb{Q}_{\ell'}$ et le corps de rationalité de π. On peut trouver dans $\mathcal{H}_N^r$ une fonction f à coefficients dans E telle que $\pi \cdot f$ soit de dimension 1 et donc la représentation irréductible $(\sigma_\lambda \otimes \chi) \boxtimes (\check{\sigma}_\lambda \otimes \chi^{-1})$ de $W_F^{\eta'} \times W_F^{\eta''}$ est définie sur E_λ ; par restriction à $W_{F'}^\eta \times \{1\}$, il en est de même de la représentation $(\sigma_\lambda \otimes \chi)^r$ de $W_F^{\eta'}$. Comme le corps de rationalité de σ_λ est contenu dans E_λ, le caractère χ est défini sur E_λ et $(\sigma_\lambda)^r$ est définie sur E_λ.

(iv) Notant q' et q'' les deux projections de $X \times X$ sur X, on sait que le faisceau ℓ-adique lisse $q'^*\sigma \otimes q''^*\check{\sigma}(1-r)$ sur $X' \times X'$ peut être vu comme un morceau de la somme alternée $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ des faisceaux de cohomologie ℓ-adique à supports compacts de $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ sur $(X-N) \times$

$(X - N) \supseteq X' \times X'$. Comme les groupes d'automorphismes des points du champ $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ sont finis de cardinaux uniformément bornés et d'après le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz, on voit facilement que les valeurs propres des éléments de Frobenius agissant sur les fibres de $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \leq p}/a^{\mathbb{Z}})$ sont des entiers algébriques. On en déduit qu'en tout point fermé $x \in |X'|$ et pour toutes valeurs propres α, β de Frob_x^{-1} agissant sur σ, on a

$$|q^{(r-1)\deg(x)}\alpha\beta^{-1}|_\lambda \leq 1$$

où $|\cdot|_\lambda$ désigne la norme sur $\overline{E}_\lambda$ associée à la valuation λ. Mais comme le déterminant de σ est d'ordre fini, le produit des $|\beta|_\lambda$ vaut 1 et on obtient

$$|\alpha|_\lambda \leq |q^{(r-1)\deg(x)}|_\lambda^{-(r-1)/r}$$

et

$$|\alpha|_\lambda \geq |q^{(r-1)\deg(x)}|_\lambda^{(r-1)/r} .$$

C'est ce qu'on voulait. □

b) Le cas général

Une partie du théorème VII.6 se généralise automatiquement du cas des courbes au cas de dimension arbitraire :

Proposition VII.7. *– Soit $\mathfrak{X}$ une variété normale de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.*

Etant donné un nombre premier ℓ qui ne divise pas q, soit σ un faisceau ℓ-adique lisse sur $\mathfrak{X}$, qui est irréductible de rang r et dont le déterminant est un caractère d'ordre fini. Alors :

(i) *En tout point fermé $x \in |\mathfrak{X}|$ de $\mathfrak{X}$, les racines du polynôme* $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$ *sont des nombres algébriques dont toutes les images complexes sont de module* 1.

(ii) *Pour toute place λ première à q, les racines des polynômes* $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$, *$x \in |\mathfrak{X}|$, sont des unités λ-adiques.*

(iii) *Pour toute place λ divisant q, les valuations $\lambda(\alpha)$ des racines α des polynômes* $\det_\sigma(\mathrm{Id} - Z \cdot \mathrm{Frob}_x^{-1})$, *$x \in |\mathfrak{X}|$, satisfont l'encadrement*

$$|\lambda(\alpha)/\lambda(q^{\deg(x)})| \leq (r-1)^2/r .$$

Démonstration : On peut se limiter au cas où $\mathfrak{X}$ est géométriquement connexe (donc irréductible) et quasi-projective sur $\mathbb{F}_q$.

D'après le théorème VII.6, il suffit de prouver que, si $x \in |\mathfrak{X}|$ est un point fermé de $\mathfrak{X}$, il existe une courbe lisse X' définie sur une extension finie de $\mathbb{F}_q$ et munie d'un morphisme $f : X' \to \mathfrak{X}$ contenant x dans son image et tel que le faisceau ℓ-adique lisse $f^*\sigma$ sur X' soit encore irréductible.

Soit $\mathfrak{X}' \xrightarrow{p} \mathfrak{X}$ la variété normalisée de l'éclatée de $\mathfrak{X}$ le long du point x. Comme $\mathfrak{X}$ est normale, le faisceau $p^*\sigma$ est irréductible. La variété $\mathfrak{X}'$ a même dimension d que $\mathfrak{X}$, elle aussi est quasi-projective et la fibre $p^{-1}(x)$ est un sous-schéma de $\mathfrak{X}'$ projectif de dimension $d-1$.

Considérons la variété rationnelle H qui classifie les familles de $d-1$ sections hyperplanes de $\mathfrak{X}'$. D'après le théorème de Bertini (voir par exemple le théorème 8.18 du chapitre II de [Hartshorne]), il existe dans H un ouvert non vide H' tel que tout point h de H' définisse dans $\mathfrak{X}'$ une courbe lisse X'_h ; toutes ces courbes X'_h rencontrent la fibre $p^{-1}(x)$.

Pour tout point fermé h de H', notons $\overline{h}$ une clôture algébrique de h. D'après le corollaire 7.9 du chapitre III de [Hartshorne], la courbe $X'_{\overline{h}} = X'_h \times_h \overline{h}$ est automatiquement connexe et même la restriction au-dessus de $X'_{\overline{h}}$ de n'importe quel revêtement fini étale connexe de $\overline{\mathfrak{X}}' = \mathfrak{X}' \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ est connexe. Cela signifie que le groupe fondamental géométrique $\pi^{\text{géom}}_{X'_h}$ de X'_h se surjecte sur celui $\pi^{\text{géom}}_{\mathfrak{X}'}$ de $\mathfrak{X}'$.

Or la restriction à $\pi^{\text{géom}}_{\mathfrak{X}'}$ de $p^*\sigma$ vu comme représentation irréductible du groupe fondamental $\pi_{\mathfrak{X}'}$ de $\mathfrak{X}'$ s'écrit comme la somme directe d'un nombre fini m de représentations irréductibles de $\pi^{\text{géom}}_{\mathfrak{X}'}$ images les unes des autres par Frob.

Si alors h est un point fermé de H' qui est une extension finie de $\mathbb{F}_q$ de degré premier à m (il en existe), la restriction de $p^*\sigma$ à X'_h est un faisceau ℓ-adique lisse irréductible. □

Il convient de rappeler que d'après la proposition 1.3.4 de [Deligne], pour tout faisceau ℓ-adique lisse σ sur un schéma $\mathfrak{X}$ normal et de type fini sur $\mathbb{F}_q$, il existe un faisceau ℓ-adique inversible χ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$ tel que le déterminant de $\sigma \otimes \chi$ soit d'ordre fini.

En l'absence de choix d'un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, un faisceau ℓ-adique σ sur un schéma $\mathfrak{X}$ normal et de type fini sur $\mathbb{F}_q$ est dit pur de poids $n \in \mathbb{Z}$ si, en tout point fermé $x \in |\mathfrak{X}|$ de $\mathfrak{X}$, les valeurs propres de Frob_x^{-1} agissant sur la fibre de σ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes ont pour module $q^{\frac{n}{2}\deg(x)}$; il est dit mixte si c'est une extension de faisceaux purs de certains poids.

Disons que deux faisceaux ℓ-adiques inversibles χ et χ' sur $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$ sont équivalents si $\chi^{-1}\chi'$ est pur d'un certain poids entier. D'après Deligne, on déduit de la proposition VII.7 :

Corollaire VII.8. – *Soit $\mathfrak{X}$ une variété normale de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ et soit ℓ un nombre premier qui ne divise pas q.*

Alors tout faisceau ℓ-adique lisse σ sur $\mathfrak{X}$ se décompose de manière unique en une somme directe

$$\sigma = \bigoplus_{\chi} \sigma_\chi \otimes \chi$$

où χ décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de faisceaux ℓ-adiques inversibles sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$ *et les σ_χ sont des faisceaux ℓ-adiques mixtes sur $\mathfrak{X}$ presque tous nuls.*

Démonstration : C'est la même que celle du théorème 3.4.1(i) de [Deligne]. □

3) Remarque sur le programme de Langlands géométrique

On renvoie aux articles [Frenkel, Gaitsgory, Kazhdan, Vilonen] et [Laumon, 1995] qui généralisent partiellement des constructions de Drinfeld en rang 2.

On considère toujours une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.

Etant donné un entier $r \geq 2$, on note ici $\mathcal{M}_r$ le champ algébrique des fibrés de rang r sur la courbe X : à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$, il associe le groupoïde des fibrés de rang r sur $X \times S$.

Désignant par Ω_X le faisceau canonique sur X et par Ω_X^{r-1} sa puissancce tensorielle $(r-1)$-ième, on note aussi $\mathcal{M}'_r$ le champ algébrique qui associe à tout schéma S le groupoïde des fibrés $\mathcal{E}$ de rang r sur $X \times S$ munis d'un plongement $\Omega_X^{r-1} \boxtimes \mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathcal{E}$ dont le conoyau est plat sur S. Bien sûr, l'oubli du plongement définit un morphisme $p : \mathcal{M}'_r \to \mathcal{M}_r$.

Soit σ un faisceau ℓ-adique lisse (c'est-à-dire partout non ramifié) et géométriquement irréductible de rang r sur la courbe X.

L'article [Frenkel, Gaitsgory, Kazhdan, Vilonen] explique comment réaliser géométriquement les modèles de Whittaker de σ en un certain complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{S}'_\sigma$ sur le champ algébrique $\mathcal{M}'_r$. Il énonce la conjecture suivante :

Énoncé VII.9. – *Le complexe de faisceaux $\mathcal{S}'_\sigma$ est l'image réciproque par $p : \mathcal{M}'_r \to \mathcal{M}_r$ d'un complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{S}_\sigma$ sur $\mathcal{M}_r$ dont la restriction à chaque composante connexe est un faisceau pervers éventuellement décalé.*

Le principal résultat de [loc. cit.] est le calcul de la fonction "traces des éléments de Frobenius" f'_σ du complexe $\mathcal{S}'_\sigma$. D'après la correspondance de Langlands (plus précisément l'assertion $(\mathrm{ii})_r$ du théorème VI.9) appliquée à σ et aux faisceaux ℓ-adiques qui s'en déduisent sur les courbes $X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'}$ (quand $\mathbb{F}_{q'}$ décrit l'ensemble des extensions finies de $\mathbb{F}_q$), la fonction f'_σ est constante le long des fibres de $p : \mathcal{M}'_r \to \mathcal{M}_r$.

On en déduit aussitôt que $\mathcal{S}'_\sigma$ est de la forme $p^*\mathcal{S}_\sigma$ au moins sur le plus grand ouvert où $\mathcal{S}'_\sigma$ est un faisceau pervers.

La prépublication récente [Frenkel, Gaitsgory, Vilonen] démontre l'énoncé VII.9 comme conséquence d'une assertion géométrique, l'annulation d'un certain nombre de "foncteurs de moyennisation" et elle prouve que cette propriété d'annulation est impliquée par le cas particulier des représentations partout non ramifiées dans le théorème VI.9.

Appendice A

Cohomologie ℓ-adique des champs

Dans le présent travail, on a besoin de pouvoir considérer et étudier les faisceaux de cohomologie ℓ-adique au-dessus de la base $X \times X$ des champs de chtoucas sans et avec structures de niveau et de leurs compactifications. Les bases nécessaires à l'étude de la cohomologie "lisse-étale" des champs sont exposées dans les chapitres 12 et 18 du livre de référence [Laumon, Moret-Bailly]. Partant de cela, nous continuons ici cette étude générale, jusqu'à obtenir des formes de la dualité de Poincaré et de la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz qui seront suffisantes pour nous. Nous le faisons pour des champs vérifiant un certain nombre de conditions (dont la finitude des groupes d'automorphismes) qui s'avéreront satisfaites par les champs de chtoucas et leurs compactifications.

La cohomologie ℓ-adique [resp. à supports compacts] de ces champs s'identifie à [resp. se définit comme] celle de leurs espaces de modules grossiers. Quand ces champs sont lisses, les correspondances géométriques induisent des homomorphismes en cohomologie ℓ-adique à supports compacts via des correspondances cohomologiques supportées par les espaces de modules grossiers auxquelles on pourra appliquer la formule générale des traces de Grothendieck-Lefschetz-Verdier. Dans le cas particulier où ces champs lisses sont aussi propres, les correspondances géométriques ont des classes de cohomologie qui permettent d'écrire à moindres frais une formule des traces de Grothendieck-Lefschetz.

1) Définition et premières propriétés

a) Une classe de champs algébriques

Dans tout ce qui suit, on se place sur un corps de base $\mathbb{F}$.

On définit ici une certaine famille de champs algébriques, les "champs sereins", dont nous allons ensuite étudier la cohomologie ℓ-adique.

Définition A.1. – *Etant donné S un schéma sur $\mathbb{F}$, un champ algébrique* (*au sens d'Artin*) $\mathfrak{X}$ *sur S sera dit serein si :*

(S1) $\mathfrak{X}$ *est séparé sur S.*
(S2) $\mathfrak{X}$ *est de type fini sur S.*

(S3) *Pour tout point du champ $\mathfrak{X}$, il existe*
- *un voisinage $\mathcal{V}$ ouvert au sens de Zariski dans $\mathfrak{X}$,*
- *un recouvrement fini et plat de $\mathcal{V}$ par un espace algébrique V,*
- *une action sur V d'un groupe fini H qui respecte la projection $q : V \to \mathcal{V}$ et est transitive sur ses fibres géométriques réduites.*

Un champ serein $\mathfrak{X}$ sur un schéma de base S est séparé ce qui signifie que le morphisme représentable diagonal $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ est propre et même fini d'après la propriété (S3) ; mais en général il est ramifié si bien que le champ $\mathfrak{X}$ n'est pas algébrique au sens de Deligne-Mumford. Ajoutons d'ailleurs que pour tout le présent appendice A le cadre le plus naturel serait celui des champs algébriques au sens d'Artin et de type fini sur un schéma de base S tels que le morphisme représentable diagonal $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ soit fini. Nous demandons la propriété plus forte (S3) car elle simplifie beaucoup les démonstrations et elle est facile à vérifier par les champs de chtoucas et leurs compactifications.

Un champ serein sur un schéma de base S est dit compactifiable s'il peut être plongé comme sous-champ ouvert dans un champ serein sur S qui est propre (c'est-à-dire vérifie le critère valuatif de propreté).

Il est clair que toutes ces propriétés sont préservées par changement de la base S. De plus, tout champ représentable quasi-projectif sur un champ serein [resp. compactifiable] est encore un champ serein [resp. compactifiable].

Théorème A.2. – *Soit $\mathfrak{X}$ un champ serein sur un schéma de base S. Alors :*

(i) *Il existe un unique S-espace algébrique de type fini $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ muni d'un morphisme $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ tel que tout morphisme $\mathfrak{X} \to V$ vers un S-espace algébrique V se factorise de manière unique en $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \to V$.*
Le morphisme $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ est universellement submersif. Pour tout point géométrique s de S, il induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie de points de $\mathfrak{X} \times_S s$ sur l'ensemble des points de $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \times_S s$.
Si $\mathfrak{X}$ est propre, l'espace algébrique $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ est propre sur S et si $\mathfrak{X}$ est compactifiable, $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ est compactifiable sur S.

(ii) *Pour tout schéma S' sur S, le morphisme de changement de base*

$$(\mathfrak{X} \times_S S')^{\mathrm{gr}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \times_S S'$$

est fini, surjectif et radiciel.

Démonstration : (i) L'existence d'un tel espace grossier $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ associé au champ $\mathfrak{X}$ a été démontrée dans l'article [Keel, Mori] (corollaire 1.3) cité dans le théorème 19.1 de [Laumon, Moret-Bailly].
Si $\mathfrak{X}$ vérifie le critère valuatif de propreté, il est clair que $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ le vérifie aussi.
Enfin, si $\mathfrak{X}$ s'écrit comme sous-champ ouvert d'un champ $\overline{\mathfrak{X}}$ serein et propre sur S, $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ est un ouvert de l'espace grossier $\overline{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}$ de $\overline{\mathfrak{X}}$ lequel est propre sur S. Cela signifie qu'il est compactifiable.

(ii) Le morphisme de changement de base $(\mathfrak{X} \times_S S')^{\mathrm{gr}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \times_S S'$ est universellement submersif et induit une bijection entre les ensembles de points géométriques donc il est fini, surjectif et radiciel.

b) Cohomologie ℓ-adique des champs sereins

On fixe un nombre premier ℓ différent de la caractéristique du corps de base $\mathbb{F}$.

On renvoie aux chapitres 12 et 18 du livre [Laumon, Moret-Bailly] pour les rudiments de cohomologie "lisse-étale" sur les champs algébriques de type fini sur $\mathbb{F}$. Les catégories de faisceaux considérées sont celles des faisceaux des sites lisses-étales qui sont "cartésiens" (voir la définition 12.3 de [loc. cit.]). Dans le chapitre 18 sont définies les catégories dérivées de faisceaux (lisses-étales) constructibles de modules sur les $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, $n \geq 1$ (voir la définition 18.1.4). A tout morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ entre champs de type fini sont associés deux foncteurs f^* et Rf_* adjoints l'un de l'autre reliant les catégories dérivées de faisceaux constructibles sur $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ (voir le corollaire 18.4.4). Si $\iota_Z : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est un sous-champ fermé, on dispose des foncteurs de "faisceaux de cohomologie à supports dans Z" $\mathcal{H}_Z$ et de "cohomologie sur $\mathcal{Y}$ à supports dans Z" $R_Z f_* = Rf_* \circ \mathcal{H}_Z$.

En passant aux limites projectives sur tous les anneaux $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, $n \geq 1$, puis en tensorisant par $\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$, on obtient une théorie partielle de cohomologie ℓ-adique sur les champs de type fini sur $\mathbb{F}$: A tout morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ sont associés des foncteurs f^* et $R^i f_*$, $i \geq 0$, reliant les catégories de faisceaux ℓ-adiques constructibles, et aussi des foncteurs $\mathcal{H}^i_Z$ et $R^i_Z f_*$, $i \geq 0$, pour toute immersion fermée $\iota_Z : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$. Ils sont munis de morphismes "d'oubli du support" $R^i_Z f_* \to R^i f_*$, $i \geq 0$.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux faisceaux ℓ-adiques constructibles sur $\mathfrak{X}$ et $\iota_Z : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$, $\iota_{Z'} : Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}$ sont deux immersions fermées, on dispose comme sur n'importe quel site ou topo d'homomorphismes de produit "cup" s'inscrivant dans des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
R^i_Z f_*\mathcal{F} \otimes R^j_{Z'} f_*\mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & R^{i+j}_{Z\cap Z'} f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}') \arrow[d] \\
R^i f_*\mathcal{F} \otimes R^j f_*\mathcal{F}' \arrow[r] & R^{i+j} f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')
\end{tikzcd}$$

pour tous $i, j \geq 0$.

Dans le but d'étudier la cohomologie ℓ-adique des champs sereins, on commence par le résultat suivant :

Lemme A.3. – *Soit $\mathfrak{X}$ un champ serein sur un schéma de base S et $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ l'espace algébrique grossier associé. Notant $q_{\mathrm{gr}} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ la projection canonique, on a :*

(i) *Pour tout faisceau ℓ-adique $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{X}$, la formation des $R^i(q_{\mathrm{gr}})_*\mathcal{F}$ commute à tout changement de la base $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$.*
De plus, les $R^i(q_{\mathrm{gr}})_*\mathcal{F}$, $i > 0$, sont nuls.
(ii) *Pour tout faisceau ℓ-adique $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$, le morphisme d'adjonction*

$$\mathcal{F} \to (q_{\mathrm{gr}})_* q_{\mathrm{gr}}^* \mathcal{F} \cong R(q_{\mathrm{gr}})_* q_{\mathrm{gr}}^* \mathcal{F}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Comme les ouverts de Zariski de $\mathfrak{X}$ sont les images réciproques des ouverts de $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$, les questions sont locales sur $\mathfrak{X}$; on peut supposer que $\mathfrak{X}$ a un revêtement fini et plat par un espace algébrique $V \xrightarrow{q} \mathfrak{X}$ muni de l'action transitive sur les fibres d'un groupe H. L'action de H est a fortiori transitive sur les fibres du composé $V \xrightarrow{q} \mathfrak{X} \xrightarrow{q_{\mathrm{gr}}} \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$.

(i) On voit que $\mathcal{F}$ s'identifie au sous-faisceau $(Rq_*q^*\mathcal{F})^H$ des invariants sous H dans $Rq_*q^*\mathcal{F}$. Donc $R(q_{\mathrm{gr}})_*\mathcal{F}$ s'identifie à $(R(q_{\mathrm{gr}} \circ q)_* q^*\mathcal{F})^H$. Comme $q_{\mathrm{gr}} \circ q$ est lui-même un morphisme fini, on a $R(q_{\mathrm{gr}} \circ q)_* q^*\mathcal{F} = (q_{\mathrm{gr}} \circ q)_* q^*\mathcal{F}$ et la formation de $(q_{\mathrm{gr}} \circ q)_* q^*\mathcal{F}$ commute à tout changement de base. D'où le résultat.
(ii) Comme H agit transitivement sur les fibres de q et de $q_{\mathrm{gr}} \circ q$, on a des isomorphismes canoniques

$$q_{\mathrm{gr}}^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \big(Rq_*q^*q_{\mathrm{gr}}^*\mathcal{F}\big)^H ,$$

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \big(R(q_{\mathrm{gr}})_* Rq_*q^*q_{\mathrm{gr}}^*\mathcal{F}\big)^H .$$

On en déduit par composition

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R(q_{\mathrm{gr}})_*\big(Rq_*q^*q_{\mathrm{gr}}^*\mathcal{F}\big)^H \xrightarrow{\sim} R(q_{\mathrm{gr}})_* q_{\mathrm{gr}}^*\mathcal{F} .$$

□

Ce lemme signifie que la cohomologie ℓ-adique d'un champ serein $\mathfrak{X}$ peut être identifiée à celle de son espace grossier $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$. Notant $p_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \to S$ et $p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}} : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \to S$ les deux projections, on a pour tout complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{X}$ un isomorphisme canonique

$$R(p_{\mathfrak{X}})_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R\big(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}\big)_*(q_{\mathrm{gr}})_*\mathcal{F} .$$

Quand $\mathfrak{X}$ est compactifiable, il est naturel de définir les complexes de cohomologie ℓ-adique à supports compacts par la formule

$$R(p_{\mathfrak{X}})_!\mathcal{F} = R\big(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}\big)_!(q_{\mathrm{gr}})_*\mathcal{F} .$$

On a :

Corollaire A.4. *– Soit $\mathfrak{X}$ un champ serein et compactifiable sur un schéma de base S sur $\mathbb{F}$. Alors pour tout complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{X}$,* *la formation de*

$$R(p_{\mathfrak{X}})_! \mathcal{F}$$

commute à tout changement de la base S.

Démonstration : Cela résulte du théorème A.2(ii) et du lemme A.3(i) puisque le foncteur $R(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}})_!$ commute à tout changement de la base S. □

Quand $\mathfrak{X}$ est propre sur S, $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ l'est aussi si bien que les $R(p_{\mathfrak{X}})_! \mathcal{F}$ coïncident avec les $R(p_{\mathfrak{X}})_* \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ est un complexe de faisceaux ℓ-adiques sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$, on a des isomorphismes canoniques

$$R(p_{\mathfrak{X}})_* q_{\mathrm{gr}}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R\big(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}\big)_* \mathcal{F} \ ,$$

$$R(p_{\mathfrak{X}})_! q_{\mathrm{gr}}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R\big(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}\big)_! \mathcal{F} \ .$$

Ceci s'applique en particulier au faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$. S'agissant de celui-ci, on a également :

Proposition A.5. – *Supposons que S est lisse de dimension d_S sur le corps de base $\mathbb{F}$ et que $\mathfrak{X}$ est un champ serein compactifiable et lisse de dimension d sur S.*

Alors l'espace algébrique grossier $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ est cohomologiquement lisse de dimension d sur S. Autrement dit, $R(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}})^! \mathbb{Q}_\ell$ désignant le complexe dualisant sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$, on a un isomorphisme naturel induit par $\mathfrak{X}$

$$R\big(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}\big)^! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(d)[2d] \ .$$

Démonstration : Si $U \xrightarrow{p_U} S$ est un schéma (compactifiable) sur S de dimension d_U, appelons faisceau pervers auto-dual sur U tout faisceau pervers $\mathcal{F}$ muni d'un isomorphisme $R\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, R(p_U)^! \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(d_U - d_S)[2d_U - 2d_S]$. Si $\mathcal{U} \to S$ est un champ serein sur S, appelons faisceau pervers auto-dual sur $\mathcal{U}$ tout complexe de faisceaux ℓ-adiques dont l'image réciproque sur tout schéma U lisse sur $\mathcal{U}$ est un faisceau pervers auto-dual, les isomorphismes d'auto-dualité étant compatibles entre eux.

La question posée étant locale, on peut supposer que $\mathfrak{X}$ admet un revêtement fini plat $V \xrightarrow{q} \mathfrak{X}$ par un espace algébrique V muni de l'action d'un groupe fini H qui est transitive sur les fibres de q et de $q_{\mathrm{gr}} \circ q$.

Soit IC_V le complexe d'intersection sur V normalisé en demandant que $\mathrm{IC}_V = \mathbb{Q}_\ell$ sur un ouvert dense de V; c'est un faisceau pervers auto-dual qui est le prolongement intermédiaire de sa restriction à n'importe quel ouvert dense, donc à l'image réciproque de n'importe quel ouvert dense de $\mathfrak{X}$ ou $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$.

On considère les sous-objets invariants sous H

$$(Rq_* \mathrm{IC}_V)^H \qquad \text{et} \qquad R(q_{\mathrm{gr}})_* (Rq_* \mathrm{IC}_V)^H$$

de $Rq_*\mathrm{IC}_V$ et $R(q_{\mathrm{gr}})_* Rq_*\mathrm{IC}_V$. Ce sont des faisceaux pervers auto-duaux de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ qui sont les prolongements intermédiaires de leurs restrictions à n'importe quel ouvert dense.

Comme $(Rq_*\mathrm{IC}_V)^H$ s'identifie au faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur un ouvert dense de $\mathfrak{X}$ et que $\mathfrak{X}$ est lisse, on a un isomorphisme canonique

$$(Rq_*\mathrm{IC}_V)^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell$$

(lequel transforme les isomorphismes d'auto-dualité par des scalaires multiplicatifs localement constants). De même, $(R(q_{\mathrm{gr}} \circ q)_*\mathrm{IC}_V)^H$ et le complexe d'intersection $\mathrm{IC}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ s'identifient au faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur un ouvert dense et on a un isomorphisme canonique

$$(R(q_{\mathrm{gr}} \circ q)_*\mathrm{IC}_V)^H \xrightarrow{\sim} \mathrm{IC}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}} .$$

Enfin, on a d'après le lemme A.3 un isomorphisme

$$R(q_{\mathrm{gr}})_*\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell .$$

L'isomorphisme composé

$$\mathrm{IC}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}} \xrightarrow{\sim} (R(q_{\mathrm{gr}} \circ q)_*\mathrm{IC}_V)^H = R(q_{\mathrm{gr}})_*(Rq_*\mathrm{IC}_V)^H \xrightarrow{\sim} (Rq_{\mathrm{gr}})_*\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell$$

transporte au faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ l'isomorphisme d'auto-dualité de $\mathrm{IC}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$; autrement dit, on a défini un isomorphisme $R(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}})^!\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(d)[2d]$.

On vérifie facilement qu'il ne dépend pas du choix de V. □

Dans la situation de la proposition, on déduit de la dualité de Poincaré-Grothendieck sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ que les $R(p_{\mathfrak{X}})_*\mathbb{Q}_\ell$ et $R(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell$ sont en dualité au sens qu'on a un isomorphisme canonique

$$R\mathcal{H}\mathrm{om}(R(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} R(p_{\mathfrak{X}})_*\mathbb{Q}_\ell(d)[2d] .$$

D'autre part, l'isomorphisme

$$\mathbb{Q}_\ell(d)[2d] \xrightarrow{\sim} R\big(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}\big)^!\mathbb{Q}_\ell$$

a un adjoint qu'on appelle le morphisme "trace"

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}/S} : R^{2d}(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell(d) = R^{2d}\big(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}}\big)_!\mathbb{Q}_\ell(d) \to \mathbb{Q}_\ell .$$

Un tel morphisme trace est défini plus généralement pour tout champ serein compactifiable $\mathfrak{X}$ sur S lisse qui admet un ouvert lisse de dimension d sur S et dont le complémentaire est fibre à fibre de dimension $< d$.

Il faut remarquer qu'en général ce morphisme trace $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}/S}$ diffère (par un coefficient multiplicatif localement constant) de celui $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}/S}$: $R^{2d}(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}})_!\mathbb{Q}_\ell(d) \to \mathbb{Q}_\ell$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$. En tout point générique, le quotient de $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}/S}$ par $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}/S}$ est égal à l'inverse du rang du schéma en groupes fini de ses automorphismes (sans oublier la partie infinitésimale).

c) Correspondances cohomologiques

On s'intéresse ici plus particulièrement aux faisceaux de cohomologie à coefficients dans le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur des champs sereins, compactifiables et lisses sur un même schéma S sur le corps de base $\mathbb{F}$.

Proposition A.6. – *Soient $\mathfrak{X}'$ et $\mathfrak{X}''$ deux champs sereins, compactifiables et lisses de dimensions relatives d' et d'' sur un schéma S (lisse de dimension d_S et quasi-projectif sur le corps $\mathbb{F}$).*

Soit Γ une correspondance de $\mathfrak{X}''$ dans $\mathfrak{X}'$ au-dessus d'un endomorphisme φ de S supposé propre. C'est un champ serein, compactifiable et normal de dimension $d' + d_S$ muni d'un morphisme $(p'_\Gamma, p''_\Gamma) : \Gamma \to \mathfrak{X}' \times_{\varphi,S} \mathfrak{X}''$ dont la seconde composante $p''_\Gamma : \Gamma \to \mathfrak{X}''$ est propre.

Alors :

(i) *Si $\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}$, $\mathfrak{X}''^{\mathrm{gr}}$ et Γ^{gr} désignent les espaces algébriques grossiers associés à $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$ et Γ et $p'_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}$, $p''_{\Gamma^{\mathrm{gr}}} : \Gamma^{\mathrm{gr}} \rightrightarrows \mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}, \mathfrak{X}''^{\mathrm{gr}}$ désignent les projections induites, la correspondance Γ se relève en une correspondance cohomologique c'est-à-dire un morphisme sur Γ^{gr}*

$$p''^{*}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \to p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \ .$$

(ii) *De plus, toute telle correspondance cohomologique*

$$p''^{*}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \to p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

induit un homomorphisme en cohomologie

$$\varphi^* R(p_{\mathfrak{X}''})_!\mathbb{Q}_\ell \to R(p_{\mathfrak{X}'})_!\mathbb{Q}_\ell \ .$$

Démonstration : (i) On note p^{gr}_{Γ}, $p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}'}$, $p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}''}$ les projections de Γ, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$ sur S et p_S la projection de S sur $\operatorname{Spec}\mathbb{F}$.

Il s'agit de construire un morphisme sur Γ^{gr}

$$\mathbb{Q}_\ell \to p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \ .$$

Comme d'après la proposition A.5, $\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}$ est cohomologiquement lisse de dimension $d' + d_S$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{F}$, cela s'écrit encore

$$\mathbb{Q}_\ell \to \left(p_S \circ p^{\mathrm{gr}}_\Gamma\right)^!\mathbb{Q}_\ell(-d' - d_S)[-2d' - 2d_S] \ .$$

Par adjonction, cela revient à définir un morphisme

$$R(p_S \circ p_\Gamma)_!\mathbb{Q}_\ell = R\left(p_S \circ p^{\mathrm{gr}}_\Gamma\right)_!\mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell(-d' - d_S)[-2d' - 2d_S] \ .$$

Comme Γ est lisse de dimension $d' + d_S$ sur $\mathbb{F}$ sur un ouvert dense, un tel morphisme est fourni par la trace $\mathrm{Tr}_{\Gamma/\mathbb{F}}$.

(ii) Comme φ et p''_Γ (donc aussi $p''_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}$) sont propres, on a un morphisme composé sur S

$$\begin{aligned} R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}''}\big)_!\mathbb{Q}_\ell &\to R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}''}\big)_! R\big(p''_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\big)_* \, p''^*_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \\ &\to R\varphi_* R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}'}\big)_! R\big(p'_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\big)_! \, p'^!_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \\ &\to R\varphi_* R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}'}\big)_!\mathbb{Q}_\ell \end{aligned}$$

puis par dualité

$$\varphi^* R(p_{\mathfrak{X}''})_!\mathbb{Q}_\ell = \varphi^* R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}''}\big)_!\mathbb{Q}_\ell \to R\big(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}'}\big)_!\mathbb{Q}_\ell = R(p_{\mathfrak{X}'})_!\mathbb{Q}_\ell \,. \qquad \square$$

Voyons la compatibilité avec la composition des correspondances :

Lemme A.7. – *Soient $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}'''$ trois champs sereins, compactifiables et lisses de dimensions relatives d', d'', d''' sur un schéma S (quasi-projectif lisse de dimension d_S sur $\mathbb{F}$).*

Soient Γ et Δ deux correspondances de $\mathfrak{X}''$ dans $\mathfrak{X}'$ et de $\mathfrak{X}'''$ dans $\mathfrak{X}''$ au-dessus d'endomorphismes φ, ψ de S. Ainsi $p''_\Gamma : \Gamma \to \mathfrak{X}''$ et $p'''_\Delta : \Delta \to \mathfrak{X}'''$ sont-ils propres, de même que φ et ψ.

On suppose que p''_Γ est lisse de dimension relative $d' - d''$ ou que $p''_\Delta : \Delta \to \mathfrak{X}''$ est lisse de dimension 0.

Alors $\Gamma \circ \Delta = \Gamma \times_{p''_\Gamma, \mathfrak{X}'', p''_\Delta} \Delta$ est une correspondance de $\mathfrak{X}'''$ dans $\mathfrak{X}'$ au-dessus de $\psi \circ \varphi$ et l'homomorphisme induit

$$(\psi \circ \varphi)^* R(p_{\mathfrak{X}'''})_!\mathbb{Q}_\ell \to R(p_{\mathfrak{X}'})_!\mathbb{Q}_\ell$$

est égal au composé des deux homomorphismes

$$\varphi^* R(p_{\mathfrak{X}''})_!\mathbb{Q}_\ell \to R(p_{\mathfrak{X}'})_!\mathbb{Q}_\ell$$

$$\psi^* R(p_{\mathfrak{X}'''})_!\mathbb{Q}_\ell \to R(p_{\mathfrak{X}''})_!\mathbb{Q}_\ell$$

induits par Γ et Δ.

Démonstration : On voit que $\Gamma \circ \Delta$ est un champ serein, compactifiable et normal de dimension $d' + d_S$ et que sa projection $p'''_{\Gamma\circ\Delta}$ sur $\mathfrak{X}'''$ est propre.

On considère les espaces de modules grossiers $\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}$, $\mathfrak{X}''^{\mathrm{gr}}$, $\mathfrak{X}'''^{\mathrm{gr}}$, Γ^{gr}, Δ^{gr} et $(\Gamma \circ \Delta)^{\mathrm{gr}}$. Ils sont reliés par des morphismes

$$p'_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}, p''_{\Gamma^{\mathrm{gr}}} : \Gamma^{\mathrm{gr}} \to \mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}, \mathfrak{X}''^{\mathrm{gr}}$$

$$p''_{\Delta^{\mathrm{gr}}}, p'''_{\Delta^{\mathrm{gr}}} : \Delta^{\mathrm{gr}} \to \mathfrak{X}''^{\mathrm{gr}}, \mathfrak{X}'''^{\mathrm{gr}}$$

$$p'_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}, p'''_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}} : (\Gamma \circ \Delta)^{\mathrm{gr}} \to \mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}, \mathfrak{X}'''^{\mathrm{gr}}$$

ainsi que par un morphisme

$$(\Gamma \circ \Delta)^{\mathrm{gr}} \to \Gamma^{\mathrm{gr}} \times_{p''_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}, \mathfrak{X}''^{\mathrm{gr}}, p''_{\Delta^{\mathrm{gr}}}} \Delta^{\mathrm{gr}}$$

qui est fini, surjectif et radiciel (car est submersif et induit une bijection entre ensembles de points géométriques).

On rappelle que Γ et Δ induisent deux correspondances cohomologiques

$$p''^{*}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \to p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \, ,$$
$$p'''^{*}_{\Delta^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \to p''^{!}_{\Delta^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \, .$$

En notant $p^{\Gamma^{\mathrm{gr}}}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}$ la projection de $(\Gamma \circ \Delta)^{\mathrm{gr}}$ sur Γ^{gr}, la première induit un homomorphisme

$$\left(p^{\Gamma^{\mathrm{gr}}}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}\right)^{!}\mathbb{Q}_\ell \to \left(p^{\Gamma^{\mathrm{gr}}}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}\right)^{!} p'^{!}_{\Gamma^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \cong p'^{!}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

et la seconde induit

$$p'''^{*}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \to \left(p^{\Delta^{\mathrm{gr}}}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}\right)^{*} p''^{!}_{\Delta^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \to \left(p^{\Gamma^{\mathrm{gr}}}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}\right)^{!}\mathbb{Q}_\ell \, .$$

Le composé de ces deux homomorphismes est égal à celui

$$p'''^{*}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell \to p'^{!}_{(\Gamma\circ\Delta)^{\mathrm{gr}}}\mathbb{Q}_\ell$$

défini par la correspondance $(\Gamma \circ \Delta)^{\mathrm{gr}}$. En effet, il suffit de le vérifier génériquement et alors c'est clair.

Le résultat est conséquence de cette factorisation. $\square$

Enfin, on a une formule de Künneth :

Proposition A.8. – *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux champs sereins compactifiables sur un même schéma de base sur $\mathbb{F}$. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$R^k(p_{\mathfrak{X}\times_S \mathcal{Y}})_!\mathbb{Q}_\ell \cong \bigoplus_{i+j=k} R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \otimes R^j(p_{\mathcal{Y}})_!\mathbb{Q}_\ell \, .$$

Démonstration : Cela résulte de la formule de Künneth pour les espaces algébriques compactifiables sur S puisque le morphisme naturel entre espaces de modules grossiers

$$(\mathfrak{X} \times_S \mathcal{Y})^{\mathrm{gr}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \times_S \mathcal{Y}^{\mathrm{gr}}$$

est fini, surjectif et radiciel. $\square$

d) Dualité de Poincaré et pureté

Désormais, on suppose que $\mathbb{F}$ est un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments.

Considérons un champ serein et compactifiable $\mathfrak{X}$ sur un schéma S sur $\mathbb{F}_q$, $p_{\mathfrak{X}}$ sa projection et $\mathcal{F}$ un faisceau ℓ-adique (ou un complexe de faisceaux ℓ-adiques) sur $\mathfrak{X}$.

Si $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ désigne l'espace algébrique grossier associé à $\mathfrak{X}$ muni des projections canoniques $q_{\mathrm{gr}} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ et $p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} \to S$, les $R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathcal{F}$ ont été définis comme $R^i(p^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{X}})_!(q_{\mathrm{gr}})_*\mathcal{F}$. Ce sont des faisceaux ℓ-adiques constructibles et d'après le corollaire A.4 leur formation commute à tout changement de base. D'après le théorème de pureté de Deligne, les $R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathcal{F}$ sont mixtes de poids $\leq d + i$ si $\mathcal{F}$ est lui-même mixte de poids $\leq d$.

Théorème A.9. – *Supposons que $\mathfrak{X}$ est propre sur S (lisse de dimension d_S sur $\mathbb{F}_q$) et qu'il est muni d'un morphisme*

$$\mathrm{Res} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}$$

vers un champ $\mathcal{C}$ algébrique au sens d'Artin, de type fini et de dimension 0 *sur $\mathbb{F}_q$ tel que*

$$(p_{\mathfrak{X}}, \mathrm{Res}) : \mathfrak{X} \to S \times \mathcal{C}$$

soit lisse de dimension d.

Alors pour tout complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$, on a :

(i) *Les faisceaux ℓ-adiques constructibles $R^i(p_{\mathfrak{X}})_! \mathrm{Res}^* \mathcal{F} = R^i(p_{\mathfrak{X}})_* \mathrm{Res}^* \mathcal{F}$ sur S sont lisses.*

(ii) *Si $\mathcal{F}$ est un faisceau pervers qui est le prolongement intermédiaire d'un faisceau ℓ-adique lisse σ pur de poids* 0 *sur un sous-champ localement fermé lisse $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ de codimension c, les faisceaux ℓ-adiques lisses $R^i(p_{\mathfrak{X}})_! \mathrm{Res}^* \mathcal{F}$, $0 \leq i \leq 2d - 2c$, sur S sont purs de poids i et ils vérifient la dualité de Poincaré. Plus précisément, si $\check{\mathcal{F}}$ désigne le faisceau pervers prolongement intermédiaire du faisceau lisse dual $\check{\sigma}$, on a un isomorphisme*

$$R\mathcal{H}\mathrm{om}(R(p_{\mathfrak{X}})_! \mathrm{Res}^* \mathcal{F}, \mathbb{Q}_\ell) \cong R(p_{\mathfrak{X}})_! \mathrm{Res}^* \check{\mathcal{F}}(d-c)[2d-2c] \, .$$

Remarque : Sur un champ algébrique au sens d'Artin et de type fini arbitraire, un faisceau ℓ-adique est comme d'habitude la limite projective d'une suite de faisceaux constructibles à coefficients dans les $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$. Il est lisse si sa restriction à tout objet du site lisse-étale est lisse.

Un élément de la catégorie dérivée des faisceaux ℓ-adiques est un faisceau pervers si sa restriction à tout objet du site lisse-étale est un faisceau pervers au sens des schémas.

Tout faisceau ℓ-adique lisse sur un sous-champ localement fermé lisse admet un prolongement intermédiaire car dans la catégorie des schémas les faisceaux pervers se recollent pour la topologie lisse.

Démonstration du théorème : (i) On sait déjà que les faisceaux ℓ-adiques $R^i(p_{\mathfrak{X}})_* \mathrm{Res}^* \mathcal{F}$ sont constructibles et que leur formation commute à tout changement de base. Afin de montrer qu'ils sont lisses, il suffit de vérifier que si on remplace S par un trait strictement local, la fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ et la fibre spéciale $\mathfrak{X}_s$ ont mêmes groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathrm{Res}^* \mathcal{F}$. Or la cohomologie de $\mathfrak{X}_\eta$ à coefficients dans $\mathrm{Res}^* \mathcal{F}$ se calcule comme la cohomologie de $\mathfrak{X}_s$ à coefficients dans le complexe des cycles proches de $\mathrm{Res}^* \mathcal{F}$ (construit dans le paragraphe 18.4 du livre [Laumon, Moret-Bailly]) puisque sa formation commute aux changements de base; ce complexe se calcule localement pour la topologie lisse et comme $\mathfrak{X}$ est lisse sur $S \times \mathcal{C}$ c'est le complexe $\mathrm{Res}^* \mathcal{F}$ lui-même. On a prouvé que les $R^i(p_{\mathfrak{X}})_* \mathrm{Res}^* \mathcal{F}$ sont lisses.

(ii) Le morphisme $\mathrm{Res} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}$ étant lisse, le produit fibré $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$ est un sous-champ localement fermé lisse de codimention c dans $\mathfrak{X}$ et les images récriproques $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \mathrm{Res}^* \mathcal{F}$, $\check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}} = \mathrm{Res}^* \check{\mathcal{F}}$ sont des faisceaux pervers sur $\mathfrak{X}$, prolongements intermédiaires des faisceaux ℓ-adiques lisses $\sigma_{\mathfrak{X}'} = \mathrm{Res}^* \sigma$, $\check{\sigma}_{\mathfrak{X}'} = \mathrm{Res}^* \check{\sigma}$ sur $\mathfrak{X}'$.

Notons $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ l'espace de module grossier de $\mathfrak{X}$, $q_{\mathrm{gr}} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ la projection canonique et $\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}$ l'image schématique de $\mathfrak{X}'$ dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$. Quitte à remplacer $\mathfrak{X}'$ par un ouvert dense, on peut supposer que $\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}$ est lisse et que $\sigma_{\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}} = (q_{\mathrm{gr}})_* \sigma_{\mathfrak{X}'}$ et $\check{\sigma}_{\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}} = (q_{\mathrm{gr}})_* \check{\sigma}_{\mathfrak{X}'}$ sont des faisceaux ℓ-adiques lisses ; ils sont duaux l'un de l'autre et purs de poids 0. Pour vérifier la dualité de Poincaré, il suffit de prouver que $(q_{\mathrm{gr}})_* \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ et $(q_{\mathrm{gr}})_* \check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}}$ s'identifient aux faisceaux pervers $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ et $\check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ prolongements intermédiaires de $\sigma_{\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}}$ et $\check{\sigma}_{\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}}$ puisque $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ et $\check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ sont duaux l'un de l'autre.

Il suffit de le faire localement et donc on peut supposer qu'existe un espace algébrique V et un morphisme fini et plat $q : V \to \mathfrak{X}$ muni de l'action d'un groupe fini H qui soit transitive sur les fibres. Quitte à restreindre encore $\mathfrak{X}'$, on peut supposer aussi que le sous-espace réduit associé au sous-espace localement fermé $V' = V \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$ de V est lisse. On note $\sigma_{V'}$ le faisceau ℓ-adique lisse sur V' image réciproque de σ et $\mathcal{F}_V$ le faisceau pervers sur V qui est le prolongement intermédiaire de $\sigma_{V'}$.

On considère les sous-objets invariants sous H

$$q_*(\mathcal{F}_V)^H \qquad \text{et} \qquad (q_{\mathrm{gr}})_* q_*(\mathcal{F}_V)^H$$

de $q_*(\mathcal{F}_V)$ et $(q_{\mathrm{gr}})_* q_*(\mathcal{F}_V)$. Ce sont des faisceaux pervers qui sont les prolongements intermédiaires de leurs restrictions à n'importe quels ouverts denses de $\mathfrak{X}'$ et $\mathfrak{X}'^{\mathrm{gr}}$.

On en déduit qu'ils s'identifient à $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ et on obtient comme voulu un isomorphisme $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}} \cong q_*(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})$.

De même, on a $\check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}} \cong q_*(\check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}})$.

On sait maintenant que les faisceaux ℓ-adiques lisses $R^i(p_{\mathfrak{X}})_! \,\mathrm{Res}^* \mathcal{F} = R^i(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}})_! \,\mathcal{F}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ sont duaux des $R^{2d-2c-i}(p_{\mathfrak{X}})_! \,\mathrm{Res}^* \check{\mathcal{F}}(d-c) = R^{2d-2c-i}(p_{\mathfrak{X}}^{\mathrm{gr}})_! \,\check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}(d-c)$ et ils sont mixtes de poids $\leq i$ et $\geq i$ puisque $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ et $\check{\mathcal{F}}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}}$ sont purs de poids 0. Donc ils sont purs de poids i. □

Dans le cas où $\mathfrak{X}$ est propre et lisse sur S (c'est-à-dire où $\mathfrak{C}$ est lui-même lisse sur $\mathbb{F}_q$), les faisceaux lisses $R^i(p_{\mathfrak{X}})_! \mathbb{Q}_\ell = R^i(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell$, $0 \leq i \leq 2d$, sont purs de poids i et vérifient la dualité de Poincaré.

La forme bilinéaire associée

$$R^i(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell \otimes R^{2d-i}(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell(-d)$$

est la composée du produit "cup"

$$R^i(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell \otimes R^{2d-i}(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell \to R^{2d}(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell$$

et du morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}/S} : R^{2d}(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell = R^{2d}(p_{\mathfrak{X}})_! \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell(-d)\ .$$

2) Classes des cycles et formules des traces

a) Classe de cohomologie associée à un cycle

Pour $\iota_Z : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ un sous-champ fermé d'un champ algébrique $\mathfrak{X}$ de type fini sur $\mathbb{F}_q$, on dispose comme on a déjà dit de faisceaux de cohomologie à supports dans Z

$$\mathcal{H}^i_Z \mathbb{Q}_\ell \ , \ i \geq 0 \ .$$

Lemme A.10. *– Soit $\mathfrak{X}$ un champ algébrique de type fini et lisse sur le corps de base $\mathbb{F}_q$. Et soit $Z \xhookrightarrow{\iota_Z} \mathfrak{X}$ un sous-champ fermé de $\mathfrak{X}$ de codimension $\geq c$.*

Alors pour tout $i < 2c$, le faisceau de cohomologie à supports dans Z

$$\mathcal{H}^i_Z \mathbb{Q}_\ell$$

est nul.

Démonstration : La formation des $\mathcal{H}^i_Z \mathbb{Q}_\ell$ commute à tout changement de base lisse $U \to \mathfrak{X}$. On est donc ramené au cas où Z est un fermé de codimension $\geq c$ dans un schéma lisse sur $\mathbb{F}_q$ et alors le résultat est bien connu : c'est le théorème de “semi-pureté” rappelé en 2.2.8 dans [Grothendieck, Deligne]. □

Si maintenant Z est un fermé de codimension c dans un champ $\mathfrak{X}$ serein et lisse sur un schéma de base S quasi-projectif lisse sur $\mathbb{F}_q$, on peut associer à Z sa classe de cohomologie qui est une section du faisceau ℓ-adique sur S

$$R^0(p_{\mathfrak{X}})_* \mathcal{H}^{2c}_Z \mathbb{Q}_\ell(c) \cong R^{2c}_Z(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell(c),$$

c'est-à-dire aussi une section du faisceau ℓ-adique $\mathcal{H}^{2c}_Z \mathbb{Q}_\ell(c)$ sur $\mathfrak{X}$.

En effet, pour définir une telle section, il suffit de le faire après tout changement de base lisse $U \to \mathfrak{X}$ avec U un schéma ; on est ramené au cas des schémas qui est traité dans le paragraphe 2.2 de [Grothendieck, Deligne]. Cette construction marche car les sections que l'on définit sur les recouvrement U se recollent c'est-à-dire sont compatibles avec les changements lisses $U' \to U$ de schémas de base.

On peut aussi considérer le cas un peu plus général d'un champ Z représentable fini sur $\mathfrak{X}$ dont le support de l'image $|Z|$ est de codimension c. Sa classe de cohomologie, section du faisceau sur S

$$R^{2c}_{|Z|}(p_{\mathfrak{X}})_* \mathbb{Q}_\ell(c),$$

est définie comme la somme

$$\sum m_e \ \mathrm{cl}(Z_e)$$

où Z_e décrit l'ensemble des composantes irréductibles de $|Z|$, m_e désigne le degré de Z au-dessus du point générique de chaque Z_e et $\mathrm{cl}(Z_e)$ est la classe de cohomologie de Z_e.

Proposition A.11. – *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux champs sereins, propres et lisses de dimensions relatives d et $d-c$ sur un même schéma de base S quasi-projectif lisse sur $\mathbb{F}_q$, reliés par un S-morphisme représentable fini $\mathcal{Y} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{X}$.*

Alors pour toute section locale u du faisceau ℓ-adique $R^{2(d-c)}(p_{\mathfrak{X}})_*\mathbb{Q}_\ell(d-c)$ sur S, on a dans le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur S l'égalité

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}/S}(\iota^*(u)) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}/S}(\mathrm{cl}(\mathcal{Y}) \smile u).$$

Démonstration : Pour tout schéma U lisse sur $\mathfrak{X}$ donc aussi sur $\mathbb{F}_q$, le schéma $\mathcal{Y} \times_{\mathfrak{X}} U$ est lui-même lisse sur $\mathbb{F}_q$ de dimension $\dim(U) - c$ et il est muni du morphisme fini $\mathcal{Y} \times_{\mathfrak{X}} U \xrightarrow{\iota_U} U$ si bien que la dualité de Grothendieck fournit un homomorphisme de trace $(\iota_U)_*\mathbb{Q}_\ell(d-c) \to \mathcal{H}^{2c}_{|\mathcal{Y}\times_{\mathfrak{X}}U|}\mathbb{Q}_\ell(d)$ entre faisceaux ℓ-adiques sur U. Cela signifie qu'on a un homomorphisme de trace entre faisceaux ℓ-adiques sur $\mathfrak{X}$

$$\iota_*\mathbb{Q}_\ell(d-c) \to \mathcal{H}^{2c}_{|\mathcal{Y}|}\mathbb{Q}_\ell(d).$$

De plus, son composé $\mathbb{Q}_\ell(d-c) \to \mathcal{H}^{2c}_{|\mathcal{Y}|}\mathbb{Q}_\ell(d)$ avec

$$\mathbb{Q}_\ell(d-c) \to \iota_*\iota^*\mathbb{Q}_\ell(d-c) = \iota_*\mathbb{Q}_\ell(d-c)$$

n'est autre que le produit "cup" avec la classe de cohomologie $\mathrm{cl}(\mathcal{Y})$ de $\mathcal{Y}$ vue comme section du faisceau $\mathcal{H}^{2c}_{|\mathcal{Y}|}\mathbb{Q}_\ell(c)$ sur $\mathfrak{X}$. En effet, il suffit de le voir après tout changement de base lisse $U \to \mathfrak{X}$ en un schéma U et alors on est ramené au cas traité dans le paragraphe 2.3 de [Grothendieck, Deligne].

D'autre part, on voit en revenant à la définition des homomorphismes de trace à la suite de la proposition A.5 et en utilisant le formalisme général de la dualité de Grothendieck que $\mathrm{Tr}_{\mathcal{Y}/S} : R^{2(d-c)}(p_{\mathcal{Y}})_*\mathbb{Q}_\ell(d-c) \to \mathbb{Q}_\ell$ est le composé de $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}/S} : R^{2d}(p_{\mathfrak{X}})_*\mathbb{Q}_\ell(d) \to \mathbb{Q}_\ell$ et de

$$\begin{aligned} R^{2(d-c)}(p_{\mathcal{Y}})_*\mathbb{Q}_\ell(d-c) &= R^{2(d-c)}(p_{\mathfrak{X}})_*\iota_*\mathbb{Q}_\ell(d-c) \\ &\to R^{2(d-c)}(p_{\mathfrak{X}})_*\mathcal{H}^{2c}_{|\mathcal{Y}|}\mathbb{Q}_\ell(d) \\ &= R^{2d}_{|\mathcal{Y}|}(p_{\mathfrak{X}})_*\mathbb{Q}_\ell(d) \to R^{2d}(p_{\mathfrak{X}})_*\mathbb{Q}_\ell(d). \end{aligned}$$

□

b) La formule des traces de Grothendieck

Considérons $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux champs sereins compactifiables et lisses de même dimension relative d sur un schéma de base S quasi-projectif lisse sur $\mathbb{F}_q$.

Soit d'abord Γ un champ représentable fini sur $\mathfrak{X} \times_S \mathcal{Y}$ dont la première projection $\Gamma \xrightarrow{p'_\Gamma} \mathfrak{X}$ est représentable finie étale (si bien que Γ aussi est lisse de dimension d sur S). On dispose d'une collection d'homomorphismes d'image directe par Γ

$$\Gamma_* : R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\mathcal{Y}})_!\mathbb{Q}_\ell\ ,\ i \geq 0\ ,$$

définis dans la proposition A.6. Ce sont aussi les composés

$$R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\mathfrak{X}})_!(p'_\Gamma)_*\mathbb{Q}_\ell = R^i(p_\Gamma)_!\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\mathcal{Y}})_!\mathbb{Q}_\ell$$

où la première flèche est induite par l'homomorphisme d'adjonction $\mathbb{Q}_\ell \to (p'_\Gamma)_* p'^*_\Gamma \mathbb{Q}_\ell = (p'_\Gamma)_*\mathbb{Q}_\ell$ et la seconde est duale de $R^{2d-i}(p_{\mathcal{Y}})_*\mathbb{Q}_\ell \to R^{2d-i}(p_\Gamma)_*\mathbb{Q}_\ell$.

Puis supposons que $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont également propres sur S et soit Γ une correspondance dans $\mathfrak{X} \times_S \mathcal{Y}$ c'est-à-dire un champ représentable fini sur $\mathfrak{X} \times_S \mathcal{Y}$ dont l'image est de codimension d.

La classe de cohomologie de Γ induit une section du faisceau ℓ-adique sur S

$$R^{2d}(p_{\mathfrak{X}\times_S\mathcal{Y}})_*\mathbb{Q}_\ell(d)$$

lequel, d'après la formule de Künneth, est isomorphe à

$$\bigoplus_{i=0}^{2d}\big(R^i(p_{\mathfrak{X}})_*\mathbb{Q}_\ell \otimes R^{2d-i}(p_{\mathcal{Y}})_*\mathbb{Q}_\ell(d)\big).$$

Par dualité de Poincaré-Grothendieck sur $\mathcal{Y}$, cette section peut aussi être vue comme une collection d'homomorphismes

$$R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\mathcal{Y}})_!\mathbb{Q}_\ell\ ,\ 0 \le i \le 2d\ .$$

Exactement comme dans le cas des schémas, on déduit formellement de la proposition A.11 les deux résultats suivants :

Corollaire A.12. – *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux champs sereins, propres et lisses de même dimension relative d sur un schéma de base S quasi-projectif lisse sur $\mathbb{F}_q$.*

Alors, si $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ est un S-morphisme, les homomorphismes en cohomologie induits par f

$$f_* : R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\mathcal{Y}})_!\mathbb{Q}_\ell\ ,\ 0 \le i \le 2d\ ,$$

coïncident avec ceux induits par la classe de cohomologie du graphe de f.

Plus généralement, si Γ est une correspondance dans $\mathfrak{X} \times_S \mathcal{Y}$ et $\mathfrak{X}_\emptyset$ est un ouvert de $\mathfrak{X}$ au-dessus duquel Γ est représentable fini étale et s'envoie dans un ouvert $\mathcal{Y}_\emptyset$ de $\mathcal{Y}$, on a pour tout i, $0 \le i \le 2d$, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^i(p_{\mathfrak{X}_\emptyset})_!\mathbb{Q}_\ell & \xrightarrow{\Gamma_*} & R^i(p_{\mathcal{Y}_\emptyset})_!\mathbb{Q}_\ell \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell & \xrightarrow{\mathrm{cl}(\Gamma)} & R^i(p_{\mathcal{Y}})_!\mathbb{Q}_\ell \end{array}$$

□

Théorème A.13 (Formule des traces de Grothendieck). – *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux champs sereins, propres et lisses de même dimension relative d sur un schéma S quasi-projectif lisse sur $\mathbb{F}_q$, Γ une correspondance dans $\mathfrak{X} \times_S \mathcal{Y}$ et $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dont on note Γ_f le graphe.*

Alors on a dans le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur S l'égalité

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\times_S\mathcal{Y}/S}(\mathrm{cl}(\Gamma) \smile \mathrm{cl}(\Gamma_f))\\ &\quad= \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \,\mathrm{Tr}_{R^i(p_{\mathcal{Y}})_!\mathbb{Q}_\ell}(f_* \circ \mathrm{cl}(\Gamma))\\ &\quad= \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \,\mathrm{Tr}_{R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{cl}(\Gamma) \circ f_*).\end{aligned}$$

□

c) Formule des points fixes pour l'endomorphisme de Frobenius

Nous terminons par :

Théorème A.14. – *Soient $\mathfrak{X}$ un champ serein compactifiable sur un schéma de base S de type fini sur $\mathbb{F}_q$, s un point fermé de S et $n \geq 1$ un multiple de* $\deg(s)$.

Alors on a

$$\sum_i (-1)^i \,\mathrm{Tr}_{\left[R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell\right]_s}(\mathrm{Frob}^n) = \sum_\xi \frac{1}{|\,\mathrm{Aut}(\xi)|}$$

où ξ décrit l'ensemble des points fixes de Frob^n *dans la fibre $\mathfrak{X} \times_S s$ de $\mathfrak{X}$ au-dessus de s et* $\mathrm{Aut}(\xi)$ *désigne le groupe fini des automorphismes du point fixe ξ et* $|\,\mathrm{Aut}(\xi)|$ *son cardinal.*

Démonstration : D'après le corollaire A.4 les fibres $[R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell]_s$ au point s des faisceaux de cohomologie à supports compacts $R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell$ sont les espaces de cohomologie ℓ-adique à supports compacts de la fibre $\mathfrak{X} \times_S s$. On peut donc supposer $S = s = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$.

Il est certainement possible d'écrire le champ $\mathfrak{X}$ comme la réunion disjointe d'un ensemble fini de strates localement fermées au-dessus desquelles le groupe des automorphismes est plat. Et d'après le corollaire 10.8 de [Laumon, Moret-Bailly], chacune de ces strates est alors une gerbe sur son espace grossier.

Le lemme A.15 ci-dessous autorise un raisonnement par dévissage et on se trouve ramené au cas où $\mathfrak{X}$ est une gerbe sur son espace grossier $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ dont le groupe de structure est fini et plat.

Le champ $\mathfrak{X}$ a même cohomologie à supports compacts que $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ et tout point fixe de Frob dans $\mathfrak{X}$ en induit un dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$. Comme la formule cherchée est déjà connue (grâce à Grothendieck) pour les espaces $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$, on est ramené au cas où $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}} = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$ et $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}$ est le classifiant d'un schéma en groupes fini G sur $\mathbb{F}_q$. Si on remplace G par sa partie étale, on ne change pas l'ensemble des points fixes ni les cardinaux de leurs groupes d'automorphismes donc on peut supposer que G est étale sur $\mathbb{F}_q$.

Le groupe fini $\overline{G} = G(\overline{\mathbb{F}}_q)$ agit sur lui-même par la conjugaison tordue par $\tau = \mathrm{Frob}$

$$(g, a) \mapsto \tau(g)\, a\, g^{-1}$$

et la formule voulue est la “formule des classes” associée à cette action. □

Lemme A.15. – *Soit $\mathfrak{X}$ un champ serein compactifiable sur un schéma de base S de type fini sur $\mathbb{F}_q$.*

Alors, si $\mathfrak{X}_\emptyset$ est un ouvert de $\mathfrak{X}$ et $\partial\mathfrak{X}$ le fermé complémentaire, on a une suite exacte longue de cohomologie à supports compacts

$$\cdots R^i(p_{\mathfrak{X}_\emptyset})_!\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \to R^i(p_{\partial\mathfrak{X}})_!\mathbb{Q}_\ell \to R^{i+1}(p_{\mathfrak{X}_\emptyset})_!\mathbb{Q}_\ell \to \cdots$$

Démonstration : En effet, $\mathfrak{X}_\emptyset^{\mathrm{gr}}$ s'identifie à un ouvert de $\mathfrak{X}^{\mathrm{gr}}$ et le morphisme naturel de $(\partial\mathfrak{X})^{\mathrm{gr}}$ sur le fermé complémentaire est fini, surjectif et radiciel. □

Appendice B

Fonctions L de paires automorphes et théorème réciproque

Dans la partie finale de la démonstration de la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions au chapitre VI, les fonctions L de paires de représentations tant automorphes que galoisiennes jouent un rôle essentiel dans les deux sens. Cela n'est pas très étonnant si l'on songe que cette correspondance a été formulée par Langlands en demandant que les fonctions L soient préservées. Nous rassemblons dans cet appendice toutes les propriétés des fonctions L de paires de représentations automorphes dont nous avons besoin.

Quand on veut aller des représentations automorphes vers les représentations galoisiennes, les arguments de fonctions L de paires servent à séparer dans la cohomologie des champs modulaires de chtoucas et de leurs compactifications la partie "essentielle" de la partie "négligeable". On a besoin de savoir définir les fonctions L de paires de représentations automorphes cuspidales, de savoir aussi que ce sont des fractions rationnelles (vérifiant certaines équations fonctionnelles) et de pouvoir situer leurs pôles et zéros ainsi que les valeurs propres de Hecke en les places non ramifiées. Tous ces résultats sont démontrés dans les articles de Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shahidi et Shalika cités en bibliographie et nous les résumons ici.

On doit aussi montrer que si les facteurs L et ε d'une paire de représentations automorphes cuspidales et d'une paire de représentations galoisiennes irréductibles coïncident en presque toutes les places, alors ils coïncident en toutes les places. On rappelle les arguments pour cela, lesquels sont dus à Henniart et utilisent le calcul des facteurs L locaux à partir de la classification de Bernstein et Zelevinski.

En sens inverse, on invoque le "principe de récurrence de Deligne" qui consiste à combiner les équations fonctionnelles de Grothendieck pour les fonctions L de représentations galoisiennes et la formule du produit de Laumon pour les constantes de ces équations fonctionnelles avec un des "théorèmes réciproques" de Piatetski-Shapiro (généralisant Hecke et Weil en tous rangs). Ces "théorèmes réciproques" sont démontrés dans la prépublication [Piatetski-Shapiro, 1976] dans le cas des corps de fonctions et publiés dans l'article [Cogdell, Piatetski-Shapiro, 1994]. Mais cet article, qui traite simultanément le cas des corps de nombres, fait partout l'hypothèse que les produits eulériens qui définissent les fonctions L considérées convergent absolument dans un demi-plan et nous voulons la remplacer par celle, mieux adaptée au cas des corps de fonctions, que les séries formelles définies par ces produits eulériens représentent des fractions rationnelles. Pour cette raison, nous reproduisons les arguments de la prépublication originale de Piatetski-Shapiro, tout en copiant largement l'article [Cogdell, Piatetski-Shapiro, 1994].

On désigne toujours par X une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur le corps $\mathbb{F}_q$ fini à q éléments, par $|X|$ l'ensemble de ses points fermés, par F son corps des fonctions et par $\mathbb{A} = \prod_{x\in|X|} F_x$ l'anneau des adèles de F.

1) Fonctions L de paires de représentations adéliques

a) Facteurs L *et* ε *locaux*

Pour $x \in |X|$ une place quelconque de F, on appelle facteur eulérien en x toute fraction rationnelle $\mathrm{L}_x(Z)$ dont l'inverse $\mathrm{L}_x(Z)^{-1}$ est un polynôme en la variable $Z^{\deg(x)}$ dont le terme constant est égal à 1 ; on appelle facteur ε en x tout produit $\varepsilon_x(Z)$ d'une constante non nulle et d'une puissance positive ou négative de $Z^{\deg(x)}$. On remarque dès à présent qu'on peut associer une "fonction L globale"

$$\mathrm{L}(Z) = \prod_{x\in|X|} \mathrm{L}_x(Z),$$

bien définie en tant que série formelle en Z, à toute collection $(\mathrm{L}_x(Z))_{x\in|X|}$ de facteurs eulériens locaux, et un "facteur ε global"

$$\varepsilon(Z) = \prod_{x\in|X|} \varepsilon_x(Z)$$

à toute collection $(\varepsilon_x(Z))_{x\in|X|}$ de facteurs ε locaux qui valent 1 en dehors d'un nombre fini de places.

On choisit une fois pour toutes un caractère additif non trivial ψ de $\mathbb{A}/F$. Il a des composantes ψ_x, $x \in |X|$, qui sont des caractères additifs non triviaux des F_x.

On considère deux représentations admissibles factorisables $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$ et $\pi' = \bigotimes_{x\in|X|} \pi'_x$ des groupes adéliques $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$ de rangs $r, r' \geq 1$. Les facteurs locaux π_x et π'_x sont non ramifiés et irréductibles en presque toute place $x \in |X|$. On suppose qu'ils sont tous irréductibles ou induits de type de Whittaker ; en particulier, ils ont des caractères centraux χ_{π_x} et $\chi_{\pi'_x}$ et π et π' ont des caractères centraux $\chi_\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \chi_{\pi_x}$ et $\chi_{\pi'} = \bigotimes_{x\in|X|} \chi_{\pi'_x}$. La théorie locale des fonctions L pour les $\mathrm{GL}_r(F_x)$ (voir le théorème 2.7

de [Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika]) permet d'associer à chaque couple (π_x, π'_x) un facteur eulérien

$$\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)$$

et un facteur ε

$$\varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x).$$

En faisant le produit, on obtient la "fontion L" globale de π et π'

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) = \prod_{x \in |X|} \mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)$$

qui est une série formelle, et aussi le "facteur ε" global

$$\varepsilon(\pi \times \pi', Z) = \prod_{x \in |X|} \varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x)$$

qui est bien défini puisque $\varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x) = 1$ en toute place $x \in |X|$ où π_x, π'_x et ψ_x sont non ramifiées. On a omis ψ de la notation $\varepsilon(\pi \times \pi', Z)$ car, s'il est vrai que chaque facteur local $\varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x)$ dépend de la composante ψ_x, le produit $\varepsilon(\pi \times \pi', Z)$ ne dépend pas du choix du caractère additif non trivial ψ de $\mathbb{A}/F$.

Si π_x [resp. π'_x] est irréductible et non ramifiée, et comme on a rappelé au paragraphe I.2d, elle est naturellement indexée par ses "valeurs propres de Hecke" $z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$ [resp. $z_1(\pi'_x), \ldots, z_{r'}(\pi'_x)$] lesquelles sont bien définies à permutation près. De même, un caractère non ramifié χ_x de $\mathrm{GL}_1(F_x)$ est caractérisé par sa valeur propre de Hecke $z(\chi_x)$.

Lemme B.1. *– Soit $x \in |X|$ une place où π_x et π'_x sont irréductibles et non ramifiées et soient χ_x et χ'_x deux caractères de $\mathrm{GL}_1(F_x)$. Alors :*

(i) *Le facteur $\mathrm{L}_x(\chi_x\pi_x \times \chi'_x\pi'_x, Z)$ est égal à*

$$\begin{cases} \prod\limits_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r'}} \left(1 - z(\chi_x\chi'_x)^{-1} z_i(\pi_x)^{-1} z_j(\pi'_x)^{-1} Z^{\deg(x)}\right)^{-1} & \text{si } \chi_x\chi'_x \text{ est non ramifié,} \\ 1 & \text{si au contraire } \chi_x\chi'_x \text{ est ramifié.} \end{cases}$$

(ii) *Le facteur $\varepsilon_x(\chi_x\pi_x \times \chi'_x\pi'_x, Z, \psi_x)$ est égal à*

$$\varepsilon_x(\chi_x\chi'_x, Z, \psi_x)^{rr'-1} \varepsilon_x\left(\chi_x\chi'_x\chi_{\pi_x}^{r'}\chi_{\pi'_x}^{r}, Z, \psi_x\right).$$

Il vaut 1 quand χ_x, χ'_x et aussi ψ_x sont non ramifiés. □

On voit qu'en les places non ramifiées, les pôles des facteurs L locaux sont déterminés par les valeurs propres de Hecke. Afin de les situer, on dispose de l'estimation suivante de Jacquet et Shalika :

Proposition B.2. – *Pour $x \in |X|$, on suppose que π_x est une représentation lisse, irréductible et non ramifiée de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Si π_x est unitaire et admet un modèle de Whittaker, ses valeurs propres de Hecke vérifient*

$$q^{-1/2} < |z_i(\pi_x)|^{\frac{1}{\deg(x)}} < q^{1/2}\,,\ 1 \leq i \leq r\,.$$

□

D'autre part, on aura également besoin du résultat suivant de Henniart qui complète partiellement le lemme B.1 (c'est le lemme 4.2(3)(4) de [Henniart, 1986]) :

Lemme B.3. – *Soit $x \in |X|$ une place arbitraire. Si χ_x et χ'_x sont deux caractères de $\mathrm{GL}_1(F_x)$ tels que $\chi_x\chi'_x$ soit suffisamment ramifié en fonction de π_x et π'_x, on a*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_x(\chi_x\pi_x \times \chi'_x\pi'_x, Z) = 1,\\
&\varepsilon_x(\chi_x\pi_x \times \chi'_x\pi'_x, Z, \psi_x) = \varepsilon_x(\chi_x\chi'_x, Z, \psi_x)^{rr'-1}\varepsilon_x\big(\chi_x\chi'_x\chi_{\pi_x}^{r'}\chi_{\pi'_x}^{r}, Z, \psi_x\big).
\end{aligned}$$

□

b) Classification de Bernstein et Zelevinski et facteurs L *locaux*

On fixe une place $x \in |X|$.

Rappelons d'abord à grands traits la classification par Bernstein et Zelevinski des représentations lisses irréductibles des groupes linéaires locaux $\mathrm{GL}_r(F_x)$, telle qu'elle est exposée par exemple dans [Rodier, 1982].

De façon générale, si ρ est une représentation lisse d'un $\mathrm{GL}_a(F_x)$ et s est un nombre réel, on note $\rho(s)$ la représentation lisse de $\mathrm{GL}_r(F_x)$

$$\rho(s) = \rho \otimes q^{-s\deg(x)x\circ\det(\cdot)}$$

déduite de ρ par torsion par le caractère non ramifié de valeur propre de Hecke $q^{-s\deg(x)}$.

On appelle segment un ensemble de représentations supercuspidales irréductibles d'un $\mathrm{GL}_a(F_x)$ de la forme $\{\rho, \rho(1), \dots, \rho(\delta-1)\} = \Delta$. La représentation lisse de $\mathrm{GL}_{a\delta}(F_x)$ induite parabolique de $\rho \times \rho(1) \times \cdots \times \rho(\delta-1)$ admet un unique quotient irréductible noté $L(\Delta)$.

On dit que deux segments Δ_1 et Δ_2 sont liés si $\Delta_1 \not\subseteq \Delta_2$, $\Delta_2 \not\subseteq \Delta_1$ et $\Delta_1 \cup \Delta_2$ est un segment. Si $\Delta_1 = \{\rho_1, \dots, \rho_1(\delta_1-1)\}$ et $\Delta_2 = \{\rho_2, \dots, \rho_2(\delta_2-1)\}$ sont liés, on dit que Δ_1 précède Δ_2 s'il existe un entier $\delta \geq 1$ tel que $\rho_2 = \rho_1(\delta)$.

Théorème B.4. – (i) *Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ des segments. Supposons que pour $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j. Alors la représentation induite parabolique de $L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_k)$ admet un unique quotient irréductible noté $L(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$.*

(ii) *Les représentations* $L(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$ *et* $L(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{k'})$ *sont équivalentes si et seulement si les suites* $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ *et* $\Delta'_1, \dots, \Delta'_{k'}$ *sont égales à l'ordre près.*

(iii) *Toute représentation lisse irréductible d'un* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *est de la forme* $L(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$. □

Les paragraphes 8 et 9 de l'article [Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika] donnent le calcul général des facteurs L locaux :

Théorème B.5. – (i) *Si* π_x *et* π'_x *sont deux représentations lisses irréductibles de* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *et* $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ *écrites sous la forme* $\pi_x = L(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$ *et* $\pi'_x = L(\Delta'_1, \dots, \Delta'_\ell)$*, on a*

$$\mathrm{L}(\pi_x \times \pi'_x, Z) = \prod_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le \ell}} \mathrm{L}(L(\Delta_i) \times L(\Delta'_j), Z),$$

$$\mathrm{L}(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z) = \prod_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le \ell}} \mathrm{L}(L(\Delta_i)^\vee \times L(\Delta'_j)^\vee, Z).$$

(ii) *Si* $\Delta = \{\rho, \dots, \rho(\delta - 1)\}$ *et* $\Delta' = \{\rho', \dots, \rho'(\delta' - 1)\}$ *sont deux segments avec* $\delta' \le \delta$*, on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(L(\Delta) \times L(\Delta'), Z) &= \mathrm{L}(\rho(\delta - 1) \times \rho', Z)\mathrm{L}(\rho(\delta - 1) \times \rho'(1), Z) \\ &\qquad \cdots \mathrm{L}(\rho(\delta - 1) \times \rho'(\delta' - 1), Z) \\ \mathrm{L}(L(\Delta)^\vee \times L(\Delta')^\vee, Z) &= \mathrm{L}(\check{\rho} \times \check{\rho}', Z)\mathrm{L}(\check{\rho} \times \check{\rho}'(-1), Z) \\ &\qquad \cdots \mathrm{L}(\check{\rho} \times \check{\rho}'(1 - \delta'), Z) \end{aligned}$$

(iii) *Si* ρ *et* ρ' *sont deux représentations lisses irréductibles supercuspidales de* $\mathrm{GL}_a(F_x)$ *et* $\mathrm{GL}_{a'}(F_x)$*, on a*

$$\mathrm{L}(\rho \times \rho', Z) = \prod_z (1 - z^{-1} Z^{\deg(x)})^{-1}$$

$$\mathrm{L}(\check{\rho} \times \check{\rho}', Z) = \prod_z (1 - z Z^{\deg(x)})^{-1}$$

où z *décrit l'ensemble des scalaires non nuls tels que les représentations*

$$\rho \otimes z^{x \circ \det(\cdot)} \quad \textit{et} \quad \check{\rho}'$$

soient équivalentes.

Remarque : Bien sûr, pour que l'ensemble des z de la partie (iii) ne soit pas vide, il faut en particulier que $a = a'$. □

Connaissant ces formules générales pour le calcul des facteurs L locaux de paires, on peut maintenant vouloir situer les pôles de celles-ci.

Si π_x est une représentation lisse admissible d'un $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui admet un caractère central χ_{π_x}, on note $|\pi_x|$ l'unique caractère non ramifié

$\mathrm{GL}_1(F_x) \to \mathbb{R}_+^\times$ tel que le caractère central de $\pi_x \otimes |\pi_x|^{-1}$ soit unitaire ; on a $|\pi_x| = |\chi_{\pi_x}|^{1/r}$. Ceci s'applique en particulier quand π_x est irréductible.

On sait que pour toute représentation ρ supercuspidale irréductible, $\rho \otimes |\rho|^{-1}$ est unitaire. Si $\Delta = \{\rho, \ldots, \rho(\delta - 1)\}$ est un segment, on note $|\Delta| = |\rho(\frac{\delta-1}{2})|$; on a bien sûr $|\Delta| = |L(\Delta)|$ et on montre que $L(\Delta) \otimes |\Delta|^{-1}$ est unitaire (et même de carré intégrale).

Une représentation lisse irréductible $L(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k)$ est dite tempérée quand $|\Delta_1| = 1, |\Delta_2| = 1, \ldots, |\Delta_k| = 1$.

S'agissant des représentations unitaires, on a l'estimée suivante de Tadić qui généralise celle de Jacquet et Shalika :

Proposition B.6. – *Si $\pi_x = L(\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ est une représentation lisse irréductible unitaire d'un $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui admet un modèle de Whittaker, les valeurs propres de Hecke $z(|\Delta_i|)$ des caractères non ramifiés $|\Delta_i|$, $1 \le i \le k$, vérifient*

$$q^{-1/2} < |z(|\Delta_i|)|^{1/\deg(x)} < q^{1/2} .$$

□

Du théorème B.5 et de la proposition B.6 ci-dessus, on déduit :

Corollaire B.7. – *Soient π_x et π'_x deux représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ qui admettent des modèles de Whittaker. Alors :*

(i) *Si toutes deux sont tempérées, tous les pôles des facteurs* L *locaux* $\mathrm{L}(\pi_x \times \pi'_x, Z)$ *et* $\mathrm{L}(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z)$ *sont dans la zone*

$$|Z| \ge 1 .$$

(ii) *Si l'une est tempérée et l'autre est unitaire, tous les pôles de ces facteurs* L *locaux sont dans la zone*

$$|Z| > q^{-\frac{1}{2}} .$$

□

c) Les équations fonctionnelles locales

On considère deux représentations lisses admissibles π_x et π'_x de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ en une place $x \in |X|$. On suppose qu'elles sont induites de type de Whittaker ; elles ont donc des modèles de Whittaker notés $\mathcal{W}(\pi_x, \psi_x)$ et $\mathcal{W}(\pi'_x, \psi_x^{-1})$ qui consistent en des espaces de fonctions sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ sur lesquels les groupes $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ agissent par la translation à droite $(W, g) \mapsto W \cdot g$.

Etant données deux fonctions lisses $W_x(g) \in \mathcal{W}(\pi_x, \psi_x)$ et $W'_x(h) \in \mathcal{W}(\pi'_x, \psi_x^{-1})$ dans les modèles de Whittaker, on peut leur associer l'intégrale

$$\Psi(W_x, W'_x, Z) = \int_{N_{r-1}(F_x)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dh \cdot W_x \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W'_x(h) q^{\frac{1}{2}\deg(x) x \circ \det(h)} Z^{\deg(x) x \circ \det(h)}$$

où N_{r-1} désigne le radical unipotent du sous-groupe de Borel B_{r-1} de GL_{r-1} constitué des matrices triangulaires supérieures, dh est le quotient des deux mesures de Haar sur $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ et $N_{r-1}(F_x)$ qui attribuent le volume 1 à $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$ et $N_{r-1}(O_x)$ et $x : F_x^\times \to \mathbb{Z}$ est la valuation qui envoie les uniformisantes sur 1. Cette intégrale est bien définie en tant que série formelle de Laurent en l'indéterminée $Z^{\deg(x)}$.

On introduit encore les matrices w_r et w_{r-1} de rangs r et $r-1$ qui sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

puis, à partir de W_x et W'_x, les fonctions sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ définies par

$$\widetilde{W}_x(g) = W_x\big(w_r\, {}^t g^{-1}\big),$$

$$\widetilde{W}'_x(h) = W'_x\big(w_{r-1}\, {}^t h^{-1}\big).$$

Ce sont des fonctions lisses dans les modèles de Whittaker $\mathcal{W}(\check{\pi}_x, \psi_x^{-1})$ et $\mathcal{W}(\check{\pi}'_x, \psi_x)$ des représentations contragrédientes $\check{\pi}_x$ et $\check{\pi}'_x$ de π_x et π'_x.

Théorème B.8. – *Dans la situation et avec les notations ci-dessus, on a :*

(i) *Les séries formelles de Laurent en* $Z^{\deg(x)}$

$$\Psi(W_x, W'_x, Z) \quad et \quad \Psi\big(\widetilde{W}_x, \widetilde{W}'_x, Z\big)$$

sont en fait des fractions rationnelles. Plus précisément, les quotients

$$\frac{\Psi(W_x, W'_x, Z)}{\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)} \quad et \quad \frac{\Psi\big(\widetilde{W}_x, \widetilde{W}'_x, Z\big)}{\mathrm{L}_x(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z)}$$

sont des polynômes en $Z^{\deg(x)}$.

(ii) *Ceux-ci satisfont l'équation fonctionnelle*

$$\frac{\Psi(W_x, W'_x, Z)}{\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)} \varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x)\chi_{\pi'_x}(-1)^{r-1} = \frac{\Psi\big(\widetilde{W}_x, \widetilde{W}'_x, \frac{1}{qZ}\big)}{\mathrm{L}_x\big(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, \frac{1}{qZ}\big)}$$

(iii) *Si π_x et π'_x sont non ramifiées et les fonctions W_x et W'_x sont invariantes à droite par $\mathrm{GL}_r(O_x)$ et $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$ et valent 1 en les unités I_r et I_{r-1}, on peut calculer*

$$\Psi(W_x, W'_x, Z) = \mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z),$$

$$\Psi\big(\widetilde{W}_x, \widetilde{W}'_x, Z\big) = \mathrm{L}_x(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z).$$

□

d) Propriétés globales des fonctions L *de paires automorphes*

Dans ce paragraphe, on considère des représentations admissibles irréductibles $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$ et $\pi' = \bigotimes_{x\in|X|} \pi'_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$ qui sont automorphes c'est-à-dire se représentent comme sous-quotients de l'espace des formes automorphes sur $\mathrm{GL}_r(F)\backslash\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. Il en est alors de même de leurs représentations contragrédientes $\check{\pi} = \bigotimes_{x\in|X|} \check{\pi}_x$ et $\check{\pi}' = \bigotimes_{x\in|X|} \check{\pi}'_x$.

On peut leur associer des facteurs L et ε locaux

$$\mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)\ ,\ \mathrm{L}_x(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z) \text{ et } \varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x)$$

puis un facteur ε global

$$\varepsilon(\pi \times \pi', Z) = \prod_{x\in|X|} \varepsilon_x(\pi_x \times \pi'_x, Z, \psi_x)$$

et des fonctions L globales

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) = \prod_{x\in|X|} \mathrm{L}_x(\pi_x \times \pi'_x, Z)$$

$$\mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}', Z) = \prod_{x\in|X|} \mathrm{L}_x(\check{\pi}_x \times \check{\pi}'_x, Z)$$

qui sont bien définies en tant que séries formelles en la variable Z.

Théorème B.9 (Piatetski-Shapiro). – *Soient $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$ et $\pi' = \bigotimes_{x\in|X|} \pi'_x$ deux représentations automorphes irréductibles de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *et* $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$ *comme ci-dessus. Alors :*

(i) *Les séries formelles*

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) \quad \textit{et} \quad \mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}', Z)$$

sont en fait des fractions rationnelles en l'indéterminée Z.

(ii) *Ces fractions rationnelles vérifient l'équation fonctionnelle globale*

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) = \varepsilon(\pi \times \pi', Z)\, \mathrm{L}\left(\check{\pi} \times \check{\pi}', \frac{1}{qZ}\right).$$

(iii) *Si la représentation automorphe π est cuspidale et si $r' < r$, les fractions rationnelles*

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) \quad \textit{et} \quad \mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}', Z)$$

sont en fait des polynômes. □

Si X' est un ouvert non vide de la courbe X, on peut aussi former la “fonction L partielle”

$$\mathrm{L}_{X'}(\pi \times \check{\pi}', Z) = \prod_{x\in|X'|} \mathrm{L}_x(\pi_x \times \check{\pi}'_x, Z)$$

qui ne diffère de la fonction L globale

$$\mathrm{L}(\pi \times \check{\pi}', Z) = \prod_{x\in|X|} \mathrm{L}_x(\pi_x \times \check{\pi}'_x, Z)$$

que par la famille finie des facteurs locaux indexés par les places $x \in |X|$ situées en dehors de X'. La série formelle $\mathrm{L}_{X'}(\pi \times \check{\pi}', Z)$ est donc aussi une fraction rationnelle en la variable Z.

On a encore :

Théorème B.10 (Jacquet, Shahidi, Shalika). – *Soient* $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$ *et* $\pi' = \bigotimes_{x\in|X|} \pi'_x$ *deux représentations automorphes cuspidales unitaires (irréductibles) de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *et* $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$ *dont les facteurs locaux* π_x *et* π'_x *sont non ramifiés en tous les points* $x \in |X'|$ *d'un ouvert* X' *de la courbe* X. *Alors :*

(i) *Dans la zone*

$$|Z| \leq q^{-1}\,,$$

la fonction L *partielle*

$$\mathrm{L}_{X'}(\pi \times \check{\pi}', Z)$$

n'a pas de zéro.

(ii) *Dans cette zone* $|Z| \leq q^{-1}$, *tous les pôles de* $\mathrm{L}_{X'}(\pi \times \check{\pi}', Z)$ *sont simples : ce sont exactement les éléments* z *de module* $|z| = q^{-1}$ *tels que les représentations* $\pi' \otimes (qz)^{\deg(\cdot)}$ *et* π *soient isomorphes (avec donc* $r = r'$*).* □

e) Unicité du prolongement aux places ramifiées

Nous donnons ici l'argument de Henniart qui montre que si deux systèmes de facteurs L et ε locaux vérifient les propriétés attendues des fonctions L et coïncident en presque toutes les places, alors ils coïncident en toutes les places.

Proposition B.11. – *Supposons qu'à toute place* $x \in |X|$ *et à toute paire de caractères d'ordre fini* χ_x, χ'_x *de* F_x^*, *on ait associé deux triplets de facteurs* L *et* ε *en* x

$$\mathrm{L}^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z),\ \mathrm{L}^{\vee 1}_x(\chi_x, \chi'_x, Z) \text{ et } \varepsilon^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x),$$
$$\mathrm{L}^2_x(\chi_x, \chi'_x, Z),\ \mathrm{L}^{\vee 2}_x(\chi_x, \chi'_x, Z) \text{ et } \varepsilon^2_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x)$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) *Il existe un ensemble fini S de places de $|X|$ tel que pour toute paire de caractères χ_x, χ'_x en une place $x \notin S$, on ait*

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z) &= \mathrm{L}^2_x(\chi_x, \chi'_x, Z),\\
\mathrm{L}^{\vee 1}_x(\chi_x, \chi'_x, Z) &= \mathrm{L}^{\vee 2}_x(\chi_x, \chi'_x, Z),\\
\varepsilon^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x) &= \varepsilon^2_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x).
\end{aligned}$$

(2) *En chaque place $x \in S$, ces mêmes égalités sont vraies dès que χ_x et χ'_x sont deux caractères dont le produit $\chi_x\chi'_x$ est suffisamment ramifié.*

(3) *Pour tous caractères $\chi = \bigotimes_{x\in|X|} \chi_x$ et $\chi' = \bigotimes_{x\in|X|} \chi'_x$ d'ordre fini de $\mathbb{A}^\times/F^\times$, les séries formelles*

$$\mathrm{L}^1(\chi, \chi', Z) = \prod_x \mathrm{L}^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z) \qquad \mathrm{L}^{\vee 1}(\chi, \chi', Z) = \prod_x \mathrm{L}^{\vee 1}(\chi_x, \chi'_x, Z)$$

$$\mathrm{L}^2(\chi, \chi', Z) = \prod_x \mathrm{L}^2_x(\chi_x, \chi'_x, Z) \qquad \mathrm{L}^{\vee 2}(\chi, \chi', Z) = \prod_x \mathrm{L}^{\vee 2}(\chi_x, \chi'_x, Z)$$

définissent des fractions rationnelles ; les produits

$$\varepsilon^1(\chi, \chi', Z) = \prod_x \varepsilon^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x) \quad \varepsilon^2(\chi, \chi', Z) = \prod_x \varepsilon^2_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x)$$

sont finis, et on a les deux équations fonctionnelles

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^1(\chi, \chi', Z) &= \varepsilon^1(\chi, \chi', Z)\mathrm{L}^{\vee 1}\left(\chi, \chi', \frac{1}{qZ}\right),\\
\mathrm{L}^2(\chi, \chi', Z) &= \varepsilon^2(\chi, \chi', Z)\mathrm{L}^{\vee 2}\left(\chi, \chi', \frac{1}{qZ}\right).
\end{aligned}$$

Alors on peut conclure qu'en toute place $x \in |X|$, on a

$$\frac{\varepsilon^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x)\mathrm{L}^{\vee 1}_x\big(\chi_x, \chi'_x, \frac{1}{qZ}\big)}{\mathrm{L}^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z)} = \frac{\varepsilon^2_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x)\mathrm{L}^{\vee 2}_x\big(\chi_x, \chi'_x, \frac{1}{qZ}\big)}{\mathrm{L}^2_x(\chi_x, \chi'_x, Z)}\,.$$

Remarque : Pour $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$ et $\pi' = \bigotimes_{x\in|X|} \pi'_x$ deux représentations automorphes irréductibles de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, on voudra appliquer cette proposition avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z) &= \mathrm{L}_x(\chi_x\pi_x \times \chi'_x\pi'_x, Z),\\
\mathrm{L}^{\vee 1}_x(\chi_x, \chi'_x, Z) &= \mathrm{L}_x(\chi_x^{-1}\check{\pi}_x \times \chi'^{-1}_x\check{\pi}'_x, Z),\\
\varepsilon^1_x(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x) &= \varepsilon_x(\chi_x\pi_x \times \chi'_x\pi'_x, Z, \psi_x).
\end{aligned}$$

De ce côté, l'hypothèse (1) sera vérifiée grâce au lemme B.1, l'hypothèse (2) grâce au lemme B.3 et l'hypothèse (3) grâce au théorème B.9.

Démonstration de la proposition : Il y a quelque chose à montrer seulement en les places $x \in S$. Ayant fixé deux caractères d'ordre fini χ_x et χ'_x en une telle place, on choisit en les autres places $y \in S$ des caractères χ_y et χ'_y d'ordre fini dont le produit $\chi_y \chi'_y$ est suffisamment ramifié pour que la conclusion de (2) soit vérifiée. Il existe certainement deux caractères d'ordre fini χ et χ' de $\mathbb{A}^\times / F^\times$ dont les composantes en les places de S soient égales à χ_x, χ'_x et aux χ_y, χ'_y. La conclusion s'en déduit. □

Cette proposition se prolonge immédiatement de la manière suivante :

Corollaire B.12. – *Dans les conditions et sous les hypothèses de la proposition* B.11 *ci-dessus, supposons que pour χ_x, χ'_x deux caractères d'ordre fini en une place arbitraire $x \in |X|$, on sache que les fractions rationnelles $\mathrm{L}_x^1(\chi_x, \chi'_x, Z)$ et $\mathrm{L}_x^{\vee 1}(\chi_x, \chi'_x, \frac{1}{qZ})$ n'ont pas de pôle commun, non plus que $\mathrm{L}_x^2(\chi_x, \chi'_x, Z)$ et $\mathrm{L}_x^{\vee 2}(\chi_x, \chi'_x, \frac{1}{qZ})$.*

Alors on peut conclure

$$\mathrm{L}_x^1(\chi_x, \chi'_x, Z) = \mathrm{L}_x^2(\chi_x, \chi'_x, Z)\ ,\ \mathrm{L}_x^{\vee 1}(\chi_x, \chi'_x, Z) = \mathrm{L}_x^{\vee 2}(\chi_x, \chi'_x, Z),$$

$$\varepsilon_x^1(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x) = \varepsilon_x^2(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x).$$

Remarque : Dans la situation de la remarque qui suit l'énoncé de la proposition

$$\mathrm{L}_x^1(\chi_x, \chi'_x, Z) = \mathrm{L}_x(\chi_x \pi_x \times \chi'_x \pi'_x, Z),$$
$$\mathrm{L}_x^{\vee 1}(\chi_x, \chi'_x, Z) = \mathrm{L}_x(\chi_x^{-1} \check{\pi}_x \times \chi_x'^{-1} \check{\pi}'_x, Z),$$

$$\varepsilon_x^1(\chi_x, \chi'_x, Z, \psi_x) = \varepsilon_x(\chi_x \pi_x \times \chi'_x \pi'_x, Z, \psi_x),$$

le corollaire B.7 implique que l'hypothèse supplémentaire du corollaire ci-dessus est vérifiée d'un côté si les deux représentations locales π_x et π'_x ont un modèle de Whittaker et si elles sont tempérées ou l'une est tempérée et l'autre est unitaire. □

2) Un théorème réciproque de Piatetski-Shapiro

a) L'énoncé

Nous allons rappeler la démonstration du théorème suivant dont nous avons besoin :

Théorème B.13. – *Soient $r \geq 2$ un entier et $\pi = \bigotimes_{x \in |X|} \pi_x$ une représentation lisse admissible irréductible de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *dont chaque facteur π_x est une représentation de* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *induite de type de Whittaker.*

On suppose que, pour un ensemble fini S de places $x \in |X|$, π vérifie les propriétés suivantes :

(1) *Le caractère central* $\chi_\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \chi_{\pi_x}$ *de* π *est invariant par le sous-groupe discret* $F^\times$ *de* $\mathbb{A}^\times$.

(2) *Pour tout entier* $r' < r$ *et toute représentation automorphe cuspidale irréductible* $\pi' = \bigotimes_{x\in|X|} \pi'_x$ *de* $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$ *non ramifiée en les places* $x \in S$, *les deux séries formelles*

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) \quad et \quad \mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}', Z)$$

sont des polynômes et elles satisfont l'équation fonctionnelle

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) = \varepsilon(\pi \times \pi', Z)\, \mathrm{L}\left(\check{\pi} \times \check{\pi}', \frac{1}{qZ}\right).$$

Alors il existe une représentation automorphe irréductible de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *dont les facteurs en toutes les places* $x \notin S$ *sont égaux aux facteurs* π_x *de* π. *Cette représentation est cuspidale si* $S = \emptyset$. □

La démonstration de ce théorème va occuper les prochains paragraphes.

Avant de commencer, rappelons que pour tout entier n, on a noté B_n le sous-groupe de Borel de GL_n constitué des matrices triangulaires supérieures et N_n son radical unipotent. On note aussi A_n le sous-groupe de Lévi de B_n constitué des matrices diagonales ; il contient le centre Z_n de GL_n constitué des matrices scalaires.

Enfin, on note $P_n \subseteq P'_n$ les sous-groupes de matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{c:c} & \vdots \\ * & * \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c:c} & \vdots \\ * & * \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 \cdots 0 & * \end{array}\right)$$

puis $\overline{P}_n = {}^t P_n^{-1}$ et $\overline{P}'_n = {}^t P_n'^{-1}$ les sous-groupes opposés.

b) Modèles de Whittaker globaux

On rappelle que pour la définition des facteurs ε locaux $\varepsilon_x(\cdot, Z, \psi_x)$ on a fait le choix d'un caractère additif non trivial ψ de $\mathbb{A}/F$ dont les ψ_x sont les composantes sur les F_x. Pour tout entier n, ψ et les ψ_x se prolongent en des caractères des groupes unipotents $N_n(\mathbb{A})$ et $N_n(F_x)$ qui associent à toute matrice $u = (u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ dans un tel groupe le scalaire

$$\psi(u) = \sum_{1\le i<n} \psi(u_{i,i+1}) \quad ou \quad \psi_x(u) = \sum_{1\le i<n} \psi_x(u_{i,i+1}).$$

Par hypothèse, chaque composante π_x de la représentation π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ admet un modèle de Whittaker $\mathcal{W}(\pi_x, \psi_x)$; c'est un espace de fonctions W_{ξ_x} sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$, indexées par les vecteurs ξ_x de π_x, invariantes à droite par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et qui vérifient

$$W_{\xi_x}(u_x g_x) = \psi_x(u_x) W_{\xi_x}(g_x), \ \forall g_x \in \mathrm{GL}_r(F_x), \ \forall u_x \in N_r(F_x).$$

En presque toute place $x \notin S$, le facteur π_x est non ramifié ; il a un vecteur non ramifié distingué ξ_x° auquel est associée une fonction distinguée $W_{\xi_x^\circ} \in \mathcal{W}(\pi_x, \psi_x)$ qui est invariante à droite par le sous-groupe ouvert compact maximal $\mathrm{GL}_r(O_x)$ et vaut 1 au point unité.

Considérons maintenant un vecteur ξ de $\pi = \bigotimes\limits_{x \in |X|} \pi_x$ qui est de la forme $\xi = \bigotimes \xi_x$; en presque toute place x, la composante ξ_x est égale à ξ_x°. La fonction sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$

$$W_\xi : g = (g_x)_{x \in |X|} \mapsto \prod_{x \in |X|} W_{\xi_x}(g_x)$$

est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et elle vérifie

$$W_\xi(ug) = \psi(u) W_\xi(g), \ \forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}), \ \forall u \in N_r(\mathbb{A}).$$

En particulier, elle est invariante à gauche par $N_r(F)$. Comme le caractère central χ_π de χ est trivial sur $F^\times$, elle est aussi invariante par $Z_r(F)$.

Elle vérifie :

Lemme B.14. *– Pour une telle fonction W_ξ sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, il existe des constantes $d_x \geq 0$, $x \in |X|$, presque toutes nulles, telles que pour tout élément $g = (g_x = u_x a_x k_x)_{x \in |X|}$, $u_x \in N_r(F_x)$, $a_x = (a_x^1, \ldots, a_x^r) \in Z_r(F_x) = (F_x^\times)^r$, $k_x \in \mathrm{GL}_r(O_x)$, vérifiant $W_\xi(g) \neq 0$, on ait*

$$x\big(a_x^i\big) - x\big(a_x^{i+1}\big) \geq -d_x \ , \ 1 \leq i < r \ .$$

Démonstration : Soit $K^\xi = \prod\limits_{x \in |X|} K_x^\xi$ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) = \prod\limits_{x \in |X|} \mathrm{GL}_r(O_x)$ par lequel la fonction W_ξ soit invariante à droite. Et soit $(d_x)_{x \in |X|}$ une famille de constantes très grandes en beaucoup de places en fonction de K^ξ (et du caractère ψ) et nulles en les autres places. Si $g = (g_x)$ est un élément de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui met en défaut les inégalités de l'énoncé en au moins une place $x \in |X|$ relativement à la constante d_x, on peut trouver un élément $n_x \in N_r(x)$ tel que $\psi_x(n_x) \neq 1$ et $g_x^{-1} n_x g_x \in K_x^\xi$ d'où

$$W_{\xi_x}(g_x) = W_{\xi_x}\big(g_x\big(g_x^{-1} n_x g_x\big)\big) = W_{\xi_x}(n_x g_x) = \psi_x(n_x) W_{\xi_x}(g_x)$$

ce qui implique $W_{\xi_x}(g_x) = 0$ et $W_\xi(g) = 0$. □

De ce lemme on déduit aussitôt :

Corollaire B.15. – *Pour tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, considérons la somme*

$$U_\xi(g) = \sum_{\gamma \in N_r(F)\backslash P_r(F)} W_\xi(\gamma g) = \sum_{\gamma' \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_\xi\left(\begin{pmatrix}\gamma' & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right).$$

Alors :

(i) *Pour tout $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, la somme ci-dessus est finie si bien que $U_\xi(g)$ est bien définie.*

(ii) *Pour tout degré $d \in \mathbb{Z}$, l'ensemble*

$$\left\{h \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \middle| U_\xi\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \neq 0 \ \wedge\ \deg(\det h) = d\right\}$$

est compact ; il est vide si d est assez grand.

Démonstration : (i) On voit d'après le lemme B.14 que pour tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, la fonction

$$h \mapsto W_\xi\left(\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)$$

est à support compact dans l'espace topologique

$$\{h \in N_{r-1}(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \mid \deg(\det h) = 0\}.$$

La conclusion résulte de ce que $N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)$ est une partie discrète de cet espace.

(ii) Si $h \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})$ vérifie $\deg(\det h) = d$ et $U_\xi\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \neq 0$, il résulte du lemme B.14 que le fibré de rang $r-1$ sur la courbe X associé à h admet une filtration dont tous les sous-quotients sont des fibrés de rang 1 et de degré borné. Donc le polygone canonique de Harder-Narasimhan de ce fibré est borné et h reste dans une partie compacte.

Il est évident que d ne peut pas être trop grand. □

Enfin, on montre :

Lemme B.16. – *Pour tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ tel que $W_\xi(g) \neq 0$, il existe un élément $u \in N_r(\mathbb{A})$ tel que $U_\xi(ug) \neq 0$. En particulier, si $\xi \neq 0$, U_ξ n'est pas identiquement nulle.*

Démonstration : Voir le lemme 6.3 de [Cogdell, Piatetski-Shapiro].

Par construction, la fonction $g \mapsto U_\xi(g)$ est invariante à gauche par $P_r(F)$ et $Z_r(F)$ et donc par le sous-groupe parabolique $P'_r(F)$ de $\mathrm{GL}_r(F)$ associé à la partition $(r-1, 1)$ de l'entier r. Comme W_ξ, elle est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

c) Construction opposée et lemme principal

Rappelant que, pour tout entier n, w_n désigne la matrice carrée de rang n qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix},$$

on note aussi

$$\alpha_n = w_n \begin{pmatrix} w_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{I}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la situation du paragraphe précédent, on associe encore à tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ la somme

$$V_\xi(g) = \sum_{\gamma \in N'_r(F) \backslash \overline{P}_r(F)} W_\xi(\alpha_r \gamma g) = \sum_{\gamma' \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_\xi\left(\alpha_r \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right).$$

Posant $\widetilde{W}_\xi(g) = W_\xi(w_r {}^t g^{-1})$, cette somme s'écrit également

$$V_\xi(g) = \sum_{\gamma' \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\xi'}\left(\begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g'\right)$$

où $g' = \alpha_r {}^t g^{-1} \alpha_r$ et $\xi' = \xi \cdot \alpha_r$. On déduit du corollaire B.15 que pour tout $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ cette somme est finie et que, pour tout $d \in \mathbb{Z}$, l'ensemble

$$\left\{ h \in \mathrm{GL}_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \mid V_\xi \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \wedge \deg(\det h) = d \right\}$$

est compact ; il est vide si d est assez petit.

La fonction $g \mapsto V_\xi(g)$ est invariante à gauche par $\overline{P}'_r(F)$ et elle est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Etant donnée φ une fonction automorphe sur $\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})$, on peut introduire les deux intégrales

$$I(\xi, \varphi; Z) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dh \cdot U_\xi \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(h) q^{-\frac{1}{2}\deg(h)} Z^{-\deg(h)}$$

$$\widetilde{I}(\xi, \varphi; Z) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dh \cdot V_\xi \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(h) q^{-\frac{1}{2}\deg(h)} Z^{-\deg(h)}$$

qui sont bien définies comme séries formelles de Laurent en les indéterminées Z et Z^{-1}.

En développant les sommes qui définissent U_ξ et V_ξ à partir de W_ξ et en utilisant la propriété de variance

$$W_\xi(ug) = \psi(u) W_\xi(g), \ \forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}), \ \forall u \in N_r(\mathbb{A}),$$

on calcule aussitôt :

Lemme B.17. – *On a l'égalité entre séries de Laurent*

$$I(\xi,\varphi;Z)=\Psi(W_\xi,W_\varphi;Z)$$
$$\widetilde{I}(\xi,\varphi;Z)=\Psi\left(\widetilde{W}_\xi,\widetilde{W}_\varphi;\frac{1}{qZ}\right)$$

où

$$W_\varphi(h)=\int_{N_{r-1}(F)\backslash N_{r-1}(\mathbb{A})}\varphi(uh)\psi(u)du\ ,\ \forall h\in \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}),$$
$$\widetilde{W}_\varphi(h)=W_\varphi\big(w_{r-1}{}^t h^{-1}\big)\ ,\ \widetilde{W}_\xi(g)=W_\xi\big(w_r{}^t g^{-1}\big),$$
$$\Psi(W,W';Z)=\int_{N_{r-1}(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})}dh\cdot W\begin{pmatrix}h&0\\0&1\end{pmatrix}W'(h)q^{-\frac12\deg(h)}Z^{-\deg(h)}.$$

□

d) Egalité des produits scalaires

Nous pouvons maintenant montrer :

Proposition B.18. – *Les hypothèses du théorème* B.13 *entraînent que pour tout vecteur* $\xi=(\xi_x)_{x\in|X|}$ *de la représentation* $\pi=\bigotimes_{x\in|X|}\pi_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *et pour toute fonction automorphe* φ *sur* $\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})$ *invariante à droite par un sous-groupe ouvert qui contient* $\prod_{x\in S}\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$, *on a*

$$I(\xi,\varphi,Z)=\widetilde{I}(\xi,\varphi,Z).$$

Démonstration : Pour tout entier $d\in\mathbb{Z}$, il s'agit de prouver l'égalité suivante entre intégrales sur le domaine $\{h\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}),\deg(h)=d\}$

$$\int dh\cdot U_\xi\begin{pmatrix}h&0\\0&1\end{pmatrix}\varphi(h)=\int dh\cdot V_\xi\begin{pmatrix}h&0\\0&1\end{pmatrix}\varphi(h).$$

On sait que les fonctions $h\mapsto U_\xi\begin{pmatrix}h&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $h\mapsto V_\xi\begin{pmatrix}h&0\\0&1\end{pmatrix}$ sont localement constantes à support compact sur ce domaine. D'après la théorie des séries d'Eisenstein développée par Langlands, il suffit de le faire quand φ est élément d'une représentation automorphe irréductible π' de $\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})$ et même quand π' est l'induite parabolique d'une représentation automorphe cuspidale irréductible $\pi^1\times\cdots\times\pi^k$ de $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A})\times\cdots\times\mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$, $r_1+\cdots+r_k$

$= r - 1$. Les $\pi^1, \ldots, r^k$ sont non ramifiées en les places de S. D'après l'article [Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika], on a

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) = \prod_{1 \le i \le k} \mathrm{L}(\pi \times \pi^i, Z)$$
$$\mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}', Z) = \prod_{1 \le i \le k} \mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}^i, Z)$$
$$\varepsilon(\pi \times \pi', Z) = \prod_{1 \le i \le k} \varepsilon(\check{\pi} \times \check{\pi}^i, Z)$$

si bien que l'hypothèse (2) du théorème B.13 implique que $\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z)$ et $\mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}', Z)$ sont des polynômes reliés par l'équation fonctionnelle

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) = \varepsilon(\pi \times \pi', Z)\, \mathrm{L}\left(\check{\pi} \times \check{\pi}', \frac{1}{qZ}\right).$$

D'après le lemme B.17, l'égalité qu'on doit montrer s'écrit encore

$$\Psi(W_\xi, W_\varphi, Z) = \Psi\left(\widetilde{W}_\xi, \widetilde{W}_\varphi, \frac{1}{qZ}\right).$$

Ici, $h \mapsto W_\varphi(h)$ est élément du modèle de Whittaker global de $\pi' = \bigotimes_{x \in |X|} \pi'_x$ produit restreint des $\mathcal{W}(\pi'_x, \psi_x^{-1})$ et $\widetilde{W}_\varphi$ est déduit de W_φ par composition avec $h \mapsto w_{r-1}{}^t h^{-1}$. Il suffit donc de montrer que si W est le produit tensoriel de fonctions W_x dans les modèles de Whittaker $\mathcal{W}(\pi'_x, \psi_x^{-1})$ presque toutes égales à l'élément distingué, on a

$$\Psi(W_\xi, W, Z) = \Psi\left(\widetilde{W}_\xi, \widetilde{W}, \frac{1}{qZ}\right).$$

Mais avec les notations du paragraphe B.1c ci-dessus, on a

$$\Psi(W_\xi, W, Z) = \prod_{x \in |X|} \Psi(W_{\xi_x}, W_x, Z)$$
$$\Psi(\widetilde{W}_\xi, \widetilde{W}, Z) = \prod_{x \in |X|} \Psi(\widetilde{W}_{\xi_x}, \widetilde{W}_x, Z)$$

et on obtient en faisant le produit des équations fonctionnelles locales du théorème B.8

$$\frac{\Psi(W_\xi, W, Z)}{\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z)} \varepsilon(\pi \times \pi', Z) = \frac{\Psi\big(\widetilde{W}_\xi, \widetilde{W}, \frac{1}{qZ}\big)}{\mathrm{L}\big(\check{\pi} \times \check{\pi}', \frac{1}{qZ}\big)}.$$

On conclut grâce à l'équation fonctionnelle globale

$$\mathrm{L}(\pi \times \pi', Z) = \varepsilon(\pi \times \pi', Z) \mathrm{L}\left(\check{\pi} \times \check{\pi}', \frac{1}{qZ}\right).$$

□

De cette proposition, on déduit aussitôt :

Corollaire B.19. – *Soit* $\xi = (\xi_x)_{x\in|X|}$ *un vecteur de la représentation* $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$ *tel que pour toute place* $x \in S$*, la composante* ξ_x *soit invariante par* $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$ *plongé dans* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *par* $h \mapsto \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$U_\xi(1) = V_\xi(1).$$

□

e) Conclusion du raisonnement

Pour toute place $x \in |X|$, K_x désigne le sous-groupe ouvert compact maximal $\mathrm{GL}_r(O_x)$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ si bien que $K = \prod_{x\in|X|} K_x$ est le sous-groupe ouvert maximal $\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Si $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N$ est un sous-schéma fermé de X supporté par S, on note $K'_S(N)$ le sous-groupe d'indice fini de $K_S = \prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(O_x)$ constitué des matrices dont l'image dans $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})'_S(N)$ le sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ image réciproque de $K'_S(N)$ par $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(F_x)$.

On a besoin du résultat suivant :

Proposition B.20. – (i) *Les sous-groupes* $P'_r(F)$ *et* $\overline{P}'_r(F)$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *engendrent le sous-groupe discret* $\mathrm{GL}_r(F)$.

(ii) *Si* S *n'est pas vide et* N *est un sous-schéma fermé de* X *supporté par* S*, les sous-groupes* $P'_r(F) \cap K'_S(N)$ *et* $\overline{P}'_r(F) \cap K'_S(N)$ *engendrent le sous-groupe* $\mathrm{GL}_r(F) \cap K'_S(N)$ *de* $\mathrm{GL}_r(F)$.

Démonstration : Voir la proposition 9.1 de [Cogdell, Piatetski-Shapiro]. □

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème B.13, en distinguant deux cas :

Le cas où S *est vide :*

Pour tout vecteur $\xi = (\xi_x)_{x\in|X|}$ de $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$, on a d'après le corollaire B.19

$$U_\xi(1) = V_\xi(1).$$

Puis pour tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on a

$$U_\xi(g) = U_{\xi g}(1) = V_{\xi g}(1) = V_\xi(g).$$

Ainsi, la fonction U_ξ sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ se confond avec V_ξ. Elle est invariante à gauche par $P'_r(F)$ et $\overline{P}'_r(F)$ donc par le groupe $\mathrm{GL}_r(F)$ qu'ils engendrent. Elle est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et on montre facilement qu'elle est cuspidale.

D'après le lemme B.16, l'homomorphisme $\xi \mapsto U_\xi$ n'est pas nul ; il est équivariant et il définit une réalisation de la représentation lisse irréductible $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ dans l'espace des fonctions automorphes cuspidales sur $\mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. C'est ce qu'on voulait. □

Le cas où S n'est pas vide :

On peut choisir des vecteurs ξ_x° dans les composantes π_x de π en les places $x \in S$ tels que

$$W_{\xi_x^\circ}(1) = 1 \ \ \forall x \in S\,,$$

et qui soient invariants à droite par $K'_S(N)$ pour un certain sous-schéma fermé N de X supporté par S (voir le paragraphe 8 de [Cogdell, Piatetski-Shapiro]). A fortiori, chaque ξ_x°, $x \in S$, est invariant à droite par $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$ plongé via $h \mapsto \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il résulte du corollaire B.19 que pour tout vecteur $\xi^S = (\xi_x)_{x\notin S}$ de $\bigotimes_{x\in|X|-S} \pi_x$ complété par $\xi_S^\circ = (\xi_x^\circ)_{x\in S}$ pour former $\xi = (\xi^S, \xi_S^\circ)$, la fonction U_ξ coïncide avec la fonction V_ξ sur le sous-groupe $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})'_S(N)$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. Elle est invariante à gauche par $P'_r(F) \cap K'_S(N)$ et $\overline{P}'_r(F) \cap K'_S(N)$, donc aussi par le sous-groupe $\mathrm{GL}_r(F)\cap K'_S(N) = \mathrm{GL}_r(F)\cap\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})'_S(N)$ d'après la proposition B.20(ii).

Il existe des vecteurs ξ^S tels que $\xi = (\xi^S, \xi_S^\circ)$ vérifie $W_\xi(1) \neq 0$. Pour de tels ξ^S, on prétend que la restriction de U_ξ à $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})'_S(N)$ n'est pas nulle. Cela résulte du lemme B.16, de ce que U_ξ est invariante à gauche par $P'_r(F)$ et a fortiori par $N_r(F)$ et de ce que, d'après le théorème d'approximation forte, le produit $N_r(F) \cdot [N_r(\mathbb{A}) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})'_S(N)]$ est dense dans $N_r(\mathbb{A})$.

Associons à tout vecteur $\xi^S = (\xi_x)_{x\notin S}$ complété en $\xi = (\xi^S, \xi_S^\circ)$ la fonction U_{ξ^S} sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ définie par

$$U_{\xi^S}(g) = U_\xi(g')$$

si g s'écrit $g = \gamma g'$ avec $\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)$ et $g' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})'_S(N)$ (ce qui ne dépend pas du choix de γ et g') et sinon par

$$U_{\xi^S}(g) = 0\,.$$

L'application $\xi^S \mapsto U_{\xi^S}$ définit un homomorphisme non nul et équivariant de la représentation lisse irréductible $\bigotimes\limits_{x \notin S} \pi_x$ de $\prod\limits_{x \notin S} \mathrm{GL}_r(F_x)$ dans un espace de fonctions sur $\mathrm{GL}_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui sont invariantes à droite par des sous-groupes ouverts de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. L'action du centre $Z_r(\mathbb{A})$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ sur ces fonctions se fait nécessairement suivant le caractère central χ_π de π.

La représentation de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ engendrée par l'espace des U_{ξ^S} est admissible (puisqu'elle l'est en n'importe quelle place $x \notin S$: voir le dernier paragraphe de [Borel, Jacquet]) et elle admet au moins une sous-représentation irréductible ; celle-ci est automorphe et ses composantes en les places $x \notin S$ sont les π_x. $\square$

Bibliographie

J.G. Arthur. A trace formula for reductive groups I : terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$, Duke Mathematical Journal **45**, 911–952 (1978)

J.G. Arthur. A trace formula for reductive groups II : applications of a truncation operator, Compositio Mathematica **40** (1), 87–121 (1980)

J.N. Bernstein, A.V. Zelevinski. Representations of the group $\mathrm{GL}(n, F)$ where F is a non-archimedean local field, Russian Mathematical Surveys **31** (3), 1–68 (1976)

A. Borel, H. Jacquet. Automorphic forms and representations, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume XXXIII, partie 1, 189–202 (1979)

L. Clozel. Motifs et formes automorphes : Applications du principe de fonctorialité, pages 77–159 dans : Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-functions, volume I, Actes de la Conférence de Ann Arbor, Academic Press (1990)

J.W. Cogdell, I.I. Piatetski-Shapiro. Converse theorems for GL_n, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S n$^{\mathrm{o}}$ 79, 157–214 (1994)

P. Deligne. La conjecture de Weil II, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S, n$^{\mathrm{o}}$ 52, 137–252 (1980)

V.G. Drinfeld. Langlands' Conjecture for GL(2) over functional Fields, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, 565–574 (1978)

V.G. Drinfeld. Varieties of modules of F-sheaves, Functional Analysis and its Applications **21**, 107–122 (1987)

V.G. Drinfeld. The proof of Petersson's conjecture for GL(2) over a global field of characteristic p, Functional Analysis and its Applications **22**, 28–43 (1988)

V.G. Drinfeld. Cohomology of compactified manifolds of modules of F-sheaves of rank 2, Journal of Soviet Mathematics **46**, 1789–1821 (1989)

E. Frenkel, D. Gaitsgory, D. Kazhdan, K. Vilonen. Geometric realization of Whittaker functions and the Langlands conjecture, Journal of the AMS **11**, 451–484 (1998)

E. Frenkel, D. Gaitsgory, K. Vilonen. On the geometric Langlands conjecture, prépublication alg-geom/0012255 (2000)

K. Fujiwara. Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture, Inventiones mathematicae **127**, 489–533 (1997)

A. Grothendieck, rédigé par P. Deligne. La classe de cohomologie associée à un cycle, pages 129–153 dans : Cohomologie étale, SGA 4 1/2, LNM 569, Springer

A. Grothendieck, rédigé par L. Illusie. Formule de Lefschetz, pages 73–137 dans : Cohomologie ℓ-adique et Fonctions L, LNM 589, Springer

M. Harris, R. Taylor. On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (1999)

R. Hartshorne. Algebraic geometry, GTM 52, Springer (1977)

G. Henniart. On the local Langlands conjecture for $\mathrm{GL}(n)$: the cycle case, Annals of Mathematics **123**, 145–203 (1986)

H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro, J.A. Shalika. Rankin-Selberg convolutions, American Journal of Mathematics **105**, 367–464 et 777–815 (1983)

H. Jacquet, J.A. Shalika. On Euler products and the classification of automorphic representations I et II, American Journal of Mathematics **103**, 499–558 et 777–815 (1981)

S. Keel, S. Mori. Quotients by groupoids, Annals of Mathematics **145**, 193–213 (1997)

L. Lafforgue. Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson, Astérisque **243**, SMF (1997)

L. Lafforgue. Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld, Journal of the AMS **11**, 1001–1036 (1998)

L. Lafforgue. Pavages des simplexes, schémas de graphes recollés et compactification des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$, Inventiones mathematicae **136**, 233–271 (1999)

L. Lafforgue. Correctif et complément provisoire à l'article: Pavages des simplexes, schémas de graphes recollés et compactification des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$, prépublication de l'IHES (http://www.ihes.fr/PREPRINTS/M01/Resu/resu-M01-14.html), (mars 2001)

R.P. Langlands. Problems in the Theory of Automorphic Forms, pages 18–61 dans : Lectures in Modern Analysis and Applications III, LNM 170, Springer (1970)

R.P. Langlands. On the Functional Equations satisfied by Eisenstein Series, LNM 544, Springer (1976)

R.P. Langlands. Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume XXXIII, partie 2, 205–246 (1979)

G. Laumon. Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, Publications mathématiques de l'I.H.E.S n° 65, 131–210 (1987)

G. Laumon. Faisceaux automorphes pour GL_n : la première construction de Drinfeld, prépublication alg-geom/9511004 (1995)

G. Laumon. Cohomology of Drinfeld modular varieties, volumes I et II, Cambridge University Press (1996)

G. Laumon. La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions, Séminaire Bourbaki, exposé n° 873 (2000)

G. Laumon, L. Moret-Bailly. Champs algébriques, Ergebnisse der Mathematik **39**, Springer (1999)

G. Laumon, M. Rapoport, U. Stuhler. $\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence, Inventiones mathematicae **113**, 217–338 (1993)

C. Moeglin, J.-L.Waldspurger. Le spectre résiduel de $\mathrm{GL}(n)$, Annales Scientifiques de l'E.N.S, tome 22, 605–674 (1989)

C. Moeglin, J.-L.Waldspurger. Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein, Progress in Mathematics 113, Birkhäuser (1994)

L.E. Morris. Eisenstein series for reductive groups over global function fields I : the cusp form case, II : the general case, Journal canadien de mathématiques, 91–168 et 1112–1182 (1982)

D. Mumford, G. Fogarty. Geometric Invariant Theory, second enlarged edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **34**, Springer (1982)

I.I. Piatetski-Shapiro. Zeta-functions of $\mathrm{GL}(n)$, Prépublication de l'Université du Maryland (1976)

R. Pink. On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne, Annals of Mathematics **135**, 483–525 (1992)

F. Rodier. Représentations de GL(n, k) où k est un corps p-adique, Séminaire Bourbaki, exposé n^{o} 587 (1982)

B. Saint-Donat. Equivariant embeddings of tori, chapitre I, paragraphes 1 et 2 dans : Toroidal embeddings I par G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford et B. Saint-Donat, LNM 339, Springer (1973)

J.-P. Serre. Groupes algébriques et corps de classes, Hermann (1959)

C.S. Seshadri. Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques (rédigé par J.-M. Drezet), Astérisque 96, SMF (1982)

F. Shahidi. On certain L-functions, American Journal of Mathematics **103**, 297–355 (1981)

M. Tadić. Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-archimedean case), Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, tome 19, 335–382 (1986)