I. ANALYSE DE COPIES : NIVEAU DE LICENCE L2, 2005

On dispose d'un échantillon aléatoire de 54 copies d'examen (épreuve de mathématiques). Il s'agit d'étudiants en fin de deuxième année universitaire (section Maths-Physique) qui s'orienteront principalement vers la Licence de Physique. L'épreuve durait 3 heures, comprenait deux questions de cours et 4 petits exercices indépendants.

A. Question de cours

Dans la première question de cours, on demandait :

a. *Soit* $(E,<,>)$ *un espace euclidien. Qu'appelle-t-on norme associée au produit scalaire*?

b. *Enoncer l'inégalité de Cauchy Schwartz.*

c. *Enoncer le théorème de Pythagore.*

Le bilan est le suivant :

- 17 étudiants sur 54 ont répondu à la question a.
- 11 étudiants sur 54 ont répondu à la question b.
- 8 étudiants sur 54 ont répondu à la question c.

Tous les exemples présentés ci-dessous sont **retranscrits exactement** à partir des copies, en respectant toutes les notations des étudiants. En général, ceux-ci ne définissent pas les objets mathématiques qu'ils utilisent. Les exemples ci-dessous montrent le grand "flou" qui règne dans les esprits; on peut y voir des réponses "complètement fausses", "à moitié justes", "presque justes", si on peut s'exprimer ainsi. Les enseignants donnent en général un certain nombre de points (mais bien sûr pas le total des points) aux réponses qui "s'approchent de la vérité", ce qui explique qu'un étudiant peut obtenir une note comme 17/20 en donnant beaucoup de réponses floues, mais pas complètement fausses, ou encore des réponses justes mais ne correspondant pas à la question posée.

Exemples de réponses données à la question 1.a. :

* $\langle u,u\rangle = \|\overrightarrow{u}\|$ (figurant dans une copie notée 16/20)

* $\|\langle u,v\rangle\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$ (figurant dans une copie notée 16.5/20)

* $\|\langle u,v\rangle\| = \sqrt{u_x v_x + u_y v_y}$ (figurant dans une copie notée 16.5/20)

* $|\langle u,v\rangle| = \sqrt{\langle u,v\rangle}$ si u=v

* $\langle a,a\rangle = |a|^2$

* $\|\langle u,v\rangle\| = \sqrt{u^2 + v^2}$

* "*Soit* $(E,<>)$ *un espace euclidien*; *on appelle norme associée au produit scalaire la distance* $d = \|<,>\|$ *minale entre un plan de* E *et un vecteur de ce même espace euclidien*"

* "*La norme associée au produit scalaire est égale à* $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *elle definit l'espace dans lequel est compris l'espace euclidien*"

Exemples de réponses données à la question 1.b. :

* $\langle u,v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$

* $\|\langle u,v \rangle\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

* $\|a\| + \|b\| \leq \sqrt{\|a\|^2 + \|b\|^2}$

* $\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \leq \ \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$

* $|\langle a,b \rangle| \geq \|a\| \cdot \|b\|$ (figurant dans une copie notée 15.5/20)

* $\|x\| \, \|y\| \leq \sqrt{x^2}\sqrt{y^2}$

* $\|\overrightarrow{u}\| \ \ \|\overrightarrow{v}\| \geq \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$

* $< A > + < B > \leq < A + B >$

* $\|u+v\| < \|u\| + |v|$

* $|u + u| \leq |u| + |u|$

* $< \|u\| - \|v\| > \leq < \|u + v\| > \leq < \|u\| + \|v\| >$

* $\|u\| - \|v\| \leq \|u-v\| \leq \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

* $\left(\int uv\right)^2 \leq \int (uv)^2$

Exemples de réponses données à la question 1.c. :

* $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 \leq \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$ (figurant dans une copie notée 16.5/20)

* $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$ (figurant dans une copie notée 16/20)

* $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ (figurant dans une copie notée 17/20)

* *Si* $\|u \cdot v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ *alors* u *et* v *sont orthogonaux*

* $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

* $\|u\|^2 + \|v\|^2 \leq |u + v|^2$

* $|u + v| = |u| \ |v|$ *si* u *et* v *sont orthogaunaux*

* $\|u\|^2 + \|v\|^2 =?$

* " *Soit* A, B, C *appartenant à un espace euclidien* E *alors on a* $A^2 + B^2 = C^2$ "

* *L'étudiant dessine un triangle de sommets* A, B *et* C *et écrit* : $(AB)^2 = (AC)^2 + (CA)^2$

B. Autre exercice du même examen

Soit la matrice A *ci-dessous; on demandait entre autres de calculer son déterminant, ses valeurs propres et sous-espaces propres* :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le bilan est le suivant :

- 33 étudiants sur 54 ont su calculer le déterminant de A.
- 24 étudiants sur 54 ont su trouver les valeurs propres.
- 7 étudiants sur 54 ont su déterminer les sous-espaces propres.

C. Autre exercice du même examen

Il s'agit de la première question d'un exercice. *On considère l'équation différentielle et les conditions initiales suivantes* :

$$(x^2-1)f''(x)+2xf'(x)-2f(x)=0, \qquad f(0)=-1, \quad f'(0)=0.$$

On cherche une solution $f(x)$ *développable en série entière au voisinage de zéro :* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *On demande de déterminer une relation de résurrence entre les* a_n *et d'en déduire une expression explicite de* a_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Le bilan est le suivant :

- 9 étudiants sur 54 ont résolu la question
- 28 étudiants sur 54 n'ont rien su faire
- 17 étudiants sur 54 ont à peu près fait la moitié du travail

D. Autre exercice du même examen

Il s'agit de la première question d'un exercice. *Soit* $f(x)$ *une fonction de période* 2π *définie par* :

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} -x & \text{si} & -\pi \le x < 0 \\ x & \text{si} & 0 \le x < \pi \end{array}\right\}$$

Soient les coefficients suivants :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

On demande de faire une représentation graphique de $f(x)$ *et de calculer* a_0, a_n *et* b_n.

Le bilan est le suivant :

- 23 étudiants sur 54 ne savent pas faire la représentation graphique de la fonction $f(x)$ (la plupart des erreurs proviennent du fait qu'ils ne savent pas ce qu'est une fonction périodique)
- 25 étudiants sur 54 savent calculer a_0, a_n et b_n sans faire de fautes.

Exemples : quelques représentations graphiques de la fonction $f(x)$ relevées dans les copies (retranscriptions exactes) :