II. Démontrabilité, théories quotients et topologies correspondantes

Rappel des usages déjà faits de la notion de démontrabilité :

- **Pour définir les morphismes des catégories syntactiques :**
  Ce sont les formules

$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{\theta(\vec{x},\vec{y})} \psi(\vec{y})$$

  "$\mathbb{T}$-<u>démontrablement fonctionnelles</u>" au sens que

$$\left.\begin{array}{l} \theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \varphi \wedge \theta \\ \varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{y})\, \theta(\vec{x},\vec{y}) \\ \theta(\vec{x},\vec{y}) \wedge \theta(\vec{x},\vec{y}\,') \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{y}\,'} \vec{y} = \vec{y}\,' \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{sont } \underline{\text{démontrables}} \\ \text{dans la théorie } \mathbb{T} \text{ considérée.} \end{array}$$

- **Pour définir les objets des catégories syntactiques cartésiennes :**
  Ce sont les formules de la forme

$$\varphi(\vec{x}) = (\exists\, \vec{y})\, \psi(\vec{x},\vec{y})$$

  où ψ est une "formule de Horn" telle que

$$\psi(\vec{x},\vec{y}) \wedge \psi(\vec{x},\vec{y}\,') \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{y}\,'} \vec{y} = \vec{y}\,'$$

  est <u>démontrable</u> dans la théorie $\mathbb{T}$ considérée.

- **Pour définir la notion de théorie quotient :**
  Une théorie (géométrique du premier odre) $\mathbb{T}'$
  est "quotient" d'une théorie $\mathbb{T}$
  si elle a même signature
  et si tout axiome de $\mathbb{T}$ est démontrable
  à partir des axiomes de $\mathbb{T}'$.

- **Pour définir la notion d'équivalence syntactique :**
  Deux théories (géométriques du premier ordre)
  de même signature
  sont dites "syntactiquement équivalentes"
  si chacune est quotient de l'autre,
  c'est-à-dire si tout axiome de l'une
  est démontrable à partir des axiomes de l'autre.

Que signifie “démontrable” ?

Remarque. –

Jusqu’à présent, nous avons utilisé
la notion de “démontrable”
sans préciser son sens.

Définition. –

Soit Σ *une signature.*
Soit $\mathbb{T}$ *une théorie géométrique du premier ordre de signature* Σ*, définie par une famille d’axiomes*

$$\varphi_i \vdash \psi_i\,, \quad i \in I\,.$$

Alors une propriété reliant des formules géométriques φ, ψ *de* Σ

$$\varphi \vdash \psi$$

est dite “démontrable” dans $\mathbb{T}$ *ou “*$\mathbb{T}$*-démontrable”*
si elle peut être déduite des axiomes de $\mathbb{T}$
par les “règles d’inférence de la logique géométrique”.

Les caractéristiques essentielles des règles d'inférence :

- Les "règles d'inférence" de la logique géométrique
sont communes à toutes les théories géométriques du premier ordre.
- Elles sont telles que,
pour toute signature Σ
et pour toute Σ-structure M dans un topos $\mathcal{E}$
qui satisfait une famille d'axiomes

$$\varphi_i \vdash \psi_i\,, \quad i \in I\,,$$

alors M satisfait aussi toute propriété

$$\varphi \vdash \psi$$

qui se déduit de ces axiomes par les "règles d'inférence".
- Réciproquement, si $\mathbb{T}$ est une théorie géométrique de signature Σ,
définie par des axiomes $\varphi_i \vdash \psi_i$, $i \in I$,
alors le "modèle universel" $M_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ dans le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
satisfait une propriété $\varphi \vdash \psi$
seulement si elle se déduit des axiomes
par les règles d'inférence.

La liste exhaustive des règles d'inférence de la logique géométrique :

(1) La règle des coupures. –

Deux propriétés de la forme

$$\varphi_1 \vdash_{\vec{x}} \varphi_2 \qquad \textit{et} \qquad \varphi_2 \vdash_{\vec{x}} \varphi_3$$

impliquent la propriété

$$\varphi_1 \vdash_{\vec{x}} \varphi_3 \,.$$

Vérification. –

Cette règle vaut dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$
car si trois sous-objets

$$E_1, E_2, E_3 \quad \text{d'un objet } E \text{ de } \mathcal{E}$$

satisfont les relations d'inclusion

$$E_1 \subseteq E_2 \qquad \text{et} \qquad E_2 \subseteq E_3 \,,$$

alors on a aussi

$$E_1 \subseteq E_3 \,.$$

(2) La règle d'identité. –

Pour tout terme f, la propriété

$$\top \vdash_{\vec{x}} f = f$$

est un axiome implicite de n'importe quelle théorie.

Vérification. –

Cette règle vaut dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$,
car pour tout morphisme de $\mathcal{E}$

$$f : E \longrightarrow E',$$

le produit fibré associé au diagramme

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "f \times f"] \\ E' \arrow[r, hook, "\Delta"] & E' \times E' \end{tikzcd}$$

est le sous-objet total E de E.

(3) Les règles des égalités. –

- *Une propriété de la forme* $\top \vdash_{\vec{x}} f_1 = f_2$ *équivaut à la propriété* $\top \vdash_{\vec{x}} f_2 = f_1$.
- *Deux propriétés de la forme*

$$\top \vdash_{\vec{x}} f_1 = f_2 \qquad et \qquad \top \vdash_{\vec{x}} f_2 = f_3$$

impliquent la propriété

$$\top \vdash_{x} f_1 = f_3 .$$

Vérification. –
Ces règles valent dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$
car, pour tous morphismes de $\mathcal{E}$

$$E \xrightarrow{f_1} E' , \quad E \xrightarrow{f_2} E' \qquad \text{[resp. et } E \xrightarrow{f_3} E'\text{]}$$

l'égalité entre morphismes $f_1 = f_2$ équivaut à l'égalité $f_2 = f_1$,
et les égalités de morphismes

$$f_1 = f_2 \qquad \text{et} \qquad f_2 = f_3$$

impliquent l'égalité

$$f_1 = f_3 .$$

(4) Les règles de substitution. –

- *Si f_1, f_2 sont deux termes de même contexte $\vec{x}$,*
  et f_1', f_2' sont deux termes
  déduits de f_1, f_2 par substitution d'un terme f à une variable
  [resp. déduits d'un terme f par substitution de f_1 et f_2 à une variable],
  alors la propriété
  $$\top \vdash f_1 = f_2$$
  implique la propriété
  $$\top \vdash f_1' = f_2' .$$
- *Si f_1, f_2 sont deux termes de même contexte $\vec{x}$,*
  que R est une relation
  et que R_1, R_2 sont les deux relations déduites de R
  par substitution de f_1 et f_2 à une variable,
  alors la propriété
  $$\top \vdash_{\vec{x}} f_1 = f_2$$
  implique les propriétés
  $$R_1 \vdash R_2 \quad \text{et} \quad R_2 \vdash R_1 \quad (\text{qu'on note } R_1 \dashv\vdash R_2).$$

Vérification. –

- La première de ces règles vaut dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$ car, pour tous morphismes de $\mathcal{E}$

$$E \xrightarrow{f_1} E', \quad E \xrightarrow{f_2} E'$$

et

$$E_0 \xrightarrow{f} E \qquad [\text{resp.} \quad E' \xrightarrow{f} E_0'],$$

l'égalité entre morphismes

$$f_1 = f_2$$

entraîne l'égalité

$$f_1 \circ f = f_2 \circ f \qquad [\text{resp.} \quad f \circ f_1 = f \circ f_2].$$

- La seconde de ces règles vaut dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$ car, pour tous morphismes de $\mathcal{E}$

$$E \xrightarrow{f_1} E', \quad E \xrightarrow{f_2} E'$$

et pour tout sous-objet

$$R \hookrightarrow E'$$

l'égalité entre morphismes

$$f_1 = f_2$$

entraîne l'égalité des sous-objets images réciproques

$$f_1^{-1} R = f_2^{-1} R \qquad \text{dans l'objet } E.$$

(5) Les règles des conjonctions finitaires. –

- *Pour toute formule φ dans un contexte $\vec{x}$, la propriété*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \top$$

est un axiome implicite de n'importe quelle théorie.

- *Pour toute famille finie $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ de formules de même contexte $\vec{x}$ et pour toute formule φ de contexte $\vec{x}$, la propriété*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$$

équivaut à la famille de propriétés

$$\varphi \vdash_{x} \varphi_i \,, \qquad 1 \leq i \leq k \,.$$

Vérification. –
Ces règles valent dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$ car,
pour tout sous-objet E' d'un objet E de $\mathcal{E}$, on a

- E' est contenu dans le sous-objet total E de E,
- E' est contenu dans des sous-objets $E_1, \cdots, E_k$ de E
  si et seulement si il est contenu
  dans leur intersection $E_1 \wedge \cdots \wedge E_k$.

(6) Les règles des disjonctions. –

- *Pour toute formule* φ *dans un contexte* $\vec{x}$*, la propriété*
$$\perp \vdash_{\vec{x}} \varphi$$
est un axiome implicite de n'importe quelle théorie.

- *Pour toute famille de formules* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *de même contexte* $\vec{x}$*,*
et pour toute formule φ *de contexte* $\vec{x}$*, la propriété*
$$\bigvee_{i\in I} \varphi_i \vdash_{\vec{x}} \varphi$$
équivaut à la famille de propriétés
$$\varphi_i \vdash_x \varphi \,, \qquad i \in I\,.$$

Vérification. –
Ces règles valent dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$ car,
pour tout sous-objet E' d'un objet E de $\mathcal{E}$, on a

- E' contient le sous-objet vide $\emptyset$ de E,
- E' contient des sous-objets E_i, $i \in I$, de E
si et seulement si il contient
leur réunion $\bigvee\limits_{i\in I} E_i$.

(7) La règle de distributivité. –

Pour toutes formules φ et φ_i, $i \in I$, de même contexte $\vec{x}$, l'équivalence

$$\varphi \wedge \bigvee_{i \in I} \varphi_i \dashv\vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} \varphi \wedge \varphi_i$$

est un axiome implicite de n'importe quelle théorie.

Remarque. –

Le sens réciproque de cette équivalence

$$\bigvee_{i \in I} \varphi \wedge \varphi_i \vdash_{\vec{x}} \varphi \wedge \bigvee_{i \in I} \varphi_i$$

résulte de (5) et (6).

Vérification. –

Cette règle vaut dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$ car, pour tout sous-objet E' d'un objet E de $\mathcal{E}$, le foncteur d'intersection avec E' dans E

$$E' \wedge \bullet = E' \times_E \bullet$$

respecte à la fois les limites et les colimites, donc aussi les réunions de sous-objets.

(8) La règle de quantification existentielle. –
Pour tous contextes disjoints $\vec{x}$ et $\vec{y}$,
toute formule φ de contexte $\vec{x}, \vec{y}$
et tout formule ψ de contexte $\vec{x}$,
la propriété

$$\varphi \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \psi$$

équivaut à la propriété

$$(\exists\, \vec{y})\, \varphi \vdash_{\vec{x}} \psi\,.$$

Vérification. –
Cette règle vaut dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$ car,
pour tout morphisme de $\mathcal{E}$

$$p : E' \longrightarrow E$$

et pour tous sous-objets

$$E_0 \hookrightarrow E \quad \text{et} \quad E_0' \hookrightarrow E'\ ,$$

les relations d'inclusion entre sous-objets

$$E_0' \subseteq p^{-1} E_0 = E' \times_E E_0 \quad \text{dans } E'$$

et

$$\mathrm{Im}(E_0' \hookrightarrow E' \xrightarrow{p} E) \subseteq E_0 \quad \text{dans } E$$

sont équivalentes.

(9) La règle de Frobenius. –
Pour toute formule φ *de contexte* $\vec{x}, \vec{y}$
et toute formule ψ *de contexte* $\vec{x}$*, comme dans (8),*
l'équivalence

$$(\exists\, \vec{y})\ \varphi \wedge \psi \dashv\vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{y})(\varphi \wedge \psi)$$

est un axiome implicite de n'importe quelle théorie.

Remarque. –
Le sens réciproque de cette équivalence

$$(\exists\, \vec{y})(\varphi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{y})\ \varphi \wedge \psi$$

résulte de (5) et (8).

Vérification. –
Cette règle vaut dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$ car,
pour tout morphisme de $\mathcal{E}$

$$p : E' \longrightarrow E$$

et pour tout sous-objet $E_0 \hookrightarrow E$,
le foncteur de produit fibré

$$E_0 \times_E \bullet$$

respecte à la fois les limites et les colimites,
donc aussi les images par le morphisme $p : E' \to E$.

La logique géométrique et ses fragments :

Définition. –

(i) *On appelle logique géométrique (du premier ordre) la liste des règles d'inférence (1) à (9) des pages précédentes.*

(ii) *On appelle fragment cohérent de cette logique la liste déduite de la précédente en limitant les règles (6) et (7) aux disjonctions finitaires* $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_k$.

(iii) *On appelle fragment régulier de cette logique la liste déduite de la précédente en oubliant les règles (6) et (7).*

Remarque. –
Si $\mathbb{T}$ est une théorie cohérente [resp. régulière],
alors une propriété reliant des formules cohérentes [resp. régulières]

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

est démontrable dans $\mathbb{T}$ au sens de la logique géométrique
si et seulement si elle l'est au sens de la logique cohérente [resp. régulière].

L'expression sémantique de la démontrabilité :

Théorème. –
Soit $\mathbb{T}$ une <u>théorie géométrique</u> [resp. <u>cohérente</u>, resp. <u>régulière</u>]
du premier ordre, de signature Σ.
Alors une <u>propriété reliant des formules</u> géométriques
[resp. cohérentes, resp. régulières] de Σ

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

est <u>démontrable</u> dans $\mathbb{T}$
au sens de la <u>logique géométrique</u> [resp. <u>cohérente</u>, resp. <u>régulière</u>]
<u>si et seulement si elle est vérifiée</u>
par tout <u>modèle</u> M de $\mathbb{T}$
dans <u>n'importe quel topos</u> $\mathcal{E}$.

Remarque. –
Ce théorème implique la remarque précédente.

Démonstration partielle :

Dans le sens direct :

Cela résulte des vérifications faites
à la suite des énoncés des règles d'inférence
de la logique géométrique.

Dans le sens réciproque :

Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ la catégorie syntactique géométrique
[resp. cohérente, resp. régulière] de $\mathbb{T}$,
munie de sa topologie syntactique $J_{\mathbb{T}}$.
Alors la conclusion résulte des faits suivants :

- Il suffit de prouver qu'une propriété

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

  est démontrable dans $\mathbb{T}$
  si et seulement si elle est vérifiée
  par le modèle universel $M_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ dans

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})_{J_{\mathbb{T}}}} .$$

- Une telle propriété $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$
  est démontrable dans $\mathbb{T}$
  si et seulement si, dans la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, les deux sous-objets

$$\varphi(\vec{x}) \hookrightarrow T(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \psi(\vec{x}) \hookrightarrow T(\vec{x})$$

  satisfont la relation d'inclusion

$$\varphi(\vec{x}) \subseteq \psi(\vec{x})$$

  c'est-à-dire si et seulement si le monomorphisme

$$(\varphi \wedge \psi)(\vec{x}) \hookrightarrow \varphi(\vec{x})$$

  est un isomorphisme.
- La topologie syntactique $J_{\mathbb{T}}$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ est sous-canonique.
  Autrement dit, le foncteur canonique

$$\ell : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

  est pleinement fidèle.
  En particulier, un morphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ est un isomorphisme
  si et seulement si
  son image par ℓ est un isomorphisme.

Complétude ou incomplétude des modèles ensemblistes :

Question. –
Pour qu'une propriété géométrique

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

soit démontrable dans une théorie $\mathbb{T}$*,*
suffit-il qu'elle soit vérifiée par les modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$ *?*

Réponse. –

- Non en général :
  Beaucoup de topos non triviaux n'ont aucun point.
- Oui si $\mathbb{T}$ est une théorie cohérente,
  et si l'on suppose que la catégorie des ensembles

  $$\mathrm{Ens}$$

  satisfait "l'axiome du choix" (qui est non constructif) :
  "Tout épimorphisme de Ens admet une section."

  C'est le "théorème de complétude" de Gödel.

Sémantique des théories quotients :

Lemme. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique, $\mathbb{T}'$ une théorie quotient de $\mathbb{T}$. Alors:*

(i) *La catégorie syntactique $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ s'envoie canoniquement dans celle $\mathcal{C}_{\mathbb{T}'}$ de $\mathbb{T}'$. Elle a les mêmes objets.*

(ii) *Pour tout topos $\mathcal{E}$,*

$$\mathbb{T}'\text{-mod}(\mathcal{E})$$

est une sous-catégorie pleine de

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})\,.$$

(iii) *Les plongements*

$$\mathbb{T}'\text{-mod}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

définissent un morphisme de topos

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

dont la composante d'image réciproque prolonge le foncteur canonique

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}'}\,.$$

Pour la démonstration. – (i), (ii) et (iii) sont conséquences de ce que toute propriété démontrable dans $\mathbb{T}$ est démontrable dans $\mathbb{T}'$.

Le “théorème de dualité” entre théories quotients et sous- topos :

Théorème. –

Soit $\mathbb{T}$ une <u>théorie géométrique</u>.
Alors:

(i) *Pour toute théorie $\mathbb{T}'$ quotient de $\mathbb{T}$, le morphisme de topos associé*

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

est un <u>plongement</u>.

(ii) *L'application*

$$\mathbb{T}' \longmapsto (\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}})$$

définit une <u>bijection</u> entre

- *l'ensemble des classes d'équivalence de théories $\mathbb{T}'$ <u>quotients</u> de $\mathbb{T}$,*
- *l'ensemble des <u>sous-topos</u> de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.*

Pour la démonstration de ce théorème de dualité :

Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ la catégorie syntactique géométrique de $\mathbb{T}$,
$J_{\mathbb{T}}$ sa topologie syntactique.

Il suffit de démontrer :

Proposition. –

(i) *Pour toute théorie $\mathbb{T}'$ quotient de $\mathbb{T}$, il existe une topologie $J_{\mathbb{T}'}$ sur $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ contenant $J_{\mathbb{T}}$ telle que le morphisme $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ induit un isomorphisme*

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \xrightarrow{\sim} \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})_{J_{\mathbb{T}'}}} \, .$$

(ii) *L'application*

$$\mathbb{T}' \longmapsto J_{\mathbb{T}'}$$

définit une bijection entre

- *l'ensemble des classes d'équivalence de théories $\mathbb{T}'$ quotients de $\mathbb{T}$,*
- *l'ensemble des topologies J de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ qui contiennent $J_{\mathbb{T}}$.*

Description constructive de la correspondance entre théories quotients et topologies :

Les deux applications en sens inverses sont construites de la manière suivante :

Définition. –

(i) *On associe à toute théorie $\mathbb{T}'$ quotient de $\mathbb{T}$ la topologie sur $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$*

$$J_{\mathbb{T}'} \supseteq J_{\mathbb{T}}$$

engendrée par $J_{\mathbb{T}}$ et les recouvrements

$$(\varphi \wedge \psi)(\vec{x}) \hookrightarrow \varphi(\vec{x})$$

indexés par les axiomes de $\mathbb{T}'$

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

qui ne sont pas des axiomes de $\mathbb{T}$.

(ii) *On associe à toute topologie J de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ contenant $J_{\mathbb{T}}$*
la théorie $\mathbb{T}_J$ quotient de $\mathbb{T}$
définie par les axiomes de $\mathbb{T}$ complétés par les axiomes

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x})$$

indexés par les familles J-couvrantes de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$(\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x}))_{i \in I} .$$

Vérification de la correspondance :

Ce sont les deux parties du lemme suivant :

Lemme. –

(i) *Pour toute théorie* $\mathbb{T}'$ *quotient de* $\mathbb{T}$*, la théorie*

$$\mathbb{T}_{J_{\mathbb{T}'}}$$

associée à la topologie $J_{\mathbb{T}'} \supseteq J_{\mathbb{T}}$ *définie par* $\mathbb{T}'$ *lui est équivalente.*

(ii) *Pour toute topologie* J *de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ *contenant* $J_{\mathbb{T}}$*, la topologie*

$$J_{\mathbb{T}_J}$$

définie par la théorie $\mathbb{T}_J$ *quotient de* $\mathbb{T}$ *associée à* J *lui est égale.*

Pour la démonstration. – Il s'agit de prouver

pour (i) que $\begin{cases} \mathbb{T}_{J_{\mathbb{T}'}} \text{ est quotient de } \mathbb{T}', \\ \mathbb{T}' \text{ est quotient de } \mathbb{T}_{J_{\mathbb{T}'}}, \end{cases}$

pour (ii) que $\begin{cases} J \subseteq J_{\mathbb{T}_J}, \\ J_{\mathbb{T}_J} \subseteq J. \end{cases}$

Vérification de la première partie de (i) : tout axiome de $\mathbb{T}'$ est démontrable dans $\mathbb{T}_{J_{\mathbb{T}'}}$.

Considérons un axiome de $\mathbb{T}'$

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \, .$$

Alors le monomorphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$(\varphi \wedge \psi)(\vec{x}) \hookrightarrow \varphi(\vec{x})$$

est couvrant pour la topologie $J_{\mathbb{T}'}$.

Donc la propriété

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \varphi \wedge \psi$$

est un axiome de la théorie $\mathbb{T}_{J_{\mathbb{T}'}}$.

Or, elle équivaut à la propriété

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \, .$$

Vérification de la seconde partie de (i) : tout axiome de $\mathbb{T}_{J_{\mathbb{T}'}}$ est démontrable dans $\mathbb{T}'$.

- Par définition, la topologie $J_{\mathbb{T}'}$ est engendrée par les morphismes couvrants

$$(\varphi \wedge \psi)(\vec{x}) \hookrightarrow \varphi(\vec{x})$$

indexés par les axiomes $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ de $\mathbb{T}'$.

- On est donc réduit à prouver que la collection des familles de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$(\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x}))_{i \in I}$$

telles que la propriété

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x})$$

soit $\mathbb{T}'$-démontrable, est stable par changement de base et par transitivité.

La stabilité par changement de base :

Considérons donc un morphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$\theta(\vec{y},\vec{x}) : \psi(\vec{y}) \longrightarrow \varphi(\vec{x})\,.$$

Si la propriété

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i,\vec{x})$$

est démontrable dans $\mathbb{T}'$,
il en va de même de la propriété

$$\psi \vdash_{\vec{y}} \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)(\exists\, \vec{x})\, (\theta_i(\vec{x}_i,\vec{x}) \wedge \theta(\vec{y},\vec{x}))$$

puisque la propriété

$$\psi \vdash_{\vec{y}} (\exists\, \vec{x})(\theta(\vec{y},\vec{x}) \wedge \varphi(\vec{x}))$$

est démontrable dans $\mathbb{T}$ et a fortiori dans $\mathbb{T}'$.

La stabilité par transitivité :

Considérons une seconde famille de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$(\theta'_j(\vec{y}_j, \vec{x}) : \psi_j(\vec{y}_j) \longrightarrow \varphi(\vec{x}))_{j \in I'}$$

telle que, pour tout indice $i \in I$,
la famille qui s'en déduit par le changement de base

$$\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x})$$

satisfait la condition que la propriété associée

$$\varphi_i \vdash_{\vec{x}_i} \bigvee_{j \in I'} (\exists\, \vec{y}_j)(\exists\, \vec{x})\, (\theta'_j(\vec{y}_j, \vec{x}) \wedge \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}))$$

soit <u>démontrable</u> dans $\mathbb{T}'$.
Pour tout tel $i \in I$, le sous-objet $\theta_i(\vec{x}, \vec{y}) \hookrightarrow \varphi_i(\vec{x}_i) \times \varphi(\vec{x})$
se projette sur $\varphi_i(\vec{x}_i)$ par un <u>isomorphisme</u>, et donc la propriété

$$\theta_i \vdash_{\vec{x}_i, \vec{x}} \bigvee_{j \in I'} (\exists\, \vec{y}_j)(\theta'_j(\vec{y}_j, \vec{x}) \wedge \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}))$$

est <u>démontrable</u> dans $\mathbb{T}'$. Comme

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x})$$

est <u>démontrable</u> dans $\mathbb{T}'$, <u>il en est de même</u> de

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in I'} (\exists\, \vec{x}_i)(\exists\, \vec{y}_j)(\theta'_j(\vec{y}_j, \vec{x}) \wedge \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x})) \quad \text{puis} \quad \varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{j \in I'} (\exists\, \vec{y}_j)\, \theta'_j(\vec{y}_j, \vec{x}).$$

Vérification de la première partie de (ii) : la topologie J est contenue dans la topologie $J_{\mathbb{T}_J}$.

Considérons une famille J-couvrante de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$(\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x}))_{i \in I} .$$

Alors la propriété

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x})$$

est un axiome de $\mathbb{T}_J$,
donc le monomorphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$\varphi(\vec{x}) \wedge \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) \lhook\joinrel\longrightarrow \varphi(\vec{x})$$

est couvrant pour la topologie $J_{\mathbb{T}_J}$.
Or, la famille de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$(\theta_{i'}(\vec{x}_{i'}, \vec{x}) : \varphi_{i'}(\vec{x}_{i'}) \longrightarrow \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}))_{i' \in I}$$

est couvrante pour la topologie $J_{\mathbb{T}_J} \supseteq J_{\mathbb{T}}$,
donc aussi la famille de morphismes

$$(\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x}))_{i \in I} .$$

Vérification de la seconde partie de (ii) : la topologie $J_{\mathbb{T}_J}$ est contenue dans la topologie J.

Par construction, $J_{\mathbb{T}_J}$ est la topologie engendrée sur $J_{\mathbb{T}} \subseteq J$ par les monomorphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$\varphi(\vec{x}) \wedge \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) \hookrightarrow \varphi(\vec{x})$$

associés aux familles de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$(\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x}))_{i \in I}$$

qui sont J-couvrantes
ou, ce qui revient au même,
sont telles que le monomorphisme associé

$$\varphi(\vec{x}) \wedge \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) \hookrightarrow \varphi(\vec{x})$$

est J-couvrant.

Cela termine la preuve du théorème.

La question générale d'expliciter la correspondance entre topologies et théories quotients :

Considérons en toute généralité

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un (petit) } \underline{\text{site}}\ (\mathcal{C}, J), \\ \bullet \quad \text{une } \underline{\text{théorie géométrique}}\ \mathbb{T}, \\ \bullet \quad \text{une } \underline{\text{équivalence}} \text{ de topos} \\ \qquad\qquad \widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,. \end{cases}$$

Fait. –
On sait déjà qu'une telle équivalence induit une bijection entre

- *l'ensemble des topologies J' de $\mathcal{C}$ contenant J,*
- *l'ensemble des classes d'équivalence de théories $\mathbb{T}'$ quotients de $\mathbb{T}$.*

Question. –
Cette bijection est-elle constructive ?
Peut-on l'expliciter ?

Programme pour traiter cette question :

$\longrightarrow$ Etant donnés

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un (petit) \underline{site} } (\mathcal{C}, J), \\ \bullet \quad \text{une \underline{théorie géométrique} } \mathbb{T}, \end{cases}$$

décrire concrètement les morphismes de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \, .$$

$\longrightarrow$ Expliciter des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel morphisme de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

soit une équivalence.

$\longrightarrow$ Etant donné un tel morphisme défini concrètement

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

et qui satisfait les conditions pour être une équivalence, décrire explicitement et constructivement la bijection induite entre

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{les \underline{topologies} } J' \supseteq J \text{ de } \mathcal{C}, \\ \bullet \quad \text{les \underline{théories quotients} } \mathbb{T}' \text{ de } \mathbb{T}, \text{ à équivalence près.} \end{cases}$$

Description des morphismes d'un topos de faisceaux dans un topos classifiant :

- Si $M_{\mathbb{T}}$ est le modèle universel de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, le foncteur

$$\left(\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{(f^*, f_*)} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\right) \longmapsto f^* M_{\mathbb{T}}$$

  est une équivalence
  - de la catégorie des morphismes de topos
  $$\widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$
  - sur la catégorie des modèles de $\mathbb{T}$ dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$
  $$\mathbb{T}\text{-mod}(\widehat{\mathcal{C}}_J)\,.$$

- Si Σ est la signature de la théorie géométrique $\mathbb{T}$,

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\widehat{\mathcal{C}}_J)$$

  est la sous-catégorie pleine de celle des Σ-structures

$$\Sigma\text{-str}(\widehat{\mathcal{C}}_J)$$

  constituée des Σ-structures de $\widehat{\mathcal{C}}_J$
  qui sont des modèles de $\mathbb{T}$ c'est-à-dire satisfont ses axiomes.

Description des modèles dans un topos de faisceaux :

- Une Σ-structure dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ est une application M qui associe

$$\begin{cases} - & \text{à toute "\underline{sorte}" } A \text{ de } \Sigma \text{ un préfaisceau} \\ & \qquad MA : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens} \quad \text{qui est un } J\text{-\underline{faisceau}}, \\ - & \text{à tout "\underline{symbole de fonction}" } f : A_1 \cdots A_n \to B \\ & \text{un \underline{morphisme de faisceaux} c'est-à-dire de préfaisceaux} \\ & \qquad MA_1 \times \cdots \times MA_n \xrightarrow{Mf} MB\,, \\ - & \text{à tout "\underline{symbole de relation}" } R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n \text{ un sous-préfaisceau} \\ & \qquad MR \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n \quad \text{qui est un } J\text{-\underline{faisceau}}. \end{cases}$$

- Toute formule géométrique φ de Σ de contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$ s'interprète dans toute Σ-structure M de $\widehat{\mathcal{C}}_J$ comme un sous-préfaisceau

$$M\varphi(\vec{x}) \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n \quad \text{qui est un \underline{faisceau}}.$$

- Une Σ-structure M de $\widehat{\mathcal{C}}_J$ est un modèle de la théorie $\mathbb{T}$ si, pour tout axiome $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ de $\mathbb{T}$ de contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$, on a la relation d'inclusion entre sous-préfaisceaux de $MA_1 \times \cdots \times MA_n$

$$M\varphi(\vec{x}) \subseteq M\psi(\vec{x})\,.$$

Explicitation de l'interprétation des formules géométriques :

- L'interprétation des formules géométriques d'une signature Σ demande

(1) de former des produits et de composer des morphismes pour interpréter les termes,

(2) de former des produits fibrés pour interpréter les formules atomiques,

(3) de former des produits fibrés de sous-objets pour interpréter les symboles $\wedge$,

(4) de former des images de morphismes $E' \to E$ c'est-à-dire des colimites de diagrammes

$$E' \times_E E' \rightrightarrows E'$$

pour interpréter les symboles $\exists$,

(5) de former des réunions de sous-objets $E_i \hookrightarrow E$ c'est-à-dire des colimites de diagrammes

$$\coprod_{i,j} E_i \times_E E_j \rightrightarrows \coprod_i E_i$$

pour interpréter les symboles $\vee$ ou $\bigvee$.

Interprétation dans les préfaisceaux :

- Ainsi,

  — l'interprétation de (1), (2) et (3),
  c'est-à-dire des formules atomiques et des formules de Horn,
  se fait en termes de composition de morphismes et de limites finies,

  — l'interprétation de (4) et (5),
  c'est-à-dire des formules régulières, cohérentes ou géométriques,
  se fait en termes de limites finies et de colimites.

- Dans le topos $\widehat{\mathcal{C}}$ des préfaisceaux $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$,
  ces interprétations se font composante par composante
  puisque les foncteurs d'évaluation en les objets X de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ P & \longmapsto & P(X) \end{array}$$

  respectent à la fois les limites et les colimites.

Interprétation dans les faisceaux :

- Le foncteur de plongement
$$j_* : \widehat{\mathcal{C}}_J \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$
respecte les limites, tandis que le foncteur de faisceautisation
$$j^* : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$
respecte les limites finies et les colimites,
et que le composé $j^* \circ j_*$ s'identifie à $\mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{C}}_J}$.
- Par conséquent,
  - l'interprétation de (1), (2) et (3),
  c'est-à-dire des formules atomiques et des formules de Horn,
  est la même dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ que dans $\widehat{\mathcal{C}}$
  donc se fait composante par composante,
  - l'interprétation dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ de (4) et (5),
  c'est-à-dire des formules régulières, cohérentes ou géométriques,
  se fait en deux étapes :
  d'abord dans $\widehat{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire composante par composante,
  puis en appliquant le foncteur de faisceautisation
  $$j^* : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J \, .$$

A quelles conditions un modèle est-il universel ?

On considère un modèle M de $\mathbb{T}$ dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$
qui correspond à un morphisme de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,.$$

Question. – *A quelles conditions le morphisme*

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

est-il une équivalence ?

Situation. – $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ peut être construit comme le topos des faisceaux sur

$$(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$$

où

- $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ est la catégorie syntactique

$$\begin{cases} \text{géométrique} & \text{dans le cas général d'une théorie géométrique } \mathbb{T}, \\ \text{cohérente} & \text{si } \mathbb{T} \text{ est une théorie cohérente,} \\ \text{régulière} & \text{si } \mathbb{T} \text{ est une théorie régulière,} \\ \text{cartésienne} & \text{si } \mathbb{T} \text{ est une théorie cartésienne,} \end{cases}$$

- $J_{\mathbb{T}}$ est la topologie syntactique
  géométrique [resp. cohérente, resp. régulière, resp. discrète].

Première condition nécessaire :

Pour que le modèle M de $\mathbb{T}$ dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ soit universel, il faut :

Condition (A). – *Décrivant la famille des objets de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ c'est-à-dire des formules*

$$\varphi(\vec{x}) \quad \text{de contexte } \vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$$

qui sont géométriques
[resp. cohérentes, resp. régulières, resp. $\mathbb{T}$-cartésiennes],
la famille de leurs interprétations dans M

$$M\varphi(\vec{x}) \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$$

doit être séparante en tant que famille d'objets de $\widehat{\mathcal{C}}_J$.

Remarques. –

(i) Cela signifie que pour toute paire de morphismes de $\mathcal{C}$

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$$

dont les images par $\ell : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}_J$ sont distinctes,
doivent exister une formule $\varphi(\vec{x})$ et un morphisme $\quad M\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{m} \ell(X)$
tels que $\ell(f) \circ m \neq \ell(g) \circ m$.

(ii) Dans (i), on peut remplacer les $M\varphi(\vec{x})$
par les interprétations des $\varphi(\vec{x})$ dans $\widehat{\mathcal{C}}$.

Seconde condition nécessaire :

Pour que le modèle M de $\mathbb{T}$ dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ soit universel, il faut :

Condition (B). – *Pour qu'une famille de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$*

$$\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x})$$

soit $J_{\mathbb{T}}$-couvrante, (il faut et) il suffit que le morphisme image dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$

$$\coprod_{i \in I} M\varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow M\varphi(\vec{x}) \quad \textit{soit un épimorphisme.}$$

Remarques. –

(i) Le morphisme image est un épimorphisme quand $M\varphi(\vec{x})$ est le transformé par j^* du préfaisceau

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \longmapsto \bigcup_{i \in I} \mathrm{Im}(M\varphi_i(\vec{x}_i)(X) \to M\varphi(\vec{x})(X)) \,.$$

(ii) Une telle famille de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ est $J_{\mathbb{T}}$-couvrante quand

- dans le cas géométrique
$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable,}$$
- dans le cas cohérent, il existe $i_1, \cdots, i_n \in I$ tels que
$$\varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{x}_{i_1})\, \theta_{i_1}(\vec{x}_{i_1}, \vec{x}) \vee \cdots \vee (\exists\, \vec{x}_{i_n})\, \theta_{i_n}(\vec{x}_{i_n}, \vec{x}) \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable,}$$
- dans le cas régulier [resp. cartésien], il existe $i_0 \in I$ tel que
$$\varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{x}_{i_0})\, \theta_{i_0}(\vec{x}_{i_0}, \vec{x}) \text{ est } \mathbb{T}\text{-démontrable,}$$
[resp. l'identité de $\varphi(\vec{x})$ se factorise à travers $\varphi_{i_0}(\vec{x}_{i_0}) \xrightarrow{\theta_{i_0}(\vec{x}_{i_0}, \vec{x})} \varphi(\vec{x})$].

Troisième condition nécessaire :

Pour que le modèle M de $\mathbb{T}$ dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ soit universel, il faut :

Condition (C). – *Pour toute paire d'objets de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$\varphi(\vec{x}) \qquad \textit{et} \qquad \psi(\vec{y})\,,$$

et pour tout morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}_J$ *entre leurs interprétations dans* M

$$M\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{u} M\psi(\vec{y})\,,$$

il doit exister une famille $J_{\mathbb{T}}$*-couvrante de morphismes de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$\theta_i(\vec{x}_i,\vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x})\,, \quad i \in I\,,$$

et une famille de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$\theta'_i(\vec{x}_i,\vec{y}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \psi(\vec{y})\,, \quad i \in I\,,$$

rendant commutatifs les triangles de $\widehat{\mathcal{C}}_J$ *:*

$$\begin{tikzcd} M\varphi_i(\vec{x}_i) \arrow[d, "M\theta_i"'] \arrow[dr, "M\theta'_i"] & \\ M\varphi(\vec{x}) \arrow[r, "u"] & M\psi(\vec{y}) \end{tikzcd}$$

Remarque. – Pour vérifier la commutativité de ces triangles,
il suffit d'évaluer les faisceaux $M\psi(\vec{y})$, $M\varphi(\vec{x})$ et $M\varphi_i(\vec{x}_i)$ en les objets X de $\mathcal{C}$.

Des conditions nécessaires et suffisantes :

Pour que le modèle M de $\mathbb{T}$ dans $\widehat{\mathcal{C}}_J$ soit universel,
il faut et il suffit :

Proposition. –
Pour qu'un modèle M d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$
dans le topos $\widehat{\mathcal{C}}_J$ *des faisceaux sur un site* $(\mathcal{C}, J)$
définisse une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \, ,$$

il faut et il suffit que soient vérifiées
les conditions (A), (B) et (C) ci-dessus.

Démonstration. –
On applique le corollaire 5.11 de la prépublication :

O. Caramello, *"Denseness conditions, morphisms and equivalences of toposes"* (2020).

Les topologies associées à une théorie quotient :

On considère une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

définie par un modèle M de $\mathbb{T}$ dans un topos de faisceaux $\widehat{\mathcal{C}}_J$.

Proposition. –
Soit $\mathbb{T}'$ une théorie quotient de $\mathbb{T}$,
définie en adjoignant aux axiomes de $\mathbb{T}$
des axiomes $\varphi_i \vdash \psi_i$, $i \in I$.
Soit J' l'unique topologie de $\mathcal{C}$ contenant J
qui induise une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}\,.$$

Alors J' est la topologie engendrée sur J par les cribles

$$y(X) \times_{M\varphi_i} M(\varphi_i \wedge \psi_i) \hookrightarrow y(X) \qquad (\text{avec } y : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}})$$

associés

- *aux axiomes $\varphi_i \vdash \psi_i$, $i \in I$,*
- *aux objets X de $\mathcal{C}$,*
- *aux éléments des $M\varphi_i(X)$ vus comme des morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$*

$$y(X) \longrightarrow M\varphi_i\,.$$

Remarque. – La famille des cribles

$$y(X) \times_{M\varphi_i} M(\varphi_i \wedge \psi_i) \hookrightarrow y(X)$$

est stable par images réciproques par les morphismes $X' \to X$ de $\mathcal{C}$.
Il en est donc de même de sa réunion avec J.
Pour transformer cette réunion en la topologie J',
il suffit de former toutes les multicomposées de familles couvrantes.

Démonstration de la proposition. –
Pour une topologie K de $\mathcal{C}$ contenant J, le foncteur de faisceautisation

$$\widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_K$$

transforme en isomorphismes de $\widehat{\mathcal{C}}_K$ tous les plongements de $\widehat{\mathcal{C}}_J$

$$M(\varphi_i \wedge \psi_i) \hookrightarrow M\varphi_i$$

si et seulement si tous les cribles de la forme

$$y(X) \times_{M\varphi_i} M(\varphi_i \wedge \psi_i) \hookrightarrow y(X)$$

sont K-couvrants.
Donc J' est nécessairement la plus petite des topologies K
qui satisfont ces conditions.

Les théories quotients qui correspondent à une topologie :

On considère toujours une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,,$$

pour une théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ,
définie par un modèle M de $\mathbb{T}$ dans un topos de faisceaux $\widehat{\mathcal{C}}_J$.

Proposition. – *Soit J' une topologie de $\mathcal{C}$ qui contient J.*
Soit $\mathbb{T}'$ une théorie quotient de $\mathbb{T}$ telle que l'équivalence

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

induise une équivalence

$$\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}\,.$$

Alors une propriété reliant des formules géométriques Σ

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

est démontrable dans $\mathbb{T}'$ si et seulement si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$
et tout élément de $M\varphi(X)$ vu comme un morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$

$$y(X) \longrightarrow M\varphi\,,$$

le crible

$$y(X) \times_{M\varphi} M(\varphi \wedge \psi) \hookrightarrow y(X)$$

est élément de J'.

Démonstration. – Le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$ est un sous-topos de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
c'est-à-dire lui est relié par un morphisme de topos

$$\left(\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \xrightarrow{e^*} \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \xhookrightarrow{e_*} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\right)$$

qui est un plongement au sens que e_* est pleinement fidèle.
Le foncteur e^* transforme
le modèle universel de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
en le modèle universel de $\mathbb{T}'$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$,
et il respecte les interprétations des formules géométriques.
Une propriété

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

est démontrable dans $\mathbb{T}'$ si et seulement si le plongement de $\widehat{\mathcal{C}}_J \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$

$$M(\varphi \wedge \psi) \hookrightarrow M\varphi$$

est transformé par e^* en un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$.
Cela revient à demander que pour tout objet X de $\mathcal{C}$
et tout morphisme $y(X) \longrightarrow M\varphi$,
le crible

$$y(X) \times_{M\varphi} M(\varphi \wedge \psi) \hookrightarrow y(X)$$

soit élément de J'.

Application à la démontrabilité :

On considère encore et toujours une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

définie par un modèle M de $\mathbb{T}$ dans un topos de faisceaux $\widehat{\mathcal{C}}_J$.

Corollaire. – *Soit $\mathbb{T}'$ une théorie quotient de $\mathbb{T}$, définie en adjoignant aux axiomes de $\mathbb{T}$ des axiomes*

$$\varphi_i \vdash \psi_i, \qquad i \in I\,.$$

Alors une propriété géométrique de la forme

$$\varphi \vdash \psi$$

est démontrable dans $\mathbb{T}'$ si et seulement si les cribles de la forme

$$M(\varphi \wedge \psi) \times_{M\varphi} y(X) \lhook\joinrel\longrightarrow y(X)$$

peuvent être obtenus par multicomposition dans $\mathcal{C}$ des cribles de J et des cribles de la forme

$$M(\varphi_i \wedge \psi_i) \times_{M\varphi_i} y(Y) \lhook\joinrel\longrightarrow y(Y)\,.$$

Démonstration. – Il suffit de combiner les deux propositions précédentes.