III. Théories de type préfaisceau

Rappel de la définition et des exemples de bases :

Définition. – *Une théorie géométrique du premier ordre* $\mathbb{T}$ *est dite "de type préfaisceau" si son topos classifiant*

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

est équivalent à un topos de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{C}}$ *sur une catégorie (essentiellement) petite* $\mathcal{C}$.

Exemples de théories de type préfaisceau :

- la théorie "vide" (c'est-à-dire sans axiomes) sur n'importe quelle signature Σ,
- les théories algébriques,
- plus généralement les théories "de Horn",
- plus généralement encore les théories cartésiennes,
- la "théorie des foncteurs plats"

  $$\mathbb{T}^{p}_{\mathcal{C}}$$

  sur n'importe quelle petite catégorie $\mathcal{C}$ (dont les modèles dans les topos $\mathcal{E}$ sont les foncteurs plats

  $$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}\ ).$$

Les théories de type préfaisceau comme bases de construction des théories géométriques du premier ordre :

On déduit des exemples donnés :

Corollaire. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre de signature Σ.
Soit $\mathbb{T}_0$ n'importe quelle théorie cartésienne de même signature Σ dont les axiomes sont démontrables dans $\mathbb{T}$.
Alors $\mathbb{T}$ apparaît comme une théorie quotient de la théorie de type préfaisceau $\mathbb{T}_0$.

Remarque. –

Par conséquent, le topos classifiant de $\mathbb{T}$ s'écrit comme le topos des faisceaux

$$\widehat{(\mathcal{C}^{\text{car}}_{\mathbb{T}_0})}_{J_{\mathbb{T}}} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

sur la catégorie syntactique cartésienne de $\mathbb{T}_0$

$$\mathcal{C}^{\text{car}}_{\mathbb{T}_0}$$

munie d'une certaine topologie de Grothendieck

$$J_{\mathbb{T}}$$

définie par les axiomes de $\mathbb{T}$ qui ne sont pas démontrables dans $\mathbb{T}_0$.

Présentations géométriques des topos classifiants et théories de type préfaisceau associées :

On déduit du "théorème de dualité" entre topologies de Grothendieck et théories quotients :

Corollaire. –
Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre.
Soit une présentation de son topos classifiant

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

comme topos des faisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J.
Soit $\mathbb{T}_0$ n'importe quelle théorie géométrique telle que

$$\widehat{\mathcal{C}} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}_0} .$$

Alors $\mathbb{T}$ apparaît comme sémantiquement équivalente (ou Morita-équivalente) à une théorie quotient $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}_0$ telle que

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}'} .$$

Remarque. – En particulier, on peut prendre pour $\mathbb{T}_0$ la théorie

$$\mathbb{T}^p_{\mathcal{C}}$$

des "foncteurs plats" sur $\mathcal{C}$.

Les modèles des théories de type préfaisceau :

Afin de comprendre la spécificité des théories de type préfaisceau, on commence par s'intéresser à leurs modèles ensemblistes :

Proposition. –
Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau.
Alors toute équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

(pour une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$)
induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})$$

de la "catégorie des ind-objets" de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ opposée de $\mathcal{C}$ sur la catégorie des modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$.

Remarque. – En particulier, toute équivalence

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

induit un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens}) \,.$$

La notion de catégorie des ind-objets :

On rappelle :

Définition. – *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie essentiellement petite. On note*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{D})$$

la sous-catégorie pleine de

$$\widehat{\mathcal{D}} = [\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

constitué des foncteurs

$$P : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

qui sont des "ind-objets"
au sens qu'ils possèdent les trois propriétés équivalentes suivantes :

(1) *P s'écrit comme une colimite filtrante d'objets représentables de $\widehat{\mathcal{D}}$.*

(2) *La "catégorie des éléments" de P*

$$\textstyle\int P = \mathcal{D}/P$$

est filtrante.

(3) *Le foncteur*

$$P : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

est plat, ce qui signifie que son prolongement par colimites

$$\widehat{P} : \widehat{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

respecte les limites finies.

L’équivalence des 3 conditions pour être un ind-objet :

On rappelle que la “catégorie des éléments” de P

$$\int P = \mathcal{D}/P$$

est la catégorie des paires (X, x) constituées de

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un objet } X \text{ de } \mathcal{D}, \\ \bullet \quad \text{un élément } x \in P(X) \text{ vu comme un morphisme de } \widehat{\mathcal{D}} \\ \qquad\qquad y(X) \longrightarrow P\,. \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow (1)$ car on a dans $\widehat{\mathcal{D}}$ la formule

$$P = \varinjlim_{(X,x)\in\int P} y(X)\,.$$

$(1) \Rightarrow (3)$ car

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{pour tout objet } X \text{ de } \mathcal{D}, \text{ le foncteur d'évaluation en } X \\ \qquad\qquad \widehat{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{Ens} \\ \quad \text{respecte toutes les colimites et toutes les limites,} \\ \bullet \quad \text{dans } \mathrm{Ens}, \text{ les foncteurs de colimites filtrantes} \\ \qquad\qquad \text{respectent les limites finies.} \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow$ (2) car

- pour tous objets de $\int P$
$$(X,x) \quad \text{et} \quad (Y,y)\,,$$
la formule
$$\widehat{P}(y(X) \times y(Y)) = \widehat{P}(y(X)) \times \widehat{P}(y(Y)) = P(X) \times P(Y)$$
montre qu'il existe un objet
$$(Z,z) \quad \text{de} \quad \int P$$
et deux morphismes de $\mathcal{D}$
$$X \longrightarrow Z \longleftarrow Y$$
qui envoient
$$z \longmapsto x \quad \text{et} \quad z \longmapsto y\,,$$
- pour toute paire de morphismes de $\int P$
$$(X,x) \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} (Y,y)\,,$$
la formule
$$\widehat{P}(\ker(y(Y) \rightrightarrows y(X))) = \ker(P(Y) \rightrightarrows P(X))$$
montre qu'il existe un morphisme de $\int P$
$$(Y,y) \xrightarrow{w} (Z,z)$$
tel que
$$w \circ u = w \circ v\,.$$

Calcul des modèles ensemblistes par un pont topossique :

- On calcule l'invariant des topos

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathrm{pt}(\mathcal{E}) = [\mathrm{Ens}, \mathcal{E}]_{\top}$$

des deux côtés de l'équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \, .$$

- Du côté du topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$,
on a une équivalence de catégories canonique

$$\mathrm{pt}(\mathcal{E}_{\mathbb{T}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens}) \, .$$

- Du côté du topos de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{C}}$,
on est réduit à montrer
qu'existe une équivalence canonique

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pt}(\widehat{\mathcal{C}}) \, .$$

La catégorie des points d'un topos de préfaisceaux :

Proposition. – *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite.*

(i) *Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'évaluation en X des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$*

$$P \longmapsto P(X) \qquad \text{et son adjoint à droite}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ens} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{C}}\,, \\ I & \longmapsto & P_I = [Y \mapsto \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X,Y),I)] \end{array}$$

définit un point du topos $\widehat{\mathcal{C}}$.

(ii) *Associer à tout objet X de $\mathcal{C}$ le point de $\widehat{\mathcal{C}}$ correspondant définit un foncteur pleinement fidèle*

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathrm{pt}(\widehat{\mathcal{C}})\,.$$

(iii) *Ce foncteur se prolonge en une équivalence canonique*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pt}(\widehat{\mathcal{C}})\,.$$

Démonstration. –

(i) Le foncteur d'évaluation $P \mapsto P(X)$ respecte limites et colimites.

(ii) résulte du lemme de Yoneda.

(iii) D'après l'équivalence de Diaconescu,
la catégorie $\mathrm{pt}(\widehat{\mathcal{C}})$ est équivalente à celle des foncteurs plats $\quad \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}$.

Les modèles “finiment présentables” des théories de type préfaisceau :

Annonçons le résultat suivant :

Théorème. – *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie de type préfaisceau.*
Alors toute équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Kar}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-}\mathrm{mod}(\mathrm{Ens})_{\mathrm{fp}}$$

entre

- *la “complétion Karoubienne”*

  $$\mathrm{Kar}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \quad \textit{de} \quad \mathcal{C}^{\mathrm{op}},$$

- *la sous-catégorie pleine*

  $$\mathbb{T}\text{-}\mathrm{mod}(\mathrm{Ens})_{\mathrm{fp}} \hookrightarrow \mathbb{T}\text{-}\mathrm{mod}(\mathrm{Ens})$$

  constituée des modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$
  qui sont “finiment présentables”.

Remarque. – Un modèle ensembliste de $\mathbb{T}$ est dit “finiment présentable” s’il est un “objet compact” de la catégorie $\mathbb{T}\text{-}\mathrm{mod}(\mathrm{Ens})$.

La notion de complétion Karoubienne d'une catégorie :

Définition. – *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie localement petite.*
On appelle "complétion Karoubienne" de $\mathcal{D}$ la catégorie

$$\mathrm{Kar}(\mathcal{D})$$

dont

- *les objets sont les paires (X, p) constituées*
  - *d'un objet X de $\mathcal{D}$*
  - *d'un idempotent $p : X \to X$, avec $p \circ p = p$,*
- *les morphismes $(X, p) \to (Y, q)$ sont les morphismes de $\mathcal{D}$*

$$u : X \longrightarrow Y \qquad \text{tels que} \qquad q \circ u = u \circ p = u.$$

Remarques. –

(i) On a toujours $\quad \mathrm{Kar}(\mathcal{D})^{\mathrm{op}} = \mathrm{Kar}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}})$.

(ii) On a un foncteur canonique pleinement fidèle $\quad \mathcal{D} \hookrightarrow \mathrm{Kar}(\mathcal{D})$.

(iii) Si ce foncteur est une équivalence, on dit que $\mathcal{D}$ est "Karoubi-complète".

(iv) La catégorie $\mathrm{Kar}(\mathcal{D})$ est toujours Karoubi-complète.

(v) Si $\mathcal{D}$ est essentiellement petite, le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Kar}(\mathcal{D}) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}, \\ (X, p) & \longmapsto & \ker\big(y(X) \underset{\mathrm{id}}{\overset{p}{\rightrightarrows}} y(X)\big) \end{array}$$

est pleinement fidèle.

La notion d'objet compact d'une catégorie à colimites filtrantes :

Définition. –
Soit $\mathcal{M}$ une catégorie localement petite
qui a des "colimites filtrantes arbitraires"
au sens que pour toute petite catégorie filtrante $\mathcal{I}$,
le foncteur de composition avec $\mathcal{I} \to \{\bullet\}$

$$\mathcal{M} \longrightarrow [\mathcal{I}, \mathcal{M}]$$

admet un adjoint à gauche

$$\varinjlim_{\mathcal{I}} : [\mathcal{I}, \mathcal{M}] \longrightarrow \mathcal{M}\,.$$

Alors un objet M de $\mathcal{M}$ est dit

"compact"

si le foncteur

$$\mathrm{Hom}(M, \bullet) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

respecte les foncteurs de colimites filtrantes

$$\varinjlim_{\mathcal{I}}\,.$$

Colimites filtrantes dans les catégories de modèles :

Lemme. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre.*
Soit $\mathcal{E}$ un topos.
Soit $\mathcal{I}$ une petite catégorie filtrante.
Alors le foncteur de colimite filtrante

$$\varinjlim_{\mathcal{I}}$$

est bien défini dans la catégorie de modèles

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) .$$

Démonstration. – En effet, le foncteur de colimite filtrante

$$\varinjlim_{\mathcal{I}}$$

est bien défini dans le topos $\mathcal{E}$, et il respecte

- les limites finies arbitraires,
- les colimites arbitraires,
- donc aussi les interprétations des formules géométriques de la signature Σ de $\mathbb{T}$.

La notion d'objet compact dans les catégories de modèles :

Corollaire. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre.*
Soit $\mathcal{E}$ un topos.
Alors:

(i) *Les foncteurs de colimites filtrantes*

$$\varinjlim_{\mathcal{I}}$$

sont bien définis dans la catégorie $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$.

(ii) *La notion d'objet compact M est bien définie en demandant que le foncteur*

$$\mathrm{Hom}(M, \bullet) : \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

respecte les colimites filtrantes.

Définition. – *Un modèle ensembliste M d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ est dit "finiment présentable" s'il est un objet compact de la catégorie*

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})\,.$$

Calcul des modèles ensemblistes finiment présentables par un pont :

- On part d'une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

  et de l'équivalence de catégories qu'elle induit

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})\,.$$

- Considérant cette dernière équivalence,
  on calcule des deux côtés
  les sous-catégories pleines des objets compacts.
- Du côté de $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})$, on trouve par définition
  la sous-catégorie pleine des modèles finiment présentables

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})_{\mathrm{fp}}\,.$$

- Reste à déterminer les objets compacts
  de la catégorie à colimites filtrantes

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})\,.$$

Détermination des ind-objets compacts :

Lemme. – *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie essentiellement petite.*
Alors le foncteur pleinement fidèle

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kar}(\mathcal{D}) & \hookrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}\,, \\ (X,p) & \longrightarrow & \ker\big(y(X) \underset{\mathrm{id}}{\overset{p}{\rightrightarrows}} y(X)\big) \end{array}$$

est une équivalence sur la sous-catégorie pleine de

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{D})$$

constituée des objets compacts.

Démonstration. –

- Pour tout objet X de $\mathcal{D}$ muni d'un idempotent
$$p : X \longrightarrow X \quad \text{avec} \quad p \circ p = p\,,$$
la sous-catégorie de $\widehat{\mathcal{D}}$ constituée de
l'objet $y(X)$ muni des deux morphismes p, id
est filtrante, et sa colimite est l'image de
$$(X,p) \quad \text{par} \quad \mathrm{Kar}(\mathcal{D}) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}\,.$$
Donc on a une factorisation $\quad \mathrm{Kar}(\mathcal{D}) \hookrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{D})\,.$

- Les objets X de $\mathcal{D}$ dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}$ sont compacts car le foncteur
$$P \longmapsto \mathrm{Hom}(y(X), P) = P(X)$$
respecte les colimites.
Il en va de même des objets de $\mathrm{Kar}(\mathcal{D})$ car le foncteur de restriction
$$\widehat{\mathrm{Kar}(\mathcal{D})} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}} \qquad \text{est une équivalence.}$$

- Considérons un ind-objet de $\mathcal{D}$
$$P = \varinjlim_{\mathcal{I}} y(X_i)$$
écrit comme une colimite filtrante d'objets représentables $\quad y(X_i)$ indexés par une petite catégorie filtrante $\mathcal{I}$.
Si P est un objet compact, le morphisme identité
$$P \xrightarrow{=} P = \varinjlim_{\mathcal{I}} y(X_i)$$
se factorise pour un objet i_0 de $\mathcal{I}$ en
$$P \xrightarrow{j} y(X_{i_0}) \xrightarrow{r} \varinjlim_{\mathcal{I}} y(X_i) = P\,.$$
Alors
$$j \circ r : y(X_{i_0}) \longrightarrow y(X_{i_0})$$
provient d'un idempotent de $\mathcal{D}$
$$p : X_{i_0} \longrightarrow X_{i_0} \quad \text{avec} \quad p \circ p = p\,,$$
et P est l'image de l'objet (X_{i_0}, p) de $\mathrm{Kar}(\mathcal{C})$.

Application à un critère d'équivalence entre topos de préfaisceaux :

Corollaire. –
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories essentiellement petites.

Alors les équivalences de topos de préfaisceaux

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}$$

correspondent aux équivalences de catégories

$$\mathrm{Kar}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kar}(\mathcal{D})\,.$$

Remarque. –
En particulier, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont Karoubi-complètes,

les équivalences de topos de préfaisceaux

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}$$

correspondent aux équivalences de catégories

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}\,.$$

Application à la présentation des topos classifiants des topos de type préfaisceau :

Corollaire. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau.*
Soit $\mathcal{M}$ la catégorie des modèles finiment présentables de $\mathbb{T}$.
Alors :

- *La catégorie $\mathcal{M}$ est essentiellement petite.*
- *Elle est Karoubi-complète.*
- *On dispose d'une équivalence canonique de topos*
  $[\mathcal{M}, \mathrm{Ens}] = \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

Remarque. – Le modèle universel de $\mathbb{T}$ dans $[\mathcal{M}, \mathrm{Ens}]$ consiste à associer

- à toute sorte A de la signature Σ de $\mathbb{T}$, le préfaisceau
$$M \longmapsto MA$$
- à tout symbole de fonction $f : A_1 \cdots A_n \to B$ de Σ, le morphisme de préfaisceaux
$$M \longmapsto (MA_1 \times \cdots \times MA_n \xrightarrow{Mf} MB)\,,$$
- à tout symbole de relation $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ de Σ, le sous-préfaisceau
$$M \longmapsto (MR \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n)\,.$$

Caractérisation syntactique des théories de type préfaisceau :

Théorème (Caramello). – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de signature Σ. Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ la catégorie syntactique géométrique de $\mathbb{T}$, munie de sa topologie syntactique $J_{\mathbb{T}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La théorie $\mathbb{T}$ est de type préfaisceau.*

(2) *Tout objet de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, c'est-à-dire toute formule géométrique de Σ*

$$\varphi(\vec{x})$$

admet dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ un $J_{\mathbb{T}}$-recouvrement

$$\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) \longrightarrow \varphi(\vec{x})$$

par des formules $\varphi_i(\vec{x}_i)$ qui sont "$J_{\mathbb{T}}$-irréductibles".

Remarque. – Une formule géométrique $\psi(\vec{y})$ est "irréductible" si, pour toute famille de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$\theta_j(\vec{y}_j, \vec{y}) : \psi_j(\vec{y}_j) \longrightarrow \psi(\vec{y}) \quad \text{telle que l'implication} \quad \psi \vdash_{\vec{y}} \bigvee_j (\exists\, \vec{y}_j)\, \theta_j(\vec{y}_j, \vec{y})$$

soit $\mathbb{T}$-démontrable, il existe un undice j_0 tel que le morphisme

$$\theta_{j_0}(\vec{y}_{j_0}, \vec{y}) : \psi_{j_0}(\vec{y}_{j_0}) \longrightarrow \psi(\vec{y})$$

admette une section.

Présentation des modèles finiment présentables par des formules irréductibles :

Corollaire. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de type préfaisceau.*
Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ constituée des formules géométriques irréductibles.
Alors :

(i) *Le foncteur canonique*

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \xrightarrow{\ell} \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

se prolonge en une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,.$$

(ii) *Si $\mathcal{M}$ désigne la catégorie des modèles finiment présentables de $\mathbb{T}$, on a une équivalence de catégories induite*

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$$

qui associe à tout modèle finiment présentable

$$M$$

une formule géométrique irréductible

$$\varphi_M$$

qui "présente" le modèle ensembliste M.

La notion de présentation d'un modèle ensembliste par une formule :

Définition. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de type préfaisceau (ou plus généralement dont les modèles ensemblistes sont conservatifs). On dit qu'un modèle ensembliste de $\mathbb{T}$*

$$M$$

est "présenté" par une formule géométrique

$$\varphi(\vec{x})$$

de contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_k^{A_k}$ si, pour tout modèle ensembliste de $\mathbb{T}$

$$N\,,$$

se donner un morphisme de modèles

$$M \longrightarrow N$$

équivaut à se donner une famille d'éléments

$$n_1 \in NA_1, \cdots, n_k \in NA_k$$

qui satisfait la condition

$$(n_1, \cdots, n_k) \in N\varphi(\vec{x}) \hookrightarrow NA_1 \times \cdots \times NA_k\,.$$

Remarque. – On peut aussi dire que le modèle M est défini par k générateurs $x_1^{A_1}, \cdots, x_k^{A_k}$ et la relation $\varphi(\vec{x})$.

La notion d'objet irréductible d'un topos ou d'un site :

Définition. –

(i) *Un objet E d'un topos $\mathcal{E}$ est dit "irréductible"*
si, pour toute famille de morphismes de $\mathcal{E}$

$$E_i \longrightarrow E\,, \qquad i \in I\,,$$

telle que $\coprod\limits_i E_i \to E$ est un épimorphisme,
il existe un indice $i_0 \in I$ tel que le morphisme

$$E_{i_0} \longrightarrow E$$

admette une section.

(ii) *Un objet X d'une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$*
munie d'une topologie de Grothendieck J
est dit "J-irréductible"
si le seul crible J-couvrant de X
est le crible maximal.

Relations entre les notions d'irréductibilité :

- Pour tout site $(\mathcal{C}, J)$, le <u>foncteur canonique</u>
$$\ell : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$
transforme tout objet J-<u>irréductible</u> de $\mathcal{C}$
en un <u>objet irréductible</u> du topos $\widehat{\mathcal{C}}_J$.
- Réciproquement, si la topologie J de $\mathcal{C}$ est <u>sous-canonique</u>,
tout objet de $\mathcal{C}$ que le foncteur
$$\ell : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$
transforme en un <u>objet irréductible</u> du topos $\widehat{\mathcal{C}}_J$
est un objet J-<u>irréductible</u> de $\mathcal{C}$.
- En particulier,
pour toute <u>théorie géométrique</u> $\mathbb{T}$ de <u>site syntactique</u> $(\mathcal{C}_\mathbb{T}, J_\mathbb{T})$,
une <u>formule géométrique</u>
$$\varphi(\vec{x}) \qquad (= \text{objet de } \mathcal{C}_\mathbb{T})$$
est <u>irréductible</u> si et seulement si son image par le foncteur
$$\ell : \mathcal{C}_\mathbb{T} \longrightarrow \widehat{(\mathcal{C}_\mathbb{T})}_{J_\mathbb{T}} = \mathcal{E}_\mathbb{T}$$
est un <u>objet irréductible du topos classifiant</u> $\mathcal{E}_\mathbb{T}$ de $\mathbb{T}$.

Démonstration d'un sens du théorème et du corollaire par le "lemme de comparaison" de Grothendieck :

- Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique.
  Soient $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ son site syntactique géométrique
  et $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$
  constituée des formules géométriques $\varphi(\vec{x})$
  qui sont "$J_{\mathbb{T}}$-irréductibles".
- Demander que toute formule géométrique
  admette un $J_{\mathbb{T}}$-recouvrement par des formules irréductibles
  revient à demander que la sous-catégorie pleine

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$$

  soit $J_{\mathbb{T}}$-dense.
- Dans ce cas, la topologie $J_{\mathbb{T}}$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$
  induit sur $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$ la topologie discrète,
  et le "lemme de comparaison" de Grothendieck
  induit une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,.$$

Démonstration de l'autre sens du théorème et du corollaire par un pont topossique :

- On considère une théorie géométrique $\mathbb{T}$ supposée "de type préfaisceau".
  On sait déjà que la catégorie de ses modèles finiment présentables

  $$\mathcal{M}$$

  est "Karoubi-complète" et définit une équivalence

  $$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} .$$

- Nous allons calculer l'invariant des topos

  $$\mathcal{E} \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-catégorie pleine de } \mathcal{E} \\ \text{constituée des objets irréductibles} \end{array} \right\}$$

  des deux côtés de l'équivalence de topos

  $$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} .$$

Calcul des objets irréductibles d'un topos :

Lemme. – *Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site muni du foncteur canonique $\ell : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}_J = \mathcal{E}$.*

(i) *Tout objet irréductible E du topos $\widehat{\mathcal{C}}_J = \mathcal{E}$ est un "rétracte" de l'image $\ell(X)$ d'un objet X de $\mathcal{C}$ au sens qu'existe un idempotent*

$$p : \ell(X) \longrightarrow \ell(X) \qquad \textit{avec} \qquad p \circ p = p$$

tel que $\quad E = \ker(\ell(X) \underset{\mathrm{id}}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \ell(X))$.

(ii) *Si la topologie J de $\mathcal{C}$ est sous-canonique, et que la catégorie $\mathcal{C}$ est Karoubi-complète, le foncteur canonique ℓ induit une équivalence*

$$\ell : \mathcal{C}^{\mathrm{ir}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\mathrm{ir}}$$

de la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}^{\mathrm{ir}}$ de $\mathcal{C}$ des objets J-irréductibles sur la sous-catégorie pleine $\mathcal{E}^{\mathrm{ir}}$ des objets irréductibles du topos $\mathcal{E}$.

Preuve de la formule de calcul des objets irréductibles :

- Pour tout objet E d'un topos de faisceaux $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}_J$, il existe une famille d'objets X_i de $\mathcal{C}$ et de morphismes de $\mathcal{E}$
$$\ell(X_i) \longrightarrow E$$
tels que le morphisme $\coprod \ell(X_i) \to E$ soit un épimorphisme.
- Si E est un objet irréductible, il existe un indice i_0 et des morphismes de $\mathcal{E}$
$$E \xrightarrow{j} \ell(X_{i_0}) \xrightarrow{r} E$$
tels que $\quad r \circ j = \mathrm{id}_E$.
Posant $p = j \circ r$, on a $p \circ p = p$ et
$$E = \ker(\ell(X_{i_0}) \underset{\mathrm{id}}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \ell(X_{i_0}))\,.$$
- Si $\mathcal{C}$ est Karoubi-complète et J est sous-canonique, on obtient une équivalence de catégories
$$\mathcal{C}^{\mathrm{ir}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\mathrm{ir}}$$
puisque, comme on a déjà vu,

  un objet X de $\mathcal{C}$ est J-irréductible
  si et seulement si $\ell(X)$ est irréductible dans le topos $\widehat{\mathcal{C}}_J = \mathcal{E}$.

Fin de la démonstration du théorème et du corollaire :

- On considère une théorie géométrique $\mathbb{T}$ de type préfaisceau, sa catégorie $\mathcal{M}$ des modèles finiment présentables et l'équivalence canonique

$$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} .$$

- La catégorie $\mathcal{M}$ est Karoubi-complète et tout objet de $\mathcal{M}$ est irréductible pour la topologie discrète, donc on a une équivalence de catégories induite

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} .$$

- La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ est Karoubi-complète (car elle est cartésienne), et la topologie $J_{\mathbb{T}}$ est sous-canonique, donc on a aussi une équivalence de catégories

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} .$$

- Donc on a une équivalence canonique $\quad \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$ et la sous-catégorie pleine $\quad \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ est dense pour la topologie syntactique $J_{\mathbb{T}}$.

Caractérisation des théories de type préfaisceau par une triple correspondance entre syntaxe et sémantique :

Théorème (Caramello). – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie du premier ordre de signature Σ. Alors $\mathbb{T}$ est de type préfaisceau si et seulement si elle satisfait les trois conditions suivantes :*

(1) *Les modèles ensemblistes finiment présentables de $\mathbb{T}$ sont conservatifs, au sens qu'une propriété d'implication entre formules géométriques de Σ*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

est $\mathbb{T}$-démontrable si (et seulement si) elle est vérifiée par tous les modèles finiment présentables de $\mathbb{T}$.

(2) *Tout modèle ensembliste finiment présentable M de $\mathbb{T}$ est "présenté" par une formule géométrique de Σ*

$$\varphi_M(\vec{x}) \quad \textit{dans un contexte} \quad \vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_k^{A_k} \,,$$

au sens que pour tout modèle ensembliste N de $\mathbb{T}$, se donner un morphisme de modèles

$$M \longrightarrow N$$

équivaut à se donner une famille d'éléments

$$(n_1, \cdots, n_k) \in N\varphi_M(\vec{x}) \hookrightarrow NA_1 \times \cdots \times NA_k \,.$$

(3) *Pour toute suite de sortes $A_1, \cdots, A_n$ de Σ et toute famille de sous-ensembles*

$$P_M \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$$

indexée par les modèles ensemblistes finiment présentables de $\mathbb{T}$ qui est "fonctorielle" au sens que pour tout morphisme de modèles

$$M \longrightarrow N$$

l'application induite

$$MA_1 \times \cdots \times MA_n \longrightarrow NA_1 \times \cdots \times NA_n$$

envoie le sous-ensemble P_M dans le sous-ensemble P_N, il existe une formule géométrique de Σ

$$\varphi(\vec{x}) \quad \text{de contexte} \quad \vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$$

qui définit la famille fonctorielle $M \mapsto (P_M \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n)$, au sens que pour tout modèle ensembliste finiment présentable M de $\mathbb{T}$

$$P_M = M\varphi(\vec{x}) \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n\,.$$

Pourquoi les modèles ensemblistes finiment présentables d'une théorie de type préfaisceau sont conservatifs :

On l'a montré par le "pont topossique" qui consiste à calculer l'invariant

$$\text{topos } \mathcal{E} \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-catégorie pleine de } \mathrm{pt}(\mathcal{E}) \\ \text{constituée des objets compacts} \end{array} \right\}$$

des deux côtés d'une équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \,.$$

On obtient en effet ainsi une équivalence de catégories

$\mathrm{Kar}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} =$ catégorie des modèles ensemblistes finiment présentables,

et donc une équivalence de topos $\qquad \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

Via cette équivalence, les interprétations dans le modèle universel de $\mathbb{T}$ de formules géométriques

$$\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \quad \text{de contexte} \quad \vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$$

sont les sous-préfaisceaux

$$M \longmapsto \begin{cases} M\varphi(\vec{x}) & \hookrightarrow \quad MA_1 \times \cdots \times MA_n \,, \\ M\psi(\vec{x}) & \hookrightarrow \quad MA_1 \times \cdots \times MA_n \,. \end{cases}$$

Donc $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ est $\mathbb{T}$-démontrable si et seulement si elle est vérifiée par tous les modèles finiment présentables M.

Pourquoi les modèles ensemblistes finiment présentables d'une théorie de type préfaisceau sont présentés par des formules :

On l'a montré par le "pont topossique"
qui consiste à calculer l'invariant de topos

$$\mathcal{E} \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-catégorie pleine de } \mathcal{E} \\ \text{constituée des objets irréductibles} \end{array} \right\}$$

des deux côtés de l'équivalence de topos

$$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} .$$

On obtient en effet ainsi une équivalence de catégories

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$$

qui associe à tout modèle ensembliste finiment présentable M de $\mathbb{T}$
une formule géométrique (irréductible)

$$\varphi_M$$

qui "présente" le modèle M.

Pourquoi les propriétés fonctorielles des familles d'éléments des modèles finiment présentables d'une théorie de type préfaisceau sont définies par des formules géométriques :

On le démontre par le "pont topossique"
qui consiste à calculer l'invariant

$$\left\{\begin{array}{c}\text{topos } \mathcal{E} \text{ muni}\\ \text{d'un modèle } U \text{ de } \mathbb{T}\end{array}\right\} \longmapsto \left\{\begin{array}{c}\text{ensemble des sous-objets de l'objet de } \mathcal{E}\\ U\top(x_1^{A_1}\cdots x_n^{A_n})\end{array}\right\}$$

des deux côtés de l'équivalence de topos
munis du modèle universel de $\mathbb{T}$

$$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}}\,.$$

On obtient à gauche l'ensemble des sous-préfaisceaux

$$M \longmapsto (P_M \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n)$$

et à droite l'ensemble des classes de formules géométriques

$$\varphi(\vec{x}) \hookrightarrow \top(\vec{x}) = \top(x_1^{A_1}\cdots x_n^{A_n})\,.$$

Pour montrer qu'une théorie est de type préfaisceau si elle satisfait les trois conditions :

- On considère une théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ qui satisfait les conditions (1), (2), (3).

- On considère

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}} = \text{catégorie syntactique géométrique de } \mathbb{T},$$

$$J_{\mathbb{T}} = \text{topologie syntactique de } \mathbb{T},$$

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} = \text{sous-catégorie pleine de } \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$$
consituée des formules géométriques irréductibles.

- Pour montrer que $\mathbb{T}$ est de type préfaisceau, il suffit d'établir que $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ pour la topologie $J_{\mathbb{T}}$.

De la syntaxe vers la sémantique, via les interprétations des formules :

- Soit $\mathcal{M} =$ catégorie des modèles ensemblistes finiment présentables de $\mathbb{T}$
  $=$ sous-catégorie pleine de $\mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathrm{Ens})$
  constituée des objets compacts.
- On dispose du foncteur des interprétations

$$\begin{array}{rcl} I : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} = [\mathcal{M}, \mathrm{Ens}]\,, \\ \text{formule } \varphi(\vec{x}) & \longmapsto & \text{préfaisceau des interprétations} \\ & & \qquad M \mapsto M\varphi(\vec{x})\,, \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{formule} \\ \mathbb{T}\text{-démontrablement} \\ \text{fonctionnelle} \\ \theta(\vec{x},\vec{y}) : \varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{y}) \end{array}\right\} \longmapsto \left\{\begin{array}{c} \text{morphisme de préfaisceaux} \\ M \mapsto (M\varphi(\vec{x}) \to M\psi(\vec{y})) \\ \text{constitué des applications dont les graphes} \\ \text{sont} \quad M\theta(\vec{x},\vec{y}) \hookrightarrow M\varphi(\vec{x}) \times M\psi(\vec{y}). \end{array}\right.$$

- Il résulte des propriétés (1) et (3) que ce foncteur

$$I : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}}$$

est pleinement fidèle.

Irréductibilité des formules de présentation des modèles finiment présentables :

- Il résulte de (2) que tout modèle finiment présentable M, objet de
$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}},$$
est image d'une formule φ_M, objet de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, par le foncteur
$$I : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}}.$$
- Considérons un $J_{\mathbb{T}}$-recouvrement de φ_M dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$
$$\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_i(\vec{x}_i) = \varphi_i \longrightarrow \varphi_M = \varphi_M(\vec{x}).$$
Par définition de $J_{\mathbb{T}}$, l'implication
$$\varphi_M \vdash_{\vec{x}} \bigvee_i (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) \qquad \text{est } \mathbb{T}\text{-démontrable}.$$
Donc le morphisme de préfaisceaux dans $\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} = [\mathcal{M}, \mathrm{Ens}]$
$$\coprod_i I(\varphi_i) \longrightarrow I(\varphi_M) = y(M) = \mathrm{Hom}(M, \bullet)$$
est un épimorphisme, et il existe un indice i_0 tel que
$$\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}(M, M) \qquad \text{soit image d'un élément de } I(\varphi_{i_0}).$$
- Par pleine fidélité du foncteur $I : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}}$, cela signifie que le morphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$
$$\theta_{i_0}(\vec{x}_{i_0}, \vec{x}) : \varphi_{i_0}(\vec{x}_{i_0}) \longrightarrow \varphi_M(\vec{x})$$
est scindé.

Densité des formules irréductibles :

- Considérons une formule géométrique
$$\varphi = \varphi(\vec{x}) = \text{objet de } \mathcal{C}_{\mathbb{T}}\,.$$
- Il existe dans $\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} = [\mathcal{M}, \mathrm{Ens}]$ une famille de morphismes
$$y(M_i) \longrightarrow I(\varphi)$$
telle que
$$\coprod_i y(M_i) \longrightarrow I(\varphi)$$
soit un épimorphisme.
- Chaque $y(M_i) \to I(\varphi)$ est image d'un morphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$
$$\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) : \varphi_{M_i}(\vec{x}_i) = \varphi_{M_i} \longrightarrow \varphi = \varphi(\vec{x})\,,$$
et l'implication
$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_i (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i(\vec{x}_i, \vec{x})$$
est vérifiée en chaque modèle finiment présentable M,
donc est $\mathbb{T}$-démontrable.
- Donc $\varphi = \varphi(\vec{x})$ admet un $J_{\mathbb{T}}$-recouvrement par les formules
$$\varphi_{M_i} = \varphi_{M_i}(\vec{x}_i)$$
qui sont $J_{\mathbb{T}}$-irréductibles.

Un contre-exemple : la théorie des corps.

Corollaire. –
La théorie des corps [resp. des corps commutatifs]
peut se formaliser comme une théorie cohérente
mais elle n'est pas de type préfaisceau.

Démonstration. –

- La théorie des corps [resp. des corps commutatifs]
  est le quotient de la théorie (algébrique) des anneaux
  [resp. anneaux commutatifs]
  définie en ajoutant l'axiome cohérent

$$\top \vdash_k k = 0 \vee (\exists k')(k \cdot k' = 1 \wedge k' \cdot k = 1)\,.$$

- La propriété (sans variable libre) des corps K

$$\text{“car}(K) = 0\text{”}$$

  est fonctorielle,
  mais elle n'est définie par aucune formule géométrique.