IV. Quotients des théories de type préfaisceau

Rappels sur les théories de type préfaisceau :

- Une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ est dite "de type préfaisceau" si son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ admet une présentation
$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$
comme topos des préfaisceaux sur une catégorie essentiellement petite
$$\mathcal{C} \xrightarrow{\ell} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,.$$
- Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories essentiellement petites, la catégorie des équivalences
$$\widehat{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{C}}$$
équivaut à celle des équivalences
$$\mathrm{Kar}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Kar}(\mathcal{C}).$$
- En particulier, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont Karoubi-complètes, les équivalences
$$\widehat{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{C}}$$
correspondent aux équivalences
$$\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}\,.$$

Rappel des présentations sémantiques et syntactiques des topos classifiants des théories de type préfaisceau :

- Si $\mathbb{T}$ est une théorie de type préfaisceau, les deux catégories

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{M} = \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})_{\mathrm{fp}}\,, \\ \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} = \text{sous-catégorie pleine des formules “irréductibles”} \\ \qquad\quad \text{dans } \mathcal{C}_{\mathbb{T}} = \text{catégorie syntactique géométrique de } \mathbb{T}, \end{array}\right.$$

sont essentiellement petites et Karoubi complètes.

- On a deux présentations canoniques

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,, \\ \widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,. \end{array}$$

- L'équivalence induite

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$$

associe à tout modèle finiment présentable une formule irréductible qui présente ce modèle, et l'équivalence en sens inverse

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$$

associe à toute formule géométrique irréductible un modèle défini par cette formule.

Le cas particulier des théories cartésiennes :

- Si $\mathbb{T}$ est une <u>théorie cartésienne</u>
(en particulier, si $\mathbb{T}$ est une <u>théorie vide</u>,
ou <u>algébrique</u>
ou "<u>de Horn</u>"),
on a une présentation

$$\widehat{\mathcal{C}^{\mathrm{car}}_{\mathbb{T}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

comme <u>topos des préfaisceaux</u> sur
$\mathcal{C}^{\mathrm{car}}_{\mathbb{T}}$ = <u>théorie syntactique cartésienne</u> de $\mathbb{T}$
(constituée des formules $\mathbb{T}$-cartésiennes).
- La catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{car}}_{\mathbb{T}}$ est <u>cartésienne</u>, donc <u>Karoubi-complète</u>.

Corollaire. –
Si $\mathbb{T}$ est une <u>théorie cartésienne</u>, on a :

(i) *Les formules géométriques $\mathbb{T}$-<u>cartésiennes</u> dans la signature Σ de $\mathbb{T}$ sont les formules géométriques <u>irréductibles</u>.*

(ii) *Il y a <u>identité des deux catégories</u>*

$$\mathcal{C}^{\mathrm{car}}_{\mathbb{T}} = \mathcal{C}^{\mathrm{ir}}_{\mathbb{T}} .$$

La correspondance entre théories quotients et topologies :

- On considère une théorie $\mathbb{T}$ de type préfaisceau, munie d'une présentation

$$\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} .$$

- Le foncteur induit

$$\ell : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

  se factorise en

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{Kar}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}} .$$

- D'où un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$$

  et

$$\begin{cases} \text{tout objet } X \text{ de } \mathcal{C} \text{ définit une formule irréductible } \varphi_X, \\ \text{toute formule irréductible provient d'un idempotent d'un objet de } \mathcal{C}. \end{cases}$$

- Les morphismes entre deux objets X et Y de $\mathcal{C}$

$$X \xrightarrow{u} Y$$

  correspondent aux formules $\mathbb{T}$-démontrablement fonctionnelles

$$\theta_u(\vec{x}, \vec{y}) : \varphi_X(\vec{x}) \longrightarrow \varphi_Y(\vec{y}) .$$

Des topologies aux théories quotients :

Proposition. –
Considérons une présentation $\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
avec le foncteur pleinement fidèle induit

$$\begin{cases} \mathcal{C} & \hookrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}\,, \\ X & \longmapsto & \varphi_X\,, \\ (X \xrightarrow{u} Y) & \longmapsto & (\theta_u : \varphi_X \to \varphi_Y)\,. \end{cases}$$

Considérons une topologie J *sur* $\mathcal{C}$
engendrée par des familles couvrantes de la forme

$$(X_i \xrightarrow{u_i} X)_{i \in I}\,.$$

Alors adjoindre aux axiomes de $\mathbb{T}$ *les axiomes*

$$\varphi_X(\vec{x}) \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_{u_i}(\vec{x}_i, \vec{x})$$

définit une théorie quotient $\mathbb{T}_J$ *de* $\mathbb{T}$
telle que l'équivalence $\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
induise une équivalence

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}_J}\,.$$

Des théories quotients aux topologies :

Proposition. – *Considérons une présentation* $\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
avec le foncteur pleinement fidèle induit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \hookrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{T}}\,, \\ X & \longmapsto & \varphi_X \end{array}$$

dont l'image est dense pour la topologie $J_{\mathbb{T}}$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.
Considérons une théorie quotient $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$
définie en adjoignant aux axiomes de $\mathbb{T}$ des axiomes $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$.
Pour chaque tel axiome additionnel $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$, procédons ainsi :

- *Considérons le monomorphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$*
  $$(\varphi \wedge \psi)(\vec{x}) \hookrightarrow \varphi(\vec{x})\,.$$
- *Recouvrons $\varphi(\vec{x})$ par une famille $J_{\mathbb{T}}$-couvrante d'images d'objets de $\mathcal{C}$*
  $$\varphi_{X_i} \longrightarrow \varphi(\vec{x})\,, \quad i \in I\,.$$
- *Recouvrons chaque produit fibré dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$*
  $$(\varphi \wedge \psi) \times_{\varphi} \varphi_{X_i}$$
  par une famille $J_{\mathbb{T}}$-couvrante d'objets images de $\mathcal{C}$
  $$\varphi_{X_{i,k}} \longrightarrow (\varphi \wedge \psi) \times_{\varphi} \varphi_{X_i}\,, \quad k \in K_i\,.$$

Alors la topologie J' de $\mathcal{C}$ qui correspond à $\mathbb{T}'$
est engendrée par les familles couvrantes $(X_{i,k} \longrightarrow X_i)_{k \in K_i}$.

Le cas particulier de l'expression des axiomes en termes irréductibles :

Lemme. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de type préfaisceau.*
Alors toute relation d'implication entre formules géométriques $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$
est $\mathbb{T}$-démontrablement équivalente à une famille d'axiomes de la forme

$$\varphi_i \vdash_{\vec{x}_i} \bigvee_{k \in K_i} (\exists\, \vec{x}_k)\, \theta_{i,k}(\vec{x}_k, \vec{x}_i)$$

où

- *chaque $\varphi_i = \varphi_i(\vec{x}_i)$ est une formule irréductible,*
- *chaque $\varphi_{i,k}(\vec{x}_k) \xrightarrow{\theta_{i,k}} \varphi_i(\vec{x}_i)$ est une formule $\mathbb{T}$-démontrablement fonctionnelle reliant deux formules irréductibles $\varphi_{i,k}$ et φ_i.*

Démonstration. – C'est le cas particulier $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$ de la proposition précédente.
On choisit un $J_{\mathbb{T}}$-recouvrement de φ par des formules irréductibles

$$\varphi_i = \varphi_i(\vec{x}_i)$$

puis un $J_{\mathbb{T}}$-recouvrement de chaque produit fibré dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$(\varphi \wedge \psi) \times_{\varphi} \varphi_i$$

par des formules irréductibles $\varphi_{i,k} = \varphi_{i,k}(\vec{x}_k)$.

L'expression syntactique de la correspondance entre théories quotients et topologies :

Corollaire. –
Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de type préfaisceau,
avec la représentation induite de son topos classifiant

$$\widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,.$$

Soit $\mathbb{T}'$ une théorie quotient de $\mathbb{T}$
définie en adjoignant aux axiomes de $\mathbb{T}$ des axiomes de la forme

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{k \in K} (\exists\, \vec{x}_k)\, \theta_k(\vec{x}_k, \vec{x})$$

où les

$$\theta_k : \varphi_k = \varphi_k(\vec{x}_k) \longrightarrow \varphi(\vec{x}) = \varphi$$

sont des morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$.
Alors la topologie J' de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}$ qui correspond à $\mathbb{T}'$
est engendrée par les familles couvrantes

$$(\varphi_k \xrightarrow{\theta_k} \varphi)_{k \in K}\,.$$

Caractérisation des modèles des théories quotients :

Corollaire. – *Considérons une présentation* $\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *avec le foncteur pleinement fidèle induit*

$$\begin{cases} \mathcal{C} & \hookrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}}\,, \\ X & \longmapsto & \varphi_X\,, \\ (X \xrightarrow{u} Y) & \longmapsto & (\theta_u : \varphi_X \to \varphi_Y)\,. \end{cases}$$

Considérons une topologie J sur $\mathcal{C}$ engendrée par des familles couvrantes de la forme

$$(X_i \xrightarrow{u_i} X)_{i \in I}\,,$$

et la théorie quotient $\mathbb{T}_J$ de $\mathbb{T}$ qui lui correspond.
Alors un modèle M de $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$ est un modèle de $\mathbb{T}_J$ si et seulement si, pour toute telle famille couvrante

$$(X_i \xrightarrow{u_i} X)_{i \in I}\,,$$

le morphisme associé de $\mathcal{E}$

$$\coprod_{i \in I} M\varphi_{X_i} \xrightarrow{\coprod\limits_{i \in I} M\theta_{u_i}} M\varphi_X$$

est un épimorphisme.

Interprétations des formules et morphismes de modèles :

Théorème. –
Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau, avec la présentation induite

$$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \qquad \textit{pour } \mathcal{M} = \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})_{\mathrm{fp}}.$$

Soit M un objet de $\mathcal{M}$ présenté par une formule irréductible φ.
Alors pour tout modèle N de $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$, on peut écrire

$$N\varphi = \mathcal{H}om\,(p^* M, N)$$

où

- *$N\varphi$ est l'objet de $\mathcal{E}$ qui interprète la formule φ dans le modèle N,*
- *$p^* M$ est le modèle de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ déduit de M par le morphisme de topos*
$$p = (p^*, p_*) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens}\,,$$
- *$\mathcal{H}om(p^* M, N)$ est l'objet de $\mathcal{E}$ caractérisé par la propriété que, pour tout objet E de $\mathcal{E}$*
$$\mathrm{Hom}(E, \mathcal{H}om(p^* M, N)) = \mathrm{Hom}(p_E^*\, p^* M, p_E^* N)$$
si p_E^* désigne la composante d'image réciproque du morphisme canonique de topos
$$p_E : \mathcal{E}/E \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

Application à une caractérisation sémantique des théories quotients :

Corollaire. –
Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau, avec la présentation induite

$$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \, .$$

Soit J une topologie sur $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ qui définit une théorie quotient $\mathbb{T}_J$ de $\mathbb{T}$.
Soit $\mathcal{E}$ un topos muni de l'unique morphisme $\quad p = (p^*, p_*) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens}\, .$
Alors un modèle N *de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ est un modèle de $\mathbb{T}_J$ si et seulement si il est*

"J-homogène"

au sens que, pour toute famille J-couvrante de $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$

$$(M_i \longrightarrow M)_{i \in I} \, ,$$

le morphisme de $\mathcal{E}$ induit

$$\coprod_{i \in I} \mathcal{H}om\,(p^* M_i, N) \longrightarrow \mathcal{H}om\,(p^* M, N)$$

est un épimorphisme.

Remarque. – Il suffit de considérer une famille de familles J-couvrantes $(M_i \longrightarrow M)_{i \in I}$ qui engendre la topologie J de $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$.

Pour démontrer le théorème : topos relatifs

Proposition. – *Soit E un objet d'un topos $\mathcal{E}$. Alors:*

(i) *La catégorie relative $\mathcal{E}/E$ dont*

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet \quad \text{les objets sont les morphismes } E' \to E \text{ de } \mathcal{E}, \\ \bullet \quad \text{les morphismes sont les triangles commutatifs de } \mathcal{E} \\ \qquad \begin{tikzcd} E_1' \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_2' \arrow[dl] \\ & E & \end{tikzcd} \end{array}\right.$$

est un topos.

(ii) *Le foncteur*

$$\begin{array}{rccc} p_E^* : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/E\,, \\ & E' & \longmapsto & E' \times E \end{array}$$

est la composante d'image réciproque d'un morphisme de topos

$$p_E : \mathcal{E}/E \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

Esquisse de démonstration :

(i) Si $\mathcal{E}$ est le topos des faisceaux sur un site $(\mathcal{C}, J)$,
$\mathcal{E}/E$ s'identifie au topos des faisceaux sur la "catégorie des éléments" de E
$\int E = \mathcal{C}/E$ munie de la topologie induite par J.

(ii) En effet, p_E^* respecte à la fois les colimites arbitraires et les limites (arbitraires).

Pour démontrer le théorème : faisceaux de morphismes de foncteurs

Proposition. – *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie.*
Soient deux foncteurs à valeurs dans un topos $\mathcal{E}$

$$F_1, F_2 : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{E}\,.$$

Alors le foncteur contravariant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ E & \longmapsto & \mathrm{Hom}(p_E^* \circ F_1, p_E^* \circ F_2) \end{array}$$

est représentable par un objet de $\mathcal{E}$ noté $\quad \mathcal{H}om(F_1, F_2)\,.$

Esquisse de démonstration :

- Pour tous objets E_1, E_2 de $\mathcal{E}$, le foncteur contravariant
$$E \longmapsto \mathrm{Hom}(p_E^* E_1, p_E^* E_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E_1 \times E, E_2)$$
est représentable par un objet de $\mathcal{E}$ $\quad \mathcal{H}om(E_1, E_2)\,.$

- Le foncteur considéré est représentable par un sous-objet de
$$\prod_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{H}om(F_1(X), F_2(X))$$
car les conditions qui définissent les foncteurs à valeurs dans $\mathcal{E}$ sont locales pour la topologie canonique de $\mathcal{E}$.

Pour démontrer le théorème : faisceaux de morphismes de modèles

Corollaire. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre.*
Soient M_1, M_2 deux modèles de $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$.
Alors le foncteur contravariant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ E & \longmapsto & \mathrm{Hom}(p_E^* M_1, p_E^* M_2) \end{array}$$

est représentable par un objet de $\mathcal{E}$ noté

$$\mathcal{H}om(M_1, M_2)\,.$$

Démonstration. – Choisissons une présentation

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,.$$

Alors la catégorie des modèles de $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$
est reliée à celle des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$
par un foncteur pleinement fidèle

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \hookrightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{E}]$$

dont l'image est constituée des foncteurs plats et J-continus.

Pour démontrer le théorème : un lemme de Yoneda topossique

Lemme. – *Considérons un foncteur contravariant d'une petite catégorie* $\mathcal{C}$ *dans un topos* $\mathcal{E}$

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

Soit $p = (p^*, p_*) : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$ *le morphisme canonique de topos. Alors on a pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$*, de préfaisceau associé*

$$y(X) = \mathrm{Hom}(\bullet, X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}\,,$$

un isomorphisme canonique dans $\mathcal{E}$

$$\mathcal{H}om\,(p^* \circ y(X), F) \xrightarrow{\sim} F(X)\,.$$

Démonstration. –

- Il suffit de montrer qu'existe une bijection canonique
$$\mathrm{Hom}(p^* \circ y(X), F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(1_{\mathcal{E}}, F(X))\,.$$
- Comme $1_{\mathcal{E}} = p^* 1_{\mathrm{Ens}}$ et p^* admet pour adjoint à droite $p_* : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$, on est réduit à montrer qu'existe une bijection canonique
$$\mathrm{Hom}(y(X), p_* \circ F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(1_{\mathrm{Ens}}, (p_* \circ F)(X)) = p_* \circ F(X)\,.$$
C'est le lemme de Yoneda.

Fin de la démonstration du théorème :

- On considère une théorie $\mathbb{T}$ de type préfaisceau, avec la présentation

  $$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

  et l'équivalence canonique

  $$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$$

  qui associe à toute formule irréductible φ un modèle M_φ qu'elle présente.
- Les modèles N de $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$ muni de $p = (p^*, p_*) : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$ peuvent être vus comme les foncteurs plats

  $$\begin{array}{rccc} N & : \quad \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{E}\,, \\ & (\varphi \leftrightarrow M_\varphi) & \longmapsto & N\varphi\,. \end{array}$$

- On déduit du "lemme de Yoneda topossique"
  qu'existe pour tout tel foncteur plat $N : \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$
  et tout objet $(\varphi \leftrightarrow M_\varphi)$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{ir}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ un isomorphisme canonique de $\mathcal{E}$

  $$\mathcal{H}om\,(p^* \circ M_\varphi, N) \xrightarrow{\sim} N\varphi\,.$$

- Autrement dit, si un objet M de $\mathcal{M}$ est défini par une formule φ, l'interprétation de φ dans un modèle N de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ s'identifie à

  $$\mathcal{H}om\,(p^* M, N)\,.$$

Trois exemples de théories quotients de la théorie des anneaux commutatifs :

Programme :

- Introduire la théorie algébrique des anneaux commutatifs.
- Présenter son topos classifiant.
- Introduire les trois théories quotients que sont
  - la théorie des anneaux locaux,
  - la théorie des anneaux commutatifs intègres,
  - la théorie des corps commutatifs.
- Calculer les présentations des topos classifiants de ces théories dérivées de celle du topos classifiant de la théorie des anneaux.
- Calculer une autre présentation du topos classifiant de la théorie des corps commutatifs, dérivée de sa présentation comme théorie quotient d'une autre théorie algébrique, la théorie des anneaux commutatifs réguliers de Von Neumann.

La théorie des anneaux commutatifs :

Définition. –

(i) *La signature Σ_a de la théorie des anneaux commutatifs consiste en*

- *une sorte A,*
- *cinq symboles de fonction*

$$\begin{array}{cclcll} + & : & AA & \longrightarrow & A & \textit{(addition)}, \\ \cdot & : & AA & \longrightarrow & A & \textit{(multiplication)}, \\ 0 & : & & \longrightarrow & A & \textit{(élément neutre de l'addition)}, \\ 1 & : & & \longrightarrow & A & \textit{(élément neutre de la multiplication)}, \\ - & : & A & \longrightarrow & A & \textit{(passage à l'opposé)}. \end{array}$$

(ii) *La théorie $\mathbb{T}_a$ des anneaux commutatifs est définie dans la signature Σ_a par les axiomes suivants :*

- *Associativité :* $\top \vdash (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$
  $\top \vdash (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)$
- *Commutativité :* $\top \vdash a_1 + a_2 = a_2 + a_1$
  $\top \vdash a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1$
- *Neutralité :* $\top \vdash 0 + a = a$
  $\top \vdash 1 \cdot a = a$
- *Opposition :* $\top \vdash a + (-a) = 0$

Le topos classifiant de la théorie des anneaux commutatifs :

Observation. – *La théorie $\mathbb{T}_a$ des anneaux commutatifs est une théorie algébrique.*

Corollaire. – *Le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}_a}$ de $\mathbb{T}_a$ se présente sous les formes*

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}_a}\,, \\ \widehat{\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}_a}\,, \\ \widehat{\mathcal{C}^{\mathrm{ir}}_{\mathbb{T}_a}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}_a}\,, \\ \widehat{\mathcal{C}^{\mathrm{car}}_{\mathbb{T}_a}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}_a} \end{cases}$$

où

- $\mathcal{M} = \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens})_{\mathrm{pf}}$ *est la catégorie des anneaux commutatifs de présentation finie,*
- $\mathcal{M}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$ *est la catégorie des schémas affines de présentation finie,*
- $\mathcal{C}^{\mathrm{ir}}_{\mathbb{T}_a} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}_a} = \mathcal{C}^{\mathrm{geo}}_{\mathbb{T}_a}$ *est la sous-catégorie pleine de la catégorie syntactique géométrique $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_a}$ constituée des formules irréductibles,*
- $\mathcal{C}^{\mathrm{car}}_{\mathbb{T}_a}$ *est la catégorie syntactique cartésienne de $\mathbb{T}_a$, équivalente à $\mathcal{C}^{\mathrm{ir}}_{\mathbb{T}_a}$.*

La théorie des anneaux locaux :

Définition. – *La théorie des anneaux locaux* $\mathbb{T}_\ell$ *est la théorie quotient de celle des anneaux commutatifs* $\mathbb{T}_a$ *définie en ajoutant l'axiome cohérent*

$$(\exists\, b)(b \cdot (a_1 + a_2) = 1) \vdash_{a_1,a_2} (\exists\, b_1)(b_1 \cdot a_1 = 1) \vee (\exists\, b_2)(b_2 \cdot a_2 = 1)\,.$$

Observation. –

- Les trois formules
$$\begin{array}{l} (\exists\, b)\,(b \cdot (a_1 + a_2) = 1)\,, \\ (\exists\, b_1)\,(b_1 \cdot a_1 = 1)\,, \\ (\exists\, b_2)\,(b_2 \cdot a_2 = 1) \end{array}$$
sont cartésiennes, donc irréductibles.
- Il en est encore ainsi des deux formules
$$(\exists\, b)(b \cdot (a_1 + a_2) = 1) \wedge (\exists\, b_1)(b_1 \cdot a_1 = 1)\,,$$
$$(\exists\, b)(b \cdot (a_1 + a_2) = 1) \wedge (\exists\, b_2)(b_2 \cdot a_2 = 1)\,.$$

Schémas affines présentés par des formules irréductibles :

Lemme. –

(i) *Les formules irréductibles*

$$(\exists\, b_1)\,(b_1 \cdot a_1 = 1) \qquad \textit{et} \qquad (\exists\, b_2)\,(b_2 \cdot a_2 = 1)$$

présentent l'ouvert affine

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, X^{-1}])$$

complémentaire du point 0 *dans la droite affine*

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])\,.$$

(ii) *La formule irréductible*

$$(\exists\, b)(b \cdot (a_1 + a_2) = 1)$$

présente l'ouvert affine

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y][(X+Y)^{-1}])$$

complémentaire de la droite d'équation $X + Y = 0$ dans le plan affine

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y])\,.$$

(iii) *Les formules irréductibles*

$$(\exists\, b)(b \cdot (a_1 + a_2) = 1) \wedge (\exists\, b_1)\,(b_1 \cdot a_1 = 1) \quad \textit{et}$$

$$(\exists\, b)(b \cdot (a_1 + a_2) = 1) \wedge (\exists\, b_2)\,(b_2 \cdot a_2 = 1)$$

présentent les ouverts affines

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y][X^{-1}][(X+Y)^{-1}]) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y][Y^{-1}][(X+Y)^{-1}])\,.$$

Le topos classifiant de la théorie des anneaux locaux :

Proposition. –

(i) *Le topos classifiant de la théorie $\mathbb{T}_\ell$ des anneaux locaux se présente sous la forme*

$$(\widehat{\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}})_{J_\ell} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}_\ell}$$

où J_ℓ est la plus petite topologie de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$ pour laquelle les monomorphismes

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y][X^{-1}][(X+Y)^{-1}]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y][(X+Y)^{-1}])\,,$$

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y][Y^{-1}][(X+Y)^{-1}]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y][(X+Y)^{-1}])$$

forment un recouvrement.

(ii) *Cette topologie J_ℓ sur $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$ (= catégorie des schémas affines de présentation finie) n'est autre que la topologie de Zariski.*

Remarque. – D'après le “lemme de comparaison de Grothendieck”, on a une équivalence

$$(\widehat{\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}})_{\mathrm{Zar}} \xrightarrow{\sim} (\widehat{\mathrm{Sch}_{\mathrm{pf}}})_{\mathrm{Zar}}\,.$$

Vérification de l'engendrement de la topologie de Zariski :

- La topologie J_ℓ est contenue dans la topologie de Zariski. Il faut prouver l'inclusion en sens inverse.
- On rappelle que pour tout élément a d'un anneau commutatif A,
$$A_a = A[X]/(a \cdot X - 1)$$
est l'anneau déduit de A en inversant formellement l'élément a.
- Comme J satisfait l'axiome de stabilité, on voit que pour tous éléments a, b d'un anneau A, les deux monomorphismes
$$\mathrm{Spec}(A_{(a+b)\cdot a}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A_{(a+b)}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Spec}(A_{(a+b)\cdot b}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A_{(a+b)})$$
forment un recouvrement.
- Par stabilité et transitivité, on en déduit que pour tous éléments $a_1, \cdots, a_n$ d'un anneau A, la famille de n morphismes
$$\mathrm{Spec}(A_{(a_1+\cdots+a_n)\cdot a_i}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A_{(a_1+\cdots+a_n)})\,,\ 1 \leq i \leq n\,,$$
forme un recouvrement.
- S'il existe des éléments $b_1, \cdots, b_n \in A$ tels que $a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n = 1$, les $\mathrm{Spec}(A_{a_i \cdot b_i}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ forment un recouvrement, donc aussi les
$$\mathrm{Spec}(A_{a_i}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)\,.$$

La théorie des anneaux intègres :

Définition. –
La théorie des anneaux intègres $\mathbb{T}_i$
est la théorie quotient de celle des anneaux commutatifs $\mathbb{T}_a$
définie en ajoutant l'axiome cohérent

$$a \cdot b = 0 \vdash a = 0 \vee b = 0 \,.$$

Observation. –

- Les trois formules en les variables a et b

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0\,, \\ a &= 0\,, \\ b &= 0 \end{aligned}$$

  sont cartésiennes, donc irréductibles.

- Les implications en sens inverse

$$a = 0 \vdash a \cdot b = 0\,,$$

$$b = 0 \vdash a \cdot b = 0$$

  sont $\mathbb{T}_a$-démontrables.

Schémas affines présentés par des formules irréductibles :

Lemme. –
Les <u>formules irréductibles</u> en les variables a et b

$$\begin{array}{rcl} a \cdot b & = & 0\,, \\ a & = & 0\,, \\ b & = & 0 \end{array}$$

<u>présentent</u> les sous-schémas affines fermés

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]/(X\cdot Y)) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y])\,, \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]/(X)) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y])\,, \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]/(Y)) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]) \end{array}$$

du plan affine

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y])\,.$$

Le topos classifiant de la théorie des anneaux intègres :

Proposition. –

(i) *Le topos classifiant de la théorie* $\mathbb{T}_i$ *des anneaux intègres se présente sous la forme*

$$\widehat{(\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}})}_{J_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}_i}$$

où J_i *est la plus petite topologie de* $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$ *pour laquelle les immersions fermées*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]/(X)) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]/(X\cdot Y))\,, \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]/(Y)) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y]/(X\cdot Y)) \end{array}$$

forment un recouvrement.

(ii) *Un crible* C *sur un objet de* $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$

$$\mathrm{Spec}(A)$$

est J_i*-couvrant si et seulement si il existe des éléments* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *tels que*

$$a_1 \cdots a_n = 0$$

et que les immersions fermées

$$\mathrm{Spec}(A/(a_i)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)\,, \quad 1 \leq i \leq n\,,$$

soient éléments du crible C.

Identification de la topologie engendrée :

- Par stabilité de J_i, on voit que pour tous éléments a_1, a_2 d'un anneau commutatif A tels que $a_1 \cdot a_2 = 0$, les deux immersions fermées
$$\mathrm{Spec}(A/(a_1)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{Spec}(A/(a_2)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$
forment un J_i-recouvrement.
- Par transitivité de J_i, on en déduit que pour tous éléments $a_1, \cdots, a_n$ d'un anneau commutatif A tels que $a_1 \cdots a_n = 0$, la famille des immersions fermées
$$\mathrm{Spec}(A/(a_i)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)\,, \quad 1 \leq i \leq n$$
forme un J_i-recouvrement.
- Il reste à prouver que les cribles C des objets $\mathrm{Spec}(A)$ de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$ qui satisfont la condition de (ii) forment une topologie.
Les axiomes de maximalité et stabilité sont clairement vérifiés.
Pour la transitivité, il suffit de noter que si des éléments d'un anneau A
$$a_1, \cdots, a_n \quad \text{et} \quad a_{i,j}\,,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq k_i\,,$$
satisfont les conditions
$$a_1 \cdots a_n = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{1 \leq j \leq k_i} a_{i,j} \in a_i \cdot A,\ 1 \leq i \leq n,$$
alors on a aussi
$$\prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq k_i} a_{i,j} = 0\,.$$

La théorie des corps commutatifs :

Définition. –
La théorie des corps commutatifs $\mathbb{T}_c$
est la théorie quotient de celle des anneaux commutatifs $\mathbb{T}_a$
définie en ajoutant l'axiome cohérent

$$\top \vdash_a a = 0 \vee (\exists\, b) \cdot (b \cdot a = 1)\,.$$

Observation. –
Les deux formules en la variable a

$$a = 0\,,$$

$$(\exists\, b)(b \cdot a = 1)$$

sont cartésiennes, donc irréductibles.

Schémas affines présentés par des formules irréductibles :

Lemme. –
Les formules irréductibles en la variable a

$$a = 0\,,$$

$$(\exists\, b)(a \cdot b = 1)$$

présentent le sous-schéma fermé

$$0 : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$$

et le sous-schéma ouvert

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, X^{-1}]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])\,,$$

qui sont le point fermé 0 *de la droite affine*
et son sous-schéma ouvert complémentaire.

Le topos classifiant de la théorie des corps commutatifs :

Proposition. –

(i) *Le topos classifiant de la théorie $\mathbb{T}_c$ des corps commutatifs se présente sous la forme*

$$\widehat{(\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}})}_{J_c} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}_c}$$

où J_c est la plus petite topologie de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$ pour laquelle les deux immersions fermée et ouverte

$$\begin{array}{rcccc} 0 & : & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]) \,, \\ & & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, X^{-1}]) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]) \end{array}$$

forment un recouvrement.

(ii) *Un crible C sur un objet de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$*

$$\mathrm{Spec}(A)$$

est J_c-couvrant si et seulement si il existe des éléments $a_1, \cdots, a_n \in A$, tels que, pour toute partie $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ et si A_I désigne l'anneau déduit de A en annulant les éléments a_i, $i \in I$, et inversant les éléments a_j, $j \notin I$, le morphisme localement fermé

$$\mathrm{Spec}(A_I) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

est élément de C.

Identification de la topologie engendrée :

- Par stabilité de J_c,
  on voit que pour tout élément a d'un anneau commutatif A,
  les deux immersions fermée et ouverte

  $$\mathrm{Spec}(A/(a)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{Spec}(A_a) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

  forment un J_i-recouvrement.
- Par transitivité de J_c, on en déduit que
  pour tous éléments $a_1, \cdots, a_n$ d'un anneau commutatif A,
  la famille des immersions localement fermées associées

  $$\mathrm{Spec}(A_I) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)\,, \quad I \subseteq \{1, \cdots, n\}\,,$$

  forme un J_c-recouvrement.
- Il reste à noter que les cribles C des objets $\mathrm{Spec}(A)$ de $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$
  qui satisfont les conditions de (ii) forment une topologie.
  En effet, les axiomes de maximalité, stabilité et transitivité
  sont clairement vérifiés.

Une remarque sur les topologies :

Lemme. –
Sur la catégorie $\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}}$ des schémas affines de présentation finie, on a :

- **(i)** *La topologie $J_\ell = \mathrm{Zar}$ est sous-canonique.*
- **(ii)** *La topologie J_i n'est pas sous-canonique.*
- **(iii)** *A fortiori, la topologie $J_c \supseteq J_i$ n'est pas sous-canonique.*

Démonstration. –

- **(i)** En effet, pour n'importe quel recouvrement ouvert de Zariski d'un schéma affine
$$U_i \hookrightarrow X\,, \qquad 1 \le i \le n\,,$$
se donner un morphisme de schémas affines $X \to Y$ équivaut à se donner une famille de morphismes $U_i \to Y$, $1 \le i \le n$, qui coïncident sur les $U_i \cap U_j$.
- **(ii)** Le morphisme
$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^2))$$
forme un J_i-recouvrement mais il n'a pas de section.
- **(iii)** En effet, la topologie J_c contient la topologie J_i.

A la recherche d'une présentation alternative :

Programme :
Définir une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}'_c$ telle que :

- La théorie $\mathbb{T}'_c$ est "syntactiquement équivalente" à la théorie des corps commutatifs $\mathbb{T}_c$ (au sens qu'existe une équivalence entre leurs catégories syntactiques géométriques

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}'_c} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathbb{T}_c} \text{).}$$

- La théorie $\mathbb{T}'_c$ s'écrit naturellement comme un quotient d'une théorie $\mathbb{T}_r$ de type préfaisceau.
- Si $\mathcal{M}_r = \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})_{\mathrm{pf}}$ avec l'équivalence canonique

$$\widehat{\mathcal{M}_r^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}_r} \,,$$

l'unique topologie J_c sur $\mathcal{M}_r^{\mathrm{op}}$ telle que

$$\widehat{(\mathcal{M}_r^{\mathrm{op}})}_{J_c} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}'_c}$$

est sous-canonique.

Equivalence syntactique et équivalence sémantique :

On a les deux notions d'équivalences :

Définition. – *Deux théories géométriques du premier ordre $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ sont dites*

(i) *"syntactiquement équivalentes" s'il existe une équivalence entre leurs catégories syntactiques géométriques*

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathbb{T}_2} \, ,$$

(ii) *"sémantiquement équivalentes" (ou "Morita-équivalentes") s'il existe une équivalence entre leurs topos classifiants*

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}_2} \, .$$

Remarques. –

- Deux théories syntactiquement équivalentes sont a fortiori sémantiquement équivalentes.
- En effet, la topologie syntactique $J_{\mathbb{T}}$ d'une catégorie syntactique géométrique $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ est induite par la structure catégorique de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$:
  Une famille de morphismes $\theta_i : \varphi_i \to \varphi$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ est $J_{\mathbb{T}}$-couvrante si et seulement si elle est globalement épimorphique.

La théorie des anneaux commutatifs réguliers de Von Neumann :

Définition. –

(i) *La signature* Σ_r *de la théorie des anneaux commutatifs réguliers consiste en la signature* Σ_a *de la théorie des anneaux commutatifs complétée par*

- *un symbole de fonction supplémentaire*

$$(\bullet)^+ : A \to A \quad \textit{(passage au pseudo-inverse).}$$

(ii) *La théorie* $\mathbb{T}_r$ *des anneaux commutatifs réguliers est définie dans la signature* Σ_r
par les axiomes de la théorie $\mathbb{T}_a$ *des anneaux commutatifs complétés par les deux axiomes supplémentaires :*

- *Pseudo-inversion :* $\top \vdash_a a^+ \cdot a \cdot a = a$
- *Involution :* $\top \vdash_a (a^+)^+ = a$

Une théorie syntactiquement équivalente à celle des corps :

Définition. – *Soit $\mathbb{T}'_c$ la théorie quotient de $\mathbb{T}_r$ définie par le même axiome qui définit la théorie des corps commutatifs $\mathbb{T}_c$ comme quotient de celle des anneaux commutatifs $\mathbb{T}_a$*

$$\top \vdash_a a = 0 \vee (\exists\, b)(b \cdot a = 1)\,.$$

Lemme. – *Les théories $\mathbb{T}_c$ et $\mathbb{T}'_c$ sont syntactiquement équivalentes.*

Démonstration. –

- La formule en les deux variables a et b de sorte A
  $$(a = 0 \wedge b = 0) \vee (b \cdot a = 1)$$
  est $\mathbb{T}_c$-démontrablement fonctionnelle de $\top(a)$ dans $\top(b)$.
- Associer à la formule $\mathbb{T}'_c$-démontrablement fonctionnelle de Σ_r
  $$(b = a^+) : \top(a) \to \top(b)$$
  la formule $\mathbb{T}_c$-démontrablement fonctionnelle de Σ_a
  $$(a = 0 \wedge b = 0) \vee (b \cdot a = 1) : \top(a) \to \top(b)$$
  définit une équivalence de catégories
  $$\mathcal{C}_{\mathbb{T}'_c} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\mathbb{T}_c}\,.$$

Observation. –
La théorie $\mathbb{T}_r$ des anneaux commutatifs réguliers de Von Neumann est une théorie algébrique.

Corollaire. – *Le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}_r}$ de $\mathbb{T}_r$ se présente sous les formes*

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{M}_r^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}_r} \,, \\ \widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}_r}^{\mathrm{ir}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}_r} \,, \\ \widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}_r}^{\mathrm{car}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{\mathbb{T}_r} \end{cases}$$

où

- $\mathcal{M}_r = \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})_{\mathrm{pf}}$
  est la catégorie des anneaux commutatifs réguliers de présentation finie,
- $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_r}^{\mathrm{ir}} \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}_r}$
  est la sous-catégorie pleine de la catégorie syntactique géométrique $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_r}$ constituée des formules irréductibles,
- $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_r}^{\mathrm{car}}$ *est la catégorie syntactique cartésienne de $\mathbb{T}_r$, équivalente à $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_r}^{\mathrm{ir}}$.*

Anneaux réguliers et anneaux commutatifs :

Proposition. – *Considérons le foncteur d'oubli de l'opération* $(\bullet)^+$ *des anneaux réguliers*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens}) & \longrightarrow & \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens})\,, \\ (A,(\bullet)^+) & \longmapsto & A\,. \end{array}$$

Alors :

(i) *Pour tout anneau commutatif régulier* $(A,(\bullet)^+)$, *le morphisme diagonal*

$$A \longrightarrow \prod_{p\in\mathrm{Spec}(A)} A/p \hookrightarrow \prod_{p\in\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Frac}(A/p)$$

est injectif, et chacune de ses composantes

$$A \longrightarrow A/p \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A/p) = \kappa_p$$

transforme l'opération $(\bullet)^+$ *de* A *en l'opération*

$$\begin{array}{rcccl} (\bullet)^+ : & \kappa_p & \longrightarrow & \kappa_p\,, & \\ & k & \longmapsto & k^+ = \begin{cases} 0 & si \quad k = 0\,, \\ k^{-1} & si \quad k \neq 0\,. \end{cases} \end{array}$$

(ii) *Ce foncteur d'oubli admet pour adjoint à gauche le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens}) & \longrightarrow & \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})\,, \\ B & \longmapsto & B^+ \end{array}$$

où B^+ *est le plus petit sous-anneau de* $\prod\limits_{q\in\mathrm{Spec}(B)} \kappa_q$ *qui*

- *contient l'image de* B *par le morphisme diagonal* $B \to \prod\limits_{q\in\mathrm{Spec}(B)} \kappa_q$,
- *est respecté par l'involution produit des involutions* $(\bullet)^+ : \kappa_q \to \kappa_q$.

(iii) *Le foncteur composé*

$$\mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens}) \longrightarrow \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens}) \longrightarrow \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})\,, \quad (A,(\bullet)^+) \longmapsto A \longmapsto A^+$$

est canoniquement isomorphe au foncteur identité.

Identification de la structure des anneaux réguliers :

Prouvons (i). Pour cela, considérons un anneau régulier $(A, (\bullet)^+)$.

- Pour tout élément a de A, on a
$$a^+ \cdot a^2 = a$$
et donc, pour tout entier $n \geq 2$,
$$(a^+)^{n-1} \cdot a^n = a\,.$$
Il en résulte que tout élément nilpotent de A est nul, et donc que
$$A \longrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Spec}(A)} A/p$$
est un plongement.
- Pour tout idéal premier $p \in \mathrm{Spec}(A)$ et tout élément $a \in A$, les images $\overline{a}$ et $\overline{a}^+$ de a et a^+ dans
$$A/p \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A/p) = \kappa_p$$
satisfont les équations
$$\overline{a}^+ \cdot \overline{a}^2 = \overline{a} \qquad \text{et} \qquad (\overline{a}^+)^2 \cdot \overline{a} = \overline{a}^+$$
qui impliquent
$$\begin{cases} \overline{a}^+ = 0 & \text{si} \quad \overline{a} = 0\,, \\ \overline{a}^+ = \overline{a}^{-1} & \text{si} \quad \overline{a} \neq 0\,. \end{cases}$$

Construction d'un adjoint à gauche :

Prouvons (ii). Pour cela, considérons

- un anneau commutatif régulier $(A, (\bullet)^+)$,
- un anneau commutatif B,
- le plus petit sous-anneau B^+ de $\prod\limits_{q \in \mathrm{Spec}(B)} \kappa_q$ qui

$$\begin{cases} \text{contient l'image de } B \text{ par } B \to \prod\limits_q \kappa_q, \\ \text{est respecté par l'involution produit des } (\bullet)^+ : \kappa_q \to \kappa_q. \end{cases}$$

- Tout morphisme d'anneaux réguliers $B^+ \to (A, (\bullet)^+)$ induit un morphisme d'anneaux commutatifs $B \to A$.
- Réciproquement, considérons un morphisme d'anneaux commutatifs
$$u : B \longrightarrow A\,.$$
Il induit une application $\quad u^{-1} : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$
et, pour tout idéal premier $p \in \mathrm{Spec}(A)$ d'image $u^{-1}(p) = q \in \mathrm{Spec}(B)$,
un carré commutatif :
$$\begin{array}{ccc} B/q & \longrightarrow & A/p \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \kappa_q & \longrightarrow & \kappa_p \end{array}$$
L'image réciproque de $A \hookrightarrow \prod\limits_{p \in \mathrm{Spec}(A)} A/p \hookrightarrow \prod\limits_p \kappa_p$ dans le produit $\prod\limits_{q \in \mathrm{Spec}(B)} \kappa_q$
est un sous-anneau stable par $(\bullet)^+$ qui contient l'image de B, donc contient B^+.

Pleine fidélité du foncteur d'oubli :

Prouvons (iii).

Pour tout anneau commutatif régulier $(A, (\bullet)^+)$, le plongement

$$A \hookrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Spec}(A)} A/p \hookrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Spec}(A)} \kappa_p$$

identifie A au plus petit sous-anneau

$$A^+ \hookrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Spec}(A)} \kappa_p$$

qui $\begin{cases} \text{contient l'image de } A, \\ \text{est respecté par l'involution produit des } (\bullet)^+ : \kappa_p \to \kappa_p. \end{cases}$

Corollaire. – *Le foncteur d'oubli de l'opération* $(\bullet)^+$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens}) & \longrightarrow & \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens}), \\ (A, (\bullet)^+) & \longmapsto & A \end{array}$$

est pleinement fidèle.

Transport des modèles de présentation finie :

Corollaire. – *Le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens}) & \longrightarrow & \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})\,, \\ B & \longmapsto & B^+ \end{array}$$

induit un foncteur

$$\mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}} = \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pf}} \longrightarrow \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pf}}$$

qui associe à tout modèle de $\mathbb{T}_a$ présenté par une formule $\mathbb{T}_a$-cartésienne φ de Σ_a

$$\mathrm{Spec}(B_\varphi)$$

un modèle de $\mathbb{T}_r$ présenté par φ vue comme une formule $\mathbb{T}_r$-cartésienne de Σ_r.

Démonstration. – *En effet, pour tout anneau commutatif régulier $(A, (\bullet)^+)$, l'ensemble*

$$\mathrm{Hom}(B_\varphi^+, (A, (\bullet)^+))$$

s'identifie par adjonction à

$$\mathrm{Hom}(B_\varphi, A)$$

et donc à l'interprétation de la formule φ dans A

$$A\varphi\,.$$

Anneaux réguliers présentés par des formules irréductibles :

Corollaire. –
Les formules irréductibles en la variable a

$$a = 0\,,$$

$$(\exists\, b)(a \cdot b = 1)$$

présentent les transformées par le foncteur adjoint à gauche

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}} = \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pf}} & \longrightarrow & \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pf}} = \mathrm{Sch}_{\mathrm{arpf}} \\ \mathrm{Spec}(B) & \longmapsto & \mathrm{Spec}(B^+) \end{array}$$

de l'immersion fermée

$$0 : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$$

et de l'immersion ouverte

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, X^{-1}]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])\,.$$

Une présentation alternative du topos classifiant de la théorie des corps :

Corollaire. –

Le topos classifiant de la théorie $\mathbb{T}_c$ des corps commutatifs se présente sous la forme

$$\big(\widehat{\mathrm{Sch}_{\mathrm{arpf}}}\big)_{J_c} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}_c}$$

où J_c est la plus petite topologie de la sous-catégorie pleine

$$\mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pf}} = \mathrm{Sch}_{\mathrm{arpf}} \hookrightarrow \mathrm{Sch}_{\mathrm{apf}} = \mathbb{T}_a\text{-mod}(\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pf}}$$

pour laquelle les deux morphismes

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}^+) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]^+)\,,$$

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,X^{-1}]^+) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]^+)$$

forment un recouvrement.

Identification de la topologie engendrée :

Corollaire. –
Un <u>crible</u> C sur un objet

$$(\mathrm{Spec}(A), (\bullet)^+)$$

de

$$\mathrm{Sch}_{\mathrm{arpf}} = \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pf}}$$

est J_c-<u>couvrant</u> si et seulement si
il existe des éléments $a_1, \cdots, a_n \in A$ tels que,
pour toute partie $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$
et si A_I désigne l'anneau déduit de A en
<u>annulant</u> les éléments a_i, $i \in I$, et <u>inversant</u> les éléments a_j, $j \notin I$,
le morphisme induit par adjonction

$$\mathrm{Spec}(A_I^+) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A), (\bullet)^+)$$

est élément de C.

Décomposition des anneaux commutatifs réguliers :

Lemme. – *Pour tout élément a d'un anneau commutatif régulier A, on a*

- A/aA *et* $A_a = A[X]/(a \cdot X - 1)$ *sont réguliers,*
- *le morphisme* $A \to A/aA \times A_a$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. –
Pour tout idéal premier $p \in \mathrm{Spec}(A)$*, l'image de* a *dans* A/p *est*

$$\begin{cases} 0 & si \quad p \in \mathrm{Spec}(A/aA)\,, \\ inversible & si \quad p \in \mathrm{Spec}(A_a)\,. \end{cases}$$

Les équations $\quad a^+ \cdot a^2 = a \quad$ *et* $\quad (a^+)^2 \cdot a = a^+$
impliquent alors que l'image de $a^+ \cdot a$ *dans* A/p *est*

$$\begin{cases} 0 & si \quad p \in \mathrm{Spec}(A/aA)\,, \\ 1 & si \quad p \in \mathrm{Spec}(A_a)\,. \end{cases}$$

D'où la conclusion.

Corollaire. –
Sur la catégorie des schémas affines réguliers de présentation finie

$$\mathrm{Sch}_{\mathrm{arpf}} = \mathbb{T}_r\text{-mod}(\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pf}}\,,$$

la topologie J_c *est sous-canonique.*