Démontrabilité au premier ordre et engendrement de topologies de Grothendieck

par Laurent Lafforgue

(Centre de recherche fondamentale de Huawei, Boulogne, France)

Plan général :

I. Les topos comme ponts entre formes géométriques et descriptions linguistiques

Pour nous dans cette présentation,
une "forme géométrique"
sera un "site" :

Définition. –
Un "site" est une paire $(\mathcal{C}, J)$ *constituée de*

- *une catégorie* $\mathcal{C}$
  supposée "petite" ou "essentiellement petite",
- *une "topologie de Grothendieck"* J
  sur la catégorie $\mathcal{C}$.

La notion de catégorie :

Définition. – *Une catégorie* $\mathcal{C}$ *consiste en la triple donnée de*

- *une collection* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *dont les éléments sont appelés les* *objets* *de* $\mathcal{C}$,
- *pour toute paire d'objets* X, Y, *une collection* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *dont les éléments* f *sont appelés les* *morphismes* $f : X \to Y$ *de* X *dans* Y,
- *pour tout triplet d'objets* X, Y, Z *une* *loi de composition* *des morphismes*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X, Z)\,, \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f\,, \end{array}$$

vérifiant :

- *cette loi est* *associative*, *au sens que pour toute suite de morphismes* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$, *on a* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
- *à tout objet* X *est associé un morphisme* *"identité"* $\mathrm{id}_X : X \to X$, *tel que, pour tout morphisme* $f : X \to Y$ *[resp.* $g : Y \to X$*], on a* $f \circ \mathrm{id}_X = f$ *[resp.* $\mathrm{id}_X \circ g = g$*].*

Remarques. –

(i) Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite <u>“localement petite”</u>
si, pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$,
$\mathrm{Hom}(X, Y)$ est un ensemble.

(ii) Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite <u>“petite”</u>
si elle est localement petite
et si ses objets forment un ensemble $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(iii) Dans une catégorie $\mathcal{C}$,
un morphisme $f : X \to Y$ est un <u>“isomorphisme”</u>
s'il existe un morphisme (nécessairement unique)

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X \qquad \text{tel que}$$

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \,.$$

Les catégories comme environnement mathématique :

- En règle générale, les objets mathématiques d'une certaine nature et les transformations de ces objets respectant cette nature commune forment une catégorie.
- Premier exemple : la catégorie Ens

  des ensembles ($=$ objets)

  et des applications ($=$ morphismes).
- A partir de cet exemple,
  une infinie diversité d'exemples dérivés :
  Tout "type de structure" $\mathbb{T}$ définit
  une "catégorie des modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$"

  $$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})$$

  dont

  $$\left\{\begin{array}{ll} - & \text{les objets sont les ensembles munis d'une structure de type } \mathbb{T}, \\ - & \text{les morphismes sont les applications} \\ & \text{qui respectent les structures de type } \mathbb{T}. \end{array}\right.$$

Les catégories de passages d'un environnement à un autre :

Définition. – *Toute paire de catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ définit une catégorie*

$$[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$$

dont

- *les objets sont les* *"foncteurs"*

  $$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

  c'est-à-dire les applications

  $$\begin{cases} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X & \longmapsto \quad F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})\,, \\ \mathrm{Hom}(X, Y) \ni f & \longmapsto \quad F(f) \in \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))\,, \end{cases}$$

  telles que

  $$\begin{cases} F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} \text{ pour tout } X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\,, \\ F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ pour tous } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z\,, \end{cases}$$

- *les morphismes $F \to G$ sont les* *"transformations naturelles"* *d'un foncteur F dans un foncteur G, c'est-à-dire les applications*

  $$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \longmapsto (\alpha_X : F(X) \to G(X) \in \mathrm{Hom}(F(X), G(Y)))$$

  telles que, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$,

  $$\alpha_Y \circ F(f) = G(F) \circ \alpha_X\,.$$

Remarques. –

(i) Toute catégorie $\mathcal{C}$ possède un "foncteur identité"

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui est

$$\begin{cases} X & \longmapsto & X\,, \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & (X \xrightarrow{f} Y)\,. \end{cases}$$

(ii) Les petites catégories et les foncteurs entre elles forment une catégorie localement petite notée

$$\mathrm{Cat}\,.$$

(iii) Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est appelé une "équivalence de catégories" s'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tel que

$$\begin{cases} G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \text{ dans } [\mathcal{C}, \mathcal{C}]\,, \\ F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \text{ dans } [\mathcal{D}, \mathcal{D}]\,. \end{cases}$$

(iv) Une catégorie est dite "essentiellement petite" si elle est équivalente à une petite catégorie.

Catégories opposées et foncteurs contravariants :

Définition. – *Toute catégorie $\mathcal{C}$ définit une <u>"catégorie opposée"</u> $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ par*

$$\begin{cases} \bullet \quad \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\,, \\ \bullet \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \\ \bullet \quad \begin{cases} \qquad g \circ f \quad \longleftrightarrow \quad f \circ g \qquad\qquad \textit{pour} \\ \begin{pmatrix} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \\ \textit{dans } \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z \\ \textit{dans } \mathcal{C} \end{pmatrix}. \end{cases} \end{cases}$$

Remarque. – On a toujours $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Définition. – *Pour toutes catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, on définit :*

(i) *Un <u>"foncteur contravariant"</u> de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est un foncteur*

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{D}\,.$$

(ii) *La <u>catégorie des foncteurs contravariants</u> de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est*

$$[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}]\,.$$

Remarque. – On a toujours $[\mathcal{C}, \mathcal{D}^{\mathrm{op}}] = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}]^{\mathrm{op}}$.

Plongement de Yoneda et préfaisceaux :

Lemme de Yoneda. –

(i) *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie localement petite, on dispose du "foncteur de Yoneda"*

$$\begin{array}{rcl} y : \mathcal{C} & \longrightarrow & [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] = \widehat{\mathcal{C}}\,, \\ X & \longmapsto & \mathrm{Hom}(\bullet, X) = \left\{ \begin{array}{rcl} Y & \mapsto & \mathrm{Hom}(Y, X)\,, \\ (Y_1 \xrightarrow{f} Y_2) & \mapsto & [\mathrm{Hom}(Y_2, X) \xrightarrow{\bullet \circ f} \mathrm{Hom}(Y_1, X)] \end{array} \right. . \end{array}$$

(ii) *Ce foncteur est "pleinement fidèle" au sens que, pour tous objets X, X', l'application $y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(y(X), y(X'))$ est bijective.*

Définition. – *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie petite (ou essentiellement petite) :*

(i) *Les foncteurs contravariants*

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

sont appelés les "préfaisceaux" sur $\mathcal{C}$.

(ii) *La catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ est appelée le "topos des préfaisceaux" sur $\mathcal{C}$.*

Génération combinatoire des catégories :

Observation. – *Toute catégorie $\mathcal{C}$ peut être présentée comme engendrée par*

- *une collection $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ d'objets X,*
- *une collection $\mathcal{F}$ de flèches $X \xrightarrow{f} Y$,*
- *une collection de relations d'égalité*

$$f_n \circ \cdots \circ f_1 = f'_{n'} \circ \cdots \circ f'_1$$

entre des composés formels de chaînes de flèches de $\mathcal{F}$

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \cdots \xrightarrow{f_n} X_n = Y$$

et

$$X = X'_0 \xrightarrow{f'_1} X'_1 \cdots \xrightarrow{f'_{n'}} X'_{n'} = Y\,.$$

Remarque. – Toute telle relation $f_n \circ \cdots \circ f_1 = f'_{n'} \circ \cdots \circ f'_1$ en engendre d'autres par composition à gauche ou à droite.

Remarque. – Toute petite catégorie est colimite ($=$ limite inductive) filtrante de catégories "finiment présentées" (c'est-à-dire engendrées par des ensembles finis d'objets, de flèches et de relations).

Une remarque importante pour nous :

Le passage à une représentation combinatoire d'une catégorie est en général impraticable.

- Supposons par exemple que
$$\mathcal{C} = \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})$$
est la catégorie des ensembles munis d'un type de structure algébrique $\mathbb{T}$.
Alors :
  - Tout objet de $\mathcal{C}$ peut être défini en termes de générateurs et relations (et il est colimite filtrante d'objets définis en termes de familles finies de générateurs et de relations).
  - En revanche, les morphismes entre de tels objets
$$X \longrightarrow Y$$
consistent en les applications qui préservent les structures de type $\mathbb{T}$.
Les connaître revient à résoudre des équations.
C'est impossible en général.

Ex: Si $\mathbb{T}$ est le type de structure "anneau commutatif",

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T_1, \cdots, T_n]/\{P_i(T_1, \cdots, T_n), 1 \leq i \leq k\}, A)$$
$$= \{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n \mid P_i(a_1, \cdots, a_n) = 0, 1 \leq i \leq k\}.$$

La notion de topologie de Grothendieck :

On peut donner deux définitions

- en termes de cribles,
- en termes de familles couvrantes de morphismes.

Définition. –

(i) *Soit X un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$.*
Un "crible" sur X est une collection C de morphismes de but X

$$U \xrightarrow{u} X$$

telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Pour tout élément } U \xrightarrow{u} X \textit{ de } C \textit{ et tout morphisme } V \xrightarrow{v} U \textit{ de } \mathcal{C}, \\ \textit{le composé } u \circ v : V \to U \to X \textit{ est élément de } C. \end{array} \right.$$

(ii) *L'image réciproque par un morphisme $X' \xrightarrow{x} X$ de $\mathcal{C}$ d'un crible C sur X est le crible sur X'* $\quad x^* C = \{U' \xrightarrow{u} X' \mid x \circ u \in C\}$.

Remarques. –

- Toute équivalence de catégories $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ identifie les cribles sur un objet X de $\mathcal{C}$ aux cribles sur l'objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$.
- Si $\mathcal{C}$ est petite ou essentiellement petite, les cribles sur un objet X de $\mathcal{C}$ forment un ensemble.

Définition 1. –

Une <u>"topologie de Grothendieck"</u> J sur une catégorie $\mathcal{C}$ est une <u>application</u>

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \longmapsto J(X) = \textit{collection de cribles sur } X$$

qui satisfait les trois axiomes suivants :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{(\underline{Maximalité})} & \text{Pour tout objet } X \text{ de } \mathcal{C}, \\
& \text{son \underline{“crible maximal”}} \\
& \text{(constitué de tous les morphismes de but } X\text{)} \\
& \text{est élément de } J(X). \\[2ex]
\text{(\underline{Stabilité})} & \text{Pour tout morphisme } X' \xrightarrow{x} X \text{ de } \mathcal{C} \\
& \text{et tout } C \in J(X), \\
& \text{alors } x^* C \in J(X'). \\[2ex]
\text{(\underline{Transitivité})} & \text{Pour tous cribles } C, C' \text{ sur un objet } X \text{ de } \mathcal{C} \\
& \text{tels que } \; C \in J(X) \\
& \text{et } \qquad u^* C' \in J(U)\,, \quad \forall\, (U \xrightarrow{u} X) \in C, \\
& \text{alors } \qquad C' \in J(X).
\end{array}\right.$$

Ordre sur les topologies et topologies engendrées :

Lemme. – *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite. Alors :*

(i) *Les topologies de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$ forment un ensemble ordonné par la relation d'inclusion.*

(ii) *Pour toute famille de topologies J_i, $i \in I$, sur $\mathcal{C}$, leur intersection*

$$\bigwedge_{i \in I} J_i$$

est une topologie sur $\mathcal{C}$.

(iii) *Pour toute famille de cribles C_i sur des objets X_i de $\mathcal{C}$, il existe une plus petite topologie J sur $\mathcal{C}$ qui contient tous les cribles C_i. C'est la topologie engendrée par les C_i, $i \in I$.*

Remarques. –

- Une réunion de topologies J_i, $i \in I$, n'est pas une topologie (elle satisfait la stabilité mais pas la transitivité). Mais elle engendre une topologie $\bigvee\limits_{i \in I} J_i$.
- On peut montrer que pour toutes topologies J et J_i, $i \in I$, sur $\mathcal{C}$, on a

$$J \wedge (\bigvee_{i \in I} J_i) = \bigvee_{i \in I} (J \wedge J_i) \,.$$

Définition 2. – *Une topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$ (essentiellement petite) est une propriété (appelée "propriété d'être J-couvrante") des familles de morphismes de même but*

$$(U_i \xrightarrow{u_i} X)_{i \in I}\,,$$

qui satisfait les trois axiomes suivants :

(*Maximalité*) *Tous les morphismes $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$ sont J-couvrants.*

(*Stabilité*) *Pour tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$ de $\mathcal{C}$ et toute famille J-couvrante $(U_i \xrightarrow{u_i} X)_{i\in I}$ de X, il existe une famille J-couvrante $(U'_j \xrightarrow{u'_j} X')_{j\in J}$ de X' telle que chaque composé $U'_j \xrightarrow{u'_j} X' \xrightarrow{x} X$ se factorise à travers l'un au moins des $U_i \xrightarrow{u_i} X$.*

(*Transitivité*) *Si $(U_i \xrightarrow{u_i} X)_{i\in I}$ est J-couvrante, alors :*

- *Toute famille $(W_k \xrightarrow{w_k} X)$ à travers laquelle se factorisent les $U_i \xrightarrow{u_i} X$ est J-couvrante.*
- *Si pour tout $i \in I$, $(V_{i,j} \xrightarrow{v_{i,j}} U_i)_{j\in J_i}$ est une famille J-couvrante, la famille des composés*

$$(V_{i,j} \xrightarrow{v_{i,j}} U_i \xrightarrow{u_i} X)_{i\in I, j\in J_i}$$

est J-couvrante.

Relation entre les deux définitions :

Observation. – *Dans une catégorie $\mathcal{C}$,*
toute famille de morphismes de même but X

$$(U_i \xrightarrow{u_i} X)_{i\in I}$$

engendre un crible sur X qui est

$$\{U \xrightarrow{u} X \mid \exists\, i \in I, \exists\,(U \xrightarrow{u'} U_i), u = u_i \circ u'\}.$$

Lemme. – *Sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$,*
les deux définitions des topologies se correspondent par :

(i) *Une topologie de Grothendieck $J : X \mapsto J(X)$ sur $\mathcal{C}$*
définit une notion de famille J-couvrante

$$(U_i \xrightarrow{u_i} X)_{i\in I}$$

$=$ *famille dont le crible engendré est élément de $J(X)$.*

(ii) *Une notion de famille J-couvrante $(U_i \xrightarrow{u_i} X)_{i\in I}$*
définit une topologie de Grothendieck J
dont les cribles sont ceux engendrés par des familles J-couvrantes.

Engendrement combinatoire des topologies :

Soit une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$.
On part d'une application quelconque

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \longmapsto J_0(X) = \text{ensemble de cribles sur } X.$$

Problème. – *Construire la topologie J sur $\mathcal{C}$ engendrée par J_0.*

- Etape 1 : Remplacer $X \mapsto J_0(X)$ par
$$X \longmapsto J_1(X) = J_0(X) \cup \{\text{crible maximal sur } X\}.$$
- Etape 2 : Remplacer $X \mapsto J_1(X)$ par
$$X \longmapsto J_2(X) = \bigcup_{S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \ \bigcup_{\substack{(X \xrightarrow{s} S) \\ \in \mathrm{Hom}(X,S)}} \{s^* C \mid C \in J_1(S)\}.$$
- Etape 3 :
$J(X)$ est l'ensemble des cribles qui contiennent une famille de composés
$$U_k \xrightarrow{u_k} U_{k-1} \xrightarrow{u_{k-1}} U_{k-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow U_1 \xrightarrow{u_1} U_0 = X$$
où, pour chaque i, $0 \leq i < k$, fixé et chaque U_i fixé, les morphismes
$$U_{i+1} \xrightarrow{u_{i+1}} U_i$$
engendrent un crible de U_i qui est élément de $J_2(U_i)$.

Démonstration de ce que J est une topologie de Grothendieck :

- Maximalité : $J(X) \supseteq J_2(X) \supseteq J_1(X) \ni$ crible maximal de X.
- Transitivité : Un composé de “multicomposés” (de la forme de l'étape 3) de longueurs k et k' est un “multicomposé” de longueur $k + k'$.
- Stabilité : On considère un morphisme $x : X' \to X$ et un crible C de $J(X)$ qui contient une famille de composés
$$U_k \xrightarrow{u_k} U_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow U_1 \xrightarrow{u_1} U_0 = X$$
comme dans l'étape 3. Alors on construit par récurrence sur i, $0 \leq i < k$, des familles de morphismes
$$U'_{i+1} \xrightarrow{u'_{i+1}} U'_i \qquad \text{avec}$$
$$\begin{cases} - \quad U'_0 = X', \\ - \quad \text{pour } i \text{ et } U'_i \text{ fixés, le crible engendré par les } U'_{i+1} \to U'_i \\ \quad\;\; \text{est dans } J_2(U'_i), \\ - \quad \text{chaque } U'_{i+1} \to U'_i \text{ s'inscrit dans un carré commutatif de la forme :} \\ \qquad\qquad \begin{array}{ccc} U'_{i+1} & \xrightarrow{u'_{i+1}} & U'_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_{i+1} & \xrightarrow{u_{i+1}} & U_i \end{array} \end{cases}$$

Remarques sur l'engendrement des topologies de Grothendieck :

Sur le processus d'engendrement :

- On part donc d'une famille de sous-ensembles
$$J(X) \subset \Omega(X) = \{\text{ensemble des cribles sur } X\}, \quad X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}).$$
- L'étape 1 d'ajout des cribles maximaux est triviale.
- L'étape 2 consiste à rendre la famille "symétrique" au sens de stable par les applications $f^* : \Omega(Y) \to \Omega(X)$, $(X \xrightarrow{f} Y)$ = morphisme de $\mathcal{C}$.
- L'étape 3 consiste à rendre la famille "stable par composition". Ce qui est remarquable est que la famille reste symétrique.

Sur l'importance de ce processus :

On verra plus loin qu'il y a équivalence entre

- le problème général de démontrabilité
  de n'importe quelle assertion "géométrique"
  dans n'importe quelle théorie "géométrique du premier ordre",
- le problème général de déterminer si un crible C d'un objet X d'un petit site $(\mathcal{C}, J)$ appartient ou non à la topologie de $\mathcal{C}$ engendrée par J et une famille de cribles C_i d'objets X_i de $\mathcal{C}$.

A la recherche d'algorithmes :

Problème. – *Sous quelles conditions existe-t-il un algorithme qui permet de déterminer si un crible C d'un objet X d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ appartient à la topologie engendrée par une topologie J de $\mathcal{C}$ et une famille de cribles C_i, $i \in I$, d'objets X_i de $\mathcal{C}$?*

Remarques. –

- La catégorie $\mathcal{C}$ peut être
  - définie par une liste de générateurs et de relations,
  - définie comme la "catégorie syntactique géométrique" (ou "cohérente", ou "régulière", ou "cartésienne") d'une théorie $\mathbb{T}$, introduite plus loin. Comme on verra,
    - ses objets sont les formules "géométriques" (ou "cohérentes", "régulières", "cartésiennes") écrites dans le langage de $\mathbb{T}$,
    - ses morphismes sont les relations entre ces formules qui satisfont la propriété d'être "$\mathbb{T}$-démontrablement fonctionnelles".
- La topologie J sur $\mathcal{C}$ peut être
  - définie comme la famille des cribles qui satisfont certaines propriétés,
  - définie comme la famille des cribles qui contiennent une famille de morphismes qui satisfait certaines propriétés.

La notion de faisceau sur un site :

Définition. –
Soit un site $(\mathcal{C}, J) = \begin{cases} \text{catégorie (essentiellement) petite } \mathcal{C}, \\ \text{topologie de Grothendieck } J \text{ sur } \mathcal{C}. \end{cases}$

(i) *Un faisceau sur $(\mathcal{C}, J)$ est un préfaisceau*

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

tel que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout crible $C \in J(X)$, l'application

$$\begin{aligned} F(X) \quad \longrightarrow \quad & \varprojlim_{(U \xrightarrow{u} X) \in C} F(U) \\ & = \left\{ (s_u \in F(U))_{(U \xrightarrow{u} X) \in C} \;\middle|\; s_{u'} = F(v)(s_u), \forall \begin{pmatrix} \begin{tikzcd} U' \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "u'"'] & & U \arrow[dl, "u"] \\ & X & \end{tikzcd} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

est une bijection.

(ii) *Un morphisme de faisceaux sur $(\mathcal{C}, J)$*

$$F_1 \longrightarrow F_2$$

est un morphisme de préfaisceaux,
c'est-à-dire un morphisme de la catégorie

$$\widehat{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \, .$$

La notion de topos de faisceaux :

Définition. –
Soit un site $(\mathcal{C}, J)$.
On appelle topos des faisceaux sur $(\mathcal{C}, J)$
la sous-catégorie pleine

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

constituée

$$\begin{cases} \bullet \quad \textit{des faisceaux sur } (\mathcal{C}, J), \\ \bullet \quad \textit{de leurs morphismes (comme préfaisceaux).} \end{cases}$$

Remarque. –
Tout comme $\widehat{\mathcal{C}}$,
la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}_J$ est localement petite.

Le foncteur de faisceautisation :

Proposition. – *Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site. Le foncteur de plongement*

$$j_* : \widehat{\mathcal{C}}_J \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

admet un <u>"adjoint à gauche"</u>

$$j^* : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J \qquad (= \text{foncteur de } \underline{\text{faisceautisation}})$$

qui <u>respecte</u>

- *non seulement les <u>colimites arbitraires</u>,*
- *mais aussi les <u>limites finies</u>.*

Remarques. –

(i) Ainsi, il existe une <u>transformation naturelle</u>

$$\mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{C}}} \longrightarrow j_* \circ j^*$$

de foncteurs $\widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}$, telle que pour tout préfaisceau P et tout faisceau F, l'application induite

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_J}(j^* P, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(j_* \circ j^* P, j_* F) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_J}(P, j_* F)$$

soit <u>bijective</u>.

(ii) On a aussi un <u>isomorphisme naturel</u> de foncteur $\widehat{\mathcal{C}}_J \to \widehat{\mathcal{C}}_J$

$$j^* \circ j_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{C}}_J} .$$

Construction du foncteur de faisceautisation :

Lemme. –

Soit un site $(\mathcal{C}, J)$.

Le foncteur de faisceautisation

$$j^* : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$

est construit comme le foncteur composé

$$P \longmapsto j^* P = (P^+)^+$$

où

$$P \longmapsto P^+$$

est le foncteur qui associe à tout préfaisceau P
le préfaisceau P^+ défini par

$$X \longmapsto P^+(X) = \varinjlim_{C \in J(X)} \; \varprojlim_{(U \xrightarrow{u} X) \in C} P(U) \,.$$

$\varinjlim_{C \in J(X)}$ $\|$ *colimite filtrante sur l'ensemble ordonné des cribles $C \in J(X)$*

$\varprojlim_{(U \xrightarrow{u} X) \in C}$ $\|$ *limite (projective) sur les éléments de C*

Faisceautisation et topologies de Grothendieck :

Observation. – *Dans une catégorie localement petite $\mathcal{C}$, les cribles C sur un objet X sont les sous-préfaisceaux*

$$C \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, X) = y(X) \qquad \textit{dans} \quad \widehat{\mathcal{C}}\,.$$

Théorème. – *Considérons une sous-catégorie pleine*

$$\mathcal{E} \overset{j_*}{\hookrightarrow} \widehat{\mathcal{C}}$$

telle que j_* admette un adjoint à gauche

$$j^* : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui respecte colimites arbitraires et limites finies. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, soit

$$J_{\mathcal{E}}(X)$$

l'ensemble des cribles C sur X tels que

$$j^* C \hookrightarrow j^* \mathrm{Hom}(\bullet, X) \quad \textit{est un isomorphisme de } \mathcal{E}.$$

Alors :

(i) *$J_{\mathcal{E}}$ est une topologie de Grothendieck.*

(ii) *$j_* : \mathcal{E} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ se factorise en une équivalence*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{C}}_{J_{\mathcal{E}}}\,.$$

Sous-topos et topologies de Grothendieck :

Définition. – *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (essentiellement) petite.*
On appelle sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$
les classes d'équivalence de sous-catégories pleines

$$\mathcal{E} \xhookrightarrow{\ j_*\ } \widehat{\mathcal{C}}$$

telles que j_* admette un adjoint à gauche $j^* : \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}$
qui respecte colimites arbitraires et limites finies.

Corollaire. – *Les deux applications*

$$J \longmapsto (\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J, \widehat{\mathcal{C}}_J \xhookrightarrow{\ j_*\ } \widehat{\mathcal{C}}),$$

$$(\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}, \mathcal{E} \xhookrightarrow{\ j_*\ } \widehat{\mathcal{C}}) \longmapsto J_{\mathcal{E}}$$

définissent deux bijections réciproques (qui inversent les relations d'ordre) entre

$\begin{cases} \bullet \end{cases}$
- *l'ensemble ordonné des topologies de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$,*
- *les sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$.*

Remarque. – En particulier, les sous-topos de $\widehat{\mathcal{C}}$ forment un ensemble.

Foncteur canonique et représentation des faisceaux :

Définition. – *Soit un site* $(\mathcal{C}, J)$*.*
On appelle *"foncteur canonique"* *le foncteur composé*

$$\ell : \mathcal{C} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J \,.$$

$$\underset{\text{Yoneda}}{\|} \qquad \underset{\text{faisceautisation}}{\|}$$

Lemme. – *Tout objet* F *de* $\widehat{\mathcal{C}}_J$ *s'écrit comme la* *colimite*

$$F = \varinjlim_{(X,x)\in\int F} \ell(X)$$

indexée par la "catégorie des éléments de F*"*

$$\int F$$

dont

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{les objets sont les } (X,x),\ X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ x \in F(X), \\ \bullet \quad \text{les morphismes } (X,x) \to (Y,y) \text{ sont les morphismes de } \mathcal{C} \\ \qquad\qquad\qquad X \xrightarrow{f} Y \\ \quad \text{tels que} \qquad\qquad x = F(f)(y). \end{cases}$$

Remarque. – Ainsi, $\widehat{\mathcal{C}}_J$ apparaît comme une sorte de "complétion" de $\mathcal{C}$.
D'où la notation $\widehat{\mathcal{C}}_J$.

Topologies sous-canoniques :

Proposition. – *Soit un site $(\mathcal{C}, J)$.*
Les propriétés suivantes sont equivalentes :

(1) *Le foncteur canonique*
$$\ell : \mathcal{C} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J$$
est "pleinement fidèle", ce qui signifie que les applications
$$\mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\ell(X), \ell(Y))$$
sont des bijections.

(2) *Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le préfaisceau*
$$y(X) = \mathrm{Hom}(\bullet, X) \qquad \text{est un } J\text{-faisceau.}$$

(3) *On a*
$$J \subseteq J_c$$
où J_c est la "topologie canonique" de $\mathcal{C}$
pour laquelle un crible C sur un objet X est dans $J_c(X)$ si

- *pour tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$ et tout objet Y, l'application*
$$\mathrm{Hom}(X', Y) \longrightarrow \varprojlim_{(U' \to X') \in x^* C} \mathrm{Hom}(U', Y)$$
est une bijection.

La notion intrinsèque de topos :

Définition. –

Une catégorie $\mathcal{E}$ est appelée un <u>topos</u>

si elle admet une <u>équivalence</u>

avec la <u>catégorie des faisceaux</u> sur un site $(\mathcal{C}, J)$

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \,.$$

Remarque. –

Pour tout topos $\mathcal{E}$,

il existe une <u>infinité</u>

(si grande que ce n'est même pas un ensemble ...)

de <u>sites différents</u> $(\mathcal{C}, J)$ et d'équivalences

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \,.$$

Engendrement de représentations d'un topos :

Lemme de comparaison de Grothendieck. –

Soit un site $(\mathcal{C}, J)$.

Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$

qui est "dense" au sens que

$$\left\{\begin{array}{ll} \bullet & \text{tout objet de } \mathcal{C} \text{ admet un } J\text{-recouvrement} \\ & \text{composé d'objets de } \mathcal{C}'. \end{array}\right.$$

Soit J' la topologie de $\mathcal{C}'$ induite par la topologie J de $\mathcal{C}$.

Alors le foncteur de restriction des préfaisceaux

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{C}'}\,, \\ (P : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}) & \longmapsto & (\mathcal{C}'^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathrm{Ens}) \end{array}$$

induit une équivalence de catégories

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{C}}'_{J'}\,.$$

Les topos comme “pastiches” (Grothendieck) de la catégorie des ensembles :

Théorème. –
Une catégorie $\mathcal{E}$ est un topos si et seulement si elle partage les propriétés suivantes de la catégorie des ensembles :

(0) *$\mathcal{E}$ est localement petite.*

(1) *$\mathcal{E}$ admet des limites (projectives) arbitraires, en particulier*

- *un objet terminal* $1_{\mathcal{E}} = 1$,
- *des produits* $\prod_{i \in I} E_i$,
- *des produits fibrés* $X \times_S Y$ *de diagrammes*
$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{x} & S \end{array}$$
caractérisés par la propriété que, pour tout objet Z,
$$\mathrm{Hom}(Z, X \times_S Y) = \left\{ \text{ensemble des carrés commutatifs} \begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{x} & S \end{array} \right\}.$$

(2) *$\mathcal{E}$ admet des colimites (= limites inductives) arbitraires, en particulier,*

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un objet initial } \emptyset_{\mathcal{E}} = \emptyset, \\ \bullet \quad \text{des sommes } \coprod_{i \in I} E_i, \\ \bullet \quad \text{des sommes amalgamées } X \coprod_Z Y \text{ de diagrammes } \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{y} & Y \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \\ X & & \end{array} \\ \quad \text{caractérisées par la propriété que, pour tout objet } S, \\ \quad \mathrm{Hom}(X \coprod_Z Y, S) = \left\{ \text{ensemble des carrés commutatifs } \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{y} & Y \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array} \right\}. \end{cases}$$

(3) *Pour tout morphisme $X \to S$ de $\mathcal{E}$, le foncteur de produit fibré avec X sur S*

$$X \times_S \bullet$$

respecte les colimites arbitraires.

(4) *Dans $\mathcal{E}$, les foncteurs de colimites filtrantes respectent les limites finies.*

(5) *Pour tous objets X et Y de $\mathcal{E}$, leur somme*

$$X \coprod Y$$

est disjointe au sens que

$$X \times_{X \coprod Y} Y = \emptyset \,.$$

(6) *Pour qu'un morphisme de $\mathcal{E}$*

$$X \xrightarrow{u} Y$$

soit un <u>isomorphisme</u>, il suffit qu'il soit à la fois

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un "monomorphisme"} \\ \quad\ \text{(au sens que, pour tout objet } Z, \\ \quad\ \mathrm{Hom}(Z,X) \xrightarrow{u\circ\bullet} \mathrm{Hom}(Z,Y) \text{ soit injective),} \\ \\ \bullet \quad \text{et un "épimorphisme"} \\ \quad\ \text{(au sens que, pour tout objet } Z, \\ \quad\ \mathrm{Hom}(Y,Z) \xrightarrow{\bullet\circ u} \mathrm{Hom}(X,Z) \text{ soit injective).} \end{cases}$$

(7) *Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, ses <u>"sous-objets"</u>*
(= <u>classes</u> d'équivalence <u>de monomorphismes</u> $X' \hookrightarrow X$)
forment un <u>ensemble</u>.

(8) *Pour tout objet X de $\mathcal{E}$,*
ses <u>"quotients"</u> (= <u>classes</u> d'équivalence <u>d'épimorphismes</u> $X \twoheadrightarrow X'$)
forment un <u>ensemble</u>.

(9) *Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, les deux applications*

$$\begin{array}{rcl} (X \twoheadrightarrow X') & \longmapsto & R = X \times_{X'} X\,, \\ (R \hookrightarrow X \times X) & \longmapsto & X \coprod_R X \end{array}$$

définissent deux bijections réciproques entre

- *l'ensemble des quotients de X,*
- *l'ensemble des relations d'équivalence sur X, c'est-à-dire des sous-objets*
$$R \hookrightarrow X \times X$$
tels que, pour tout objet Z de $\mathcal{E}$, le sous-ensemble
$$\mathrm{Hom}(Z,R) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(Z,X) \times \mathrm{Hom}(Z,X)$$
soit une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}(Z,X)$.

De plus, tout morphisme $X \xrightarrow{u} Y$ a une image

$$X \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(u) \hookrightarrow Y$$

définie comme quotient de X par la relation d'équivalence

$$R = X \times_Y X \hookrightarrow X \times X\,.$$

(10) *Il existe dans $\mathcal{E}$ des familles d'objets*

$$(X_i)_{i \in I}$$

qui sont "séparantes" au sens que,
pour tous objets X et Y de $\mathcal{E}$,
l'application de composition

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \prod_{i \in I} \prod_{u \in \mathrm{Hom}(X_i, X)} \mathrm{Hom}(X_i, Y)$$

est injective.

Représentation des topos comme des catégories de faisceaux :

Théorème (Giraud). – *Soit un topos $\mathcal{E}$.*
Soit une petite sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ dont les objets forment une famille séparante de $\mathcal{E}$.
Soit J la topologie de Grothendieck de $\mathcal{C}$ pour laquelle une famille de morphismes

$$(X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$$

est couvrante si et seulement si le morphisme de $\mathcal{E}$

$$\coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow X$$

est un épimorphisme.
Alors les deux foncteurs

$$\begin{array}{rcl} E & \longmapsto & (\mathrm{Hom}(\bullet, E) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}), \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{C}}, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\mathcal{C}}_J & \longrightarrow & \mathcal{E}, \\ F & \longmapsto & \varinjlim_{(X,x)\in\int F} X \text{ (= colimite calculée dans } \mathcal{E}\text{)} \end{array}$$

définissent deux équivalences réciproques entre $\mathcal{E}$ et $\widehat{\mathcal{C}}_J$.

Vers la notion de point d'un topos :

Associons à tout espace topologique X

- la catégorie O_X de ses ouverts,
- la topologie canonique J_X sur O_X,
- le topos $\mathcal{E}_X$ des faisceaux sur le site (O_X, J_X).

Alors :

Proposition. –

(i) *Tout élément $x \in X$ définit une paire de foncteurs adjoints*

$$(\mathcal{E}_X \xrightarrow{x^*} \mathrm{Ens}, \mathrm{Ens} \xrightarrow{x_*} \mathcal{E}_X)$$

telle que x^* respecte les limites finies.

(ii) *Plus généralement, toute application continue $T \xrightarrow{x} X$ définit une paire de foncteurs adjoints*

$$(\mathcal{E}_X \xrightarrow{x^*} \mathcal{E}_T, \mathcal{E}_T \xrightarrow{x_*} \mathcal{E}_X)$$

telle que x^* respecte les limites finies.

(iii) *Dans le cas particulier où $T \overset{x}{\hookrightarrow} X$ est un sous-espace, le foncteur induit*

$$x_* : \mathcal{E}_T \hookrightarrow \mathcal{E}_X$$

est pleinement fidèle.

La notion de point d'un topos :

Définition. – *Soit $\mathcal{E}$ un topos.*

(i) *On appelle point de $\mathcal{E}$ toute paire de foncteurs adjoints*

$$(\mathcal{E} \xrightarrow{p^*} \mathrm{Ens}, \mathrm{Ens} \xrightarrow{p_*} \mathcal{E})$$

telle que p^* respecte les limites finies.

(ii) *Plus généralement, on appelle*

point de $\mathcal{E}$ à valeurs dans un topos $\mathcal{E}'$ (ou morphisme de topos $\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$) toute paire de foncteurs adjoints

$$f = (\mathcal{E} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}', \mathcal{E}' \xrightarrow{f_*} \mathcal{E})$$

telle que f^* respecte les limites finies.

(iii) *Un tel morphisme de topos $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$*

$$f = (\mathcal{E} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}', \mathcal{E}' \xrightarrow{f_*} \mathcal{E})$$

est appelé un "plongement" si sa composante d'image directe

$$f_* : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

est pleinement fidèle.

Un sous-topos de $\mathcal{E}$ est une classe d'équivalence de plongements

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E} \ .$$

Les catégories de points d'un topos :

Définition. – *Soit $\mathcal{E}$ un topos.*

(i) *Etant donnés deux points de $\mathcal{E}$ à valeurs dans un topos $\mathcal{E}'$*

$$f = (f^*, f_*) \quad et \quad g : (g^*, g_*)\,,$$

on appelle morphisme de f dans g

$$f \longrightarrow g$$

la donnée d'une transformation naturelle

$$f^* \longrightarrow g^*$$

ou, ce qui revient au même par adjonction,

$$g_* \longrightarrow f_*\,.$$

(ii) *Pour tout topos $\mathcal{E}'$, on note*

$$[\mathcal{E}', \mathcal{E}]_T$$

la catégorie des points de $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\mathcal{E}'$.
Si $\mathcal{E}' = \mathrm{Ens}$, on la note aussi

$$\mathrm{pt}(\mathcal{E})$$

et l'appelle la catégorie des points de $\mathcal{E}$.

Points topologiques et points topossiques :

Proposition. –
Soit X un espace topologique qui est "sobre".

(i) *L'application*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathrm{pt}(\mathcal{E}_X)\,, \\ x & \longmapsto & (\mathcal{E}_X \xrightarrow{x^*} \mathrm{Ens}, \mathrm{Ens} \xrightarrow{x_*} \mathcal{E}_X) \end{array}$$

est une bijection de X

sur les classes d'isomorphie de points de $\mathcal{E}_X$.

(ii) *Plus généralement, pour tout espace topologique T, l'application*

$$(T \xrightarrow{x} X) \longmapsto (\mathcal{E}_X \xrightarrow{x^*} \mathcal{E}_T, \mathcal{E}_T \xrightarrow{x_*} \mathcal{E}_X)$$

est une bijection

de l'ensemble des applications continues $T \to X$
sur les classes d'isomorphie de morphismes de topos

$$\mathcal{E}_T \longrightarrow \mathcal{E}_X\,.$$

Dualité des présentations et des évaluations des objets d'un topos :

Soit $\mathcal{E}$ un topos.

Présentations. – *Tout site* $(\mathcal{C}, J)$ *muni d'une équivalence*

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

qui prolonge un foncteur $\ell : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$*,*
permet de présenter tout objet E *de* $\mathcal{E}$ *sous la forme*

$$E = \varinjlim_{(S,s)\in\int F} \ell(S)$$

où F *est le* J*-faisceau sur* $\mathcal{C}$

$$F = \mathrm{Hom}(\ell(\bullet), E)\,.$$

Evaluations. –
Pour tout point (x^*, x_*) *de* $\mathcal{E}$ *[resp. tout point à valeurs dans un topos* $\mathcal{E}'$*], le foncteur*

$$x^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens} \qquad \textit{[resp.} \quad x^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}' \textit{]}$$

transforme les objets de $\mathcal{E}$ *en des ensembles [resp. des objets de* $\mathcal{E}'$*] et respecte toutes les structures qui s'expriment en termes de colimites arbitraires et limites finies.*

Un analogue non linéaire de la transformation de Fourier et des décompositions en ondelettes ?

$\mathcal{E}$ = topos	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{E}$ = <u>espace de fonctions</u> sur $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \cdots$
(x^*, x_*) = <u>point</u> de $\mathcal{E}$	$\longleftrightarrow$	<u>point</u> x de X
(x^*, x_*) = <u>point</u> de $\mathcal{E}$ <u>à valeurs dans un topos</u> $\mathcal{E}'$	$\longleftrightarrow$	<u>point paramétré</u> de X $t : T \to X$
<u>foncteur</u> d'<u>évaluation</u> $x^* : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$ ou $\mathcal{E}'$	$\longleftrightarrow$	<u>évaluation</u> des fonctions $f \mapsto f(x)$ ou $f \circ t$
choix d'une <u>présentation</u> par un <u>site</u> $(\mathcal{C}, J)$ $\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$	$\longleftrightarrow$	choix d'une <u>base orthogonale</u> (ex: caractères de Fourier, <u>base</u> d'ondelettes)
<u>passage</u> de E objet de $\mathcal{E}$ à $F = \mathrm{Hom}(\ell(\bullet), E)$ objet de $\widehat{\mathcal{C}}_J$	$\longleftrightarrow$	<u>transformée</u> de Fourier ou <u>transformée</u> en ondelettes
<u>formule</u> de présentation $E = \varinjlim_{(S,s) \in \int F} \ell(S)$	$\longleftrightarrow$	<u>décomposition</u> de Fourier ou <u>décomposition</u> en ondelettes

Des applications possibles à des signaux et des codes non linéaires ?

- Peut-on interpréter
  - les objets E d'un topos $\mathcal{E}$ comme des signaux ?
  - les présentations d'un topos $\mathcal{E}$ par des petits sites $(\mathcal{C}, J)$
    $$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$
    comme des codes ?
  - les représentations associées des objets E de $\mathcal{E}$
    $$E = \varinjlim_{(S,s)\in\int \mathrm{Hom}(\ell(\bullet),E)} \ell(S)$$
    comme des codages ?
- Si oui, peut-on définir des conditions assurant qu'un code
  $$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$
  est efficace ?

Remarque. – Plus une topologie J sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ s'éloigne de la topologie "discrète" (pour laquelle les seuls cribles couvrants sont les cribles maximaux), plus les représentations

$$E = \varinjlim_{(S,s)\in\int \mathrm{Hom}(\ell(\bullet),E)} \ell(S)$$

sont redondantes.

La notion d'espace classifiant :

Définition naïve. –
Un espace (topologique, différentiel, analytique, algébrique ...) X
est dit "classifiant"
si ses points paramétrisent les structures mathématiques d'un certain type.

Exemples. –

- Les espaces projectifs $\mathbb{P}^n$:
  points $\leftrightarrow$ droites de l'espace linéaire standard de dimension $n+1$.
- Espaces de Hilbert $\mathrm{Hilb}(n)$:
  points $\leftrightarrow$ sous-schémas fermés de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.
- Variétés modulaires $\mathcal{M}_g$:
  points $\leftrightarrow$ courbes algébriques (projectives lisses) de genre g.
- Variété jacobienne Jac_X d'une courbe X :
  points $\leftrightarrow$ fibrés vectoriels inversibles de degré 0 sur X.
- Variétés modulaires $\mathcal{A}_g$:
  points $\leftrightarrow$ variétés abéliennes (principalement polarisées) de dimension g.

Annonce : Tout topos est classifiant.

Théorème. – *Toute présentation d'un topos $\mathcal{E}$ par un petit site $(\mathcal{C}, J)$*

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

définit une "théorie (géométrique) du premier ordre"

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$$

et des équivalences de catégories

$$\mathrm{pt}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens}) = \textit{catégorie des modèles ensemblistes de } \mathbb{T},$$

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{E}', \mathcal{E}]_\top & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}') \\ \| & & \| \\ \textit{catégorie des points} & & \textit{catégorie des modèles de } \mathbb{T} \\ \textit{de } \mathcal{E} \textit{ à valeurs dans } \mathcal{E}' & & \textit{dans le topos } \mathcal{E}'. \end{array}$$

Remarque. – On verra que le langage de $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$ est constitué de

$$\begin{cases} \text{"sortes"} = \text{liste des objets de } \mathcal{C}, \\ \text{"symboles de fonctions"} = \text{liste des morphismes de } \mathcal{C}. \end{cases}$$

Annonce réciproque :
toute théorie “géométrique” est classifiée par un topos.

Théorème. – *Toute théorie “géométrique du premier ordre”* $\mathbb{T}$ *définit*

(i) *un “foncteur des modèles” de* $\mathbb{T}$ *dans les topos* $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & \longmapsto & \textit{catégorie } \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E})\,, \\ (\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}) & \longmapsto & \textit{foncteur } f^* : \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}'), \end{array}$$

(ii) *un “topos classifiant”* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *caractérisé à équivalence près par un système d’équivalences de catégories*

$$[\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}]_T \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})\,.$$

Remarque. – Ainsi, tout topos $\mathcal{E}$ admet
– une infinie diversité de présentations “géométriques”

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\,,$$

– une infinie diversité de descriptions “linguistiques”

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,.$$

L’équivalence de Diaconescu :

Proposition. – *Soit un site* $(\mathcal{C}, J)$*. Pour tout topos* $\mathcal{E}$*, le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{E}, \widehat{\mathcal{C}}_J]_T & \longrightarrow & [\mathcal{C}, \mathcal{E}]\,, \\ x = (\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{x^*} \mathcal{E}, \mathcal{E} \xrightarrow{x_*} \widehat{\mathcal{C}}_J) & \longmapsto & (\mathcal{C} \xrightarrow{\rho} \mathcal{E}) = (\mathcal{C} \xrightarrow{\ell} \widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{x^*} \mathcal{E}) \end{array}$$

est une <u>*équivalence*</u> *de la* <u>*catégorie des morphismes de topos*</u>

$$x : \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_J$$

sur la <u>*catégorie des foncteurs*</u>

$$\rho : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui sont

(A) <u>*“plats”*</u> *au sens que le foncteur induit*

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\rho} & : & \widehat{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \mathcal{E}\,, \\ & & P & \longmapsto & \varinjlim_{(S,s)\in\int P} \rho(S) \end{array}$$

respecte les <u>*limites finies,*</u>

(B) <u>*“J-continus”*</u> *au sens que toute famille J-*<u>*couvrante*</u> *de* $\mathcal{C}$

$$(X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$$

est transformée par ρ *en un* <u>*épimorphisme*</u> *de* $\mathcal{E}$

$$\coprod_{i\in I} \rho(X_i) \longrightarrow \rho(X)\,.$$

Esquisse de démonstration :

- Pour tout foncteur $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\rho} & : & \widehat{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \mathcal{E}\,, \\ & & P & \longmapsto & \varinjlim\limits_{(S,s)\in \int P} \rho(S) \end{array}$$

  est l'<u>unique prolongement</u> de ρ qui <u>respecte</u> les <u>colimites arbitraires</u>.

- Si $x^* : \widehat{\mathcal{C}}_J \to \mathcal{E}$ respecte les colimites et

  alors
$$\rho = x^* \circ \ell : \mathcal{C} \xrightarrow{\ell} \widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{x^*} \mathcal{E}\,,$$
$$\widehat{\rho} \cong x^* \circ j^* : \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{x^*} \mathcal{E}\,.$$

- Dans ce cas, x^* <u>respecte</u> les <u>limites finies</u>
  si et seulement si $\widehat{\rho}$ <u>respecte</u> les <u>limites finies</u>.

- Pour tout foncteur $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, le foncteur
  $\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}$ <u>se factorise</u> à travers $\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J$
  si et seulement si ρ est <u>J-continu</u>.

- Un foncteur $\widehat{\mathcal{C}}_J \longrightarrow \mathcal{E}$ admet un <u>adjoint à droite</u>
  si et seulement si il <u>respecte</u> les <u>colimites arbitraires</u>.

La théorie des foncteurs plats et J-continus :

Observation. –
Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie.
Se donner un foncteur plat et J-continu
à valeurs dans un topos $\mathcal{E}$
équivaut à se donner une structure constituée

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{d'objets } MA \text{ de } \mathcal{E} \text{ indexés par les objets } A \text{ de } \mathcal{C}, \\ \bullet \quad \text{de morphismes } MA \xrightarrow{Mf} MB \text{ de } \mathcal{E} \\ \quad\ \ \text{indexés par les morphismes } f : A \to B \text{ de } \mathcal{C}, \end{cases}$$

et qui satisfait

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{les axiomes assurant qu'il s'agit d'un foncteur,} \\ \bullet \quad \text{les axiomes assurant que ce foncteur est plat,} \\ \bullet \quad \text{les axiomes assurant que ce foncteur est } J\text{-continu.} \end{cases}$$

Nous allons formaliser ces axiomes,
ce qui introduira la notion de “théorie géométrique du premier ordre”.

Le langage des diagrammes :

Définition. –
Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie (ou plus généralement un carquois).
Le langage des $\mathcal{C}$-diagrammes
est la "signature" (ou "langage du premier ordre") $\Sigma_{\mathcal{C}}$
constitué par

- *des "sortes" A qui correspondent aux objets de $\mathcal{C}$,*
- *des "symboles de fonctions" $f : A \longrightarrow B$*
  qui correspondent aux flèches $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathcal{C}$.

Définition. –

La catégorie des $\Sigma_{\mathcal{C}}$-structures d'un topos $\mathcal{E}$

$$\Sigma_{\mathcal{C}}\text{-str}(\mathcal{E})$$

a pour objets les applications

$$M = \begin{cases} \underline{\text{sorte}}\ A\ (= \text{objet de } \mathcal{C}) & \longmapsto \quad MA = \underline{\text{objet}} \text{ de } \mathcal{E}, \\ \underline{\text{symbole}}\ (A \to B) & \longmapsto \quad (MA \xrightarrow{Mf} MB) = \underline{\text{morphisme}} \text{ de } \mathcal{E}, \end{cases}$$

et pour morphismes $M \to N$ les applications
u : sorte $A \longmapsto$ morphisme $(MA \xrightarrow{u_A} NA)$ de $\mathcal{E}$
telles que commutent tous les carrés :

$$\begin{tikzcd} MA \arrow[r, "u_A"] \arrow[d, "Mf"'] & NA \arrow[d, "Nf"] \\ NB \arrow[r, "u_B"] & NB \end{tikzcd}$$

La théorie des foncteurs :

Définition. –
Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie.
La théorie $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ des foncteurs sur $\mathcal{C}$
consiste en le langage $\Sigma_{\mathcal{C}}$ complété par les axiomes

$$\begin{cases} \top \vdash_{x^A} \mathrm{id}_A(x^A) = x^A \text{ pour toute sorte } A \text{ de } \Sigma_{\mathcal{C}}, \\ \top \vdash_{x^A} (g \circ f)(x^A) = g(f(x^A)) \text{ pour tous symboles de fonctions} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A \xrightarrow{f} B \text{ et } B \xrightarrow{g} C \text{ de } \Sigma_{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

Lemme. – *Pour tout topos $\mathcal{E}$, la catégorie des foncteurs*

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

s'identifie à la catégorie des modèles de $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{E}$

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}}\text{-mod}(\mathcal{E}),$$

définie comme la sous-catégorie pleine de

$$\Sigma_{\mathcal{C}}\text{-str}(\mathcal{E})$$

constituée des $\Sigma_{\mathcal{C}}$-structures M dans $\mathcal{E}$ qui satisfont les axiomes de $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$.

Interprétation des axiomes :

- Chaque x^A est une variable formelle affectée à la sorte A.
- Chaque symbole
$$\vdash_{x^A}$$
a le sens d'une implication
$$\varphi \vdash_{x^A} \psi$$
entre formules φ, ψ en la variable x^A.
- Chaque formule φ ou ψ en la variable x^A
définit pour toute structure M dans un topos $\mathcal{E}$
un sous-objet $M\varphi$ ou $M\psi$ de l'objet MA.
Une telle structure M satisfait un axiome de la forme
$$\varphi \vdash_{x^A} \psi$$
si les deux sous-objets $M\varphi$ et $M\psi$ de MA vérifient
$$M\varphi \subseteq M\psi\,.$$
- Le symbole $\top$ signifie "le vrai".
En une variable x^A, il définit pour toute structure M
le sous-objet total $M\top = MA$ de MA.
Une structure M satisfait un axiome de la forme
$$\top \vdash_{x^A} \varphi$$
si le sous-objet $M\varphi$ de MA est égal à MA tout entier.

- Pour tout symbole de fonction $f : A \to B$, l'écriture
$$f(x^A)$$
s'interprète dans une structure M comme le morphisme
$$MA \xrightarrow{Mf} MB\,.$$
- Pour tous symboles de fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$,
le terme obtenu par substitution d'une fonction à une variable
$$g(f(x^A))$$
s'interprète dans une structure M comme le morphisme composé
$$MA \xrightarrow{Mf} MB \xrightarrow{Mg} MC\,.$$
- Ainsi, une structure M satisfait l'axiome
$$\top \vdash_{x^A} \mathrm{id}_A(x^A) = x^A$$
si et seulement si $\quad M\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{MA}$.
- De même, une structure M satisfait l'axiome
$$\top \vdash_{x^A} (g \circ f)(x^A) = g(f(x^A))$$
si et seulement si $\quad M(g \circ f) = Mg \circ Mf$.

La théorie des foncteurs plats :

Définition. – *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie.*
La théorie $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$ des foncteurs plats sur $\mathcal{C}$ consiste en la théorie $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ des foncteurs sur $\mathcal{C}$ complétée par les axiomes suivants :

(A1) L'axiome sans variable libre

$$\top \vdash \bigvee_{A = \text{sorte}} (\exists\, x^A)\, \top(x^A)\,.$$

(A2) La famille d'axiomes indexés par les paires de sortes A, B

$$\top \vdash_{x^A, y^B} \bigvee_{\substack{Z = \text{sorte} = \text{objet de } \mathcal{C} \\ (f,g) \in \mathrm{Hom}(Z,A) \times \mathrm{Hom}(Z,B)}} (\exists\, z^Z)(x^A = f(z^Z) \wedge y^B = g(z^Z))\,.$$

(A3) La famille d'axiomes indexés par les paires de morphismes $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ de $\mathcal{C}$

$$f(x^A) = g(x^A) \vdash_{x^A} \bigvee_{\substack{Z = \text{sorte} \\ h \in \mathrm{Hom}(Z,A) \\ \text{tel que } f \circ h = g \circ h}} (\exists\, z^Z)(x^A = h(z^Z))\,.$$

Théorème. –
Pour tout topos $\mathcal{E}$, la catégorie des foncteurs plats

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

s'identifie à la catégorie des modèles de $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$ dans $\mathcal{E}$

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

définie comme la sous-catégorie pleine de

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

constituée des modèles M de $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{E}$
qui satisfont les axiomes complémentaires
(A1), (A2) et (A3) de $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$.

Remarque. –
La théorie $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$ a le même langage $\Sigma_{\mathcal{C}}$ que $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$
mais a davantage d'axiomes.
On dit que $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$ est une théorie quotient de $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$.

Interprétation des axiomes :

- Les "variables libres" d'une formule
sont celles sur lesquelles ne porte aucun quantificateur.
Ainsi, la formule
$$(\exists\, x^A)\, \top(x^A)$$
n'a pas de variable libre, et la formule
$$(\exists\, z^Z)\,(x^A = h(z^Z))$$
a x^A pour seule variable libre.
- Chaque formule φ ou ψ sans variable libre
définit pour toute structure M dans un topos $\mathcal{E}$
un sous-objet $M\varphi$ ou $M\psi$ de l'objet terminal $1 = 1_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$.
Une telle structure M satisfait un axiome de la forme
$$\varphi \vdash \psi$$
si les deux sous-objets $M\varphi$ et $M\psi$ de $1 = 1_{\mathcal{E}}$ vérifient
$$M\varphi \subseteq M\psi\,.$$
- En particulier, si φ est une formule sans variable libre,
une structure M satisfait l'axiome
$$\top \vdash \varphi$$
si le sous-objet $M\varphi$ de $1 = 1_{\mathcal{E}}$ est égal à $1 = 1_{\mathcal{E}}$ tout entier.

- Le quantificateur existentiel $\exists$ en une ou plusieurs variables a le sens d'une image par la projection définie par l'oubli de cette ou ces variables.
  Si par exemple φ est une formule
  en des variables libres x^A, (x^A, z^Z) ou (x^A, y^B, z^C),
  interprétée dans une structure M d'un topos $\mathcal{E}$ comme un sous-objet

$$M\varphi \hookrightarrow MA\,, \quad M\varphi \hookrightarrow MA \times MZ\,, \text{ ou } M\varphi \hookrightarrow MA \times MB \times MZ\,,$$

  alors la formule $(\exists\, x^A)M\varphi$ ou $(\exists\, z^Z)M\varphi$ s'interprète
  comme le sous-objet image de $M\varphi$ dans

$$1 = 1_{\mathcal{E}}\,, \quad MA \quad \text{ou} \quad MA \times MB$$

  par le morphisme canonique de projection

$$MA \to 1\,, \quad MA \times MZ \to MA \quad \text{ou} \quad MA \times MB \times MZ \to MA \times MB\,.$$

- Le symbole $\wedge$ a le sens d'une conjonction finitaire
  et s'interprète comme une intersection finie de sous-objets.
  Si par exemple φ et ψ sont deux formules
  en des variables libres (x^A, y^B, z^Z),
  interprétées dans une structure M d'un topos $\mathcal{E}$ comme deux sous-objets

  $$M\varphi \hookrightarrow MA \times MB \times MZ\,, \text{ et } M\psi \hookrightarrow MA \times MB \times MZ\,,$$

  la formule $\varphi \wedge \psi$ s'interprète comme
  leur intersection, c'est-à-dire leur produit fibré.
- Le symbole $\vee$ ou $\bigvee$ a le sens d'une disjonction finie ou infinie
  et s'interprète comme une réunion arbitraire de sous-objets.
  Si par exemple les φ_i, $i \in I$, sont des formules
  en des variables (x^A, y^B), x^A ou sans variable libre,
  interprétées dans une structure M d'un topos $\mathcal{E}$ comme des sous-objets

  $$M\varphi_i \hookrightarrow MA \times MB\,, \quad M\varphi_i \hookrightarrow MA \quad \text{ou} \quad M\varphi_i \hookrightarrow 1 = 1_{\mathcal{E}}\,,$$

  la formule $\bigvee\limits_{i \in I} \varphi_i$ s'interprète comme
  leur réunion, c'est-à-dire l'image du morphisme

  $$\coprod_{i \in I} M\varphi_i \to MA \times MB\,, \quad \coprod_{i \in I} M\varphi_i \to MA \quad \text{ou} \quad \coprod_{i \in I} M\varphi_i \to 1\,.$$

- En définitive, une structure M satisfait l'axiome (A1)
$$\top \vdash \bigvee_{A = \text{sorte}} (\exists\, x^A)\, \top(x^A)$$
si $1 = 1_{\mathcal{E}}$ est la réunion des images des morphismes
$$MA \longrightarrow 1\,.$$
- Elle satisfait les axiomes de (A2)
$$\top \vdash_{x^A, y^B} \bigvee_{\substack{Z = \text{sorte} \\ (f,g) \in \mathrm{Hom}(Z,A) \times \mathrm{Hom}(Z,B)}} (\exists\, z^Z)(x^A = f(z^Z) \wedge y^B = g(z^Z))$$
si $MA \times MB$ est la réunion des images des morphismes
$$MZ \xrightarrow{Mf \times Mg} MA \times MB$$
indexés par les diagrammes $A \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} B$ de $\mathcal{C}$.
- Pour toute paire $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$, elle satisfait l'axiome de (A3)
$$f(x^A) = g(x^A) \vdash_{x^A} \bigvee_{\substack{Z = \text{sorte} \\ (Z \xrightarrow{h} A) \text{ tel que } f \circ h = g \circ h}} (\exists\, z^Z)(x^A = h(z^Z))$$
si le sous-objet de MA défini par l'équation $Mf = Mg$

est la réunion des images des morphismes $\quad MZ \xrightarrow{Mh} MA$

indexés par les morphismes $h : Z \to A$ de $\mathcal{C}$ tels que $f \circ h = g \circ h$.

La théorie des foncteurs plats et J-continus :

Définition. –

Soit $(\mathcal{C}, J)$ un petit site.

La théorie $\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$ des foncteurs plats et J-continus sur $\mathcal{C}$ consiste en la théorie $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$ des foncteurs plats sur $\mathcal{C}$ complétée par la famille d'axiomes suivante :

(B) *Pour toute famille J-couvrante de morphismes de $\mathcal{C}$*

$$A_i \xrightarrow{f_i} A\,, \quad i \in I\,,$$

l'axiome

$$\top \vdash_{x^A} \bigvee_{i \in I} (\exists\, x_i^{A_i})(x^A = f_i(x_i^{A_i}))\,.$$

Corollaire (du théorème précédent). –

Pour tout topos $\mathcal{E}$, la catégorie des foncteurs plats et J-continus

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

s'identifie à la catégorie des modèles de $\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$ dans $\mathcal{E}$

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

définie comme la sous-catégorie pleine de

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

constituée des modèles M de $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$ dans $\mathcal{E}$
qui satisfont les axiomes complémentaires (B) de $\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$.

Remarque. –

La théorie $\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$ a le même langage $\Sigma_{\mathcal{C}}$ que $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ ou $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$
mais a davantage d'axiomes.

Ainsi $\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$ est une théorie quotient de $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ ou $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$.

Interprétation des axiomes :

- Considérons un foncteur plat de $\mathcal{C}$ dans un topos $\mathcal{E}$, c'est-à-dire un modèle M dans $\mathcal{E}$ de la théorie $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}^{p}$.
  Pour une famille J-couvrante de morphismes de $\mathcal{C}$

  $$(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}\,,$$

  dire que M satisfait l'axiome

  $$\top \vdash_{x^A} \bigvee_{i \in I} (\exists\, x_i^{A_i})(x^A = f_i(x_i^{A_i}))$$

  signifie que MA est la réunion des images des morphismes

  $$MA_i \xrightarrow{Mf_i} MA\,, \quad i \in I\,,$$

  autrement dit que le morphisme

  $$\coprod_{i \in I} MA_i \longrightarrow MA$$

  est un épimorphisme.
- Cela signifie exactement que ce foncteur plat

  $$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

  est J-continu.

La notion générale de langage du premier ordre :

Définition. –
Une "signature" (ou "langage du premier ordre") Σ consiste en

- *une famille (finie ou infinie)*
  de "sortes" (c'est-à-dire de "noms d'objets")

$$A, B, C, \cdots$$

- *une famille (finie ou infinie)*
  de "symboles de fonctions"

$$f : A_1 \cdots A_n \longrightarrow B \qquad \textit{(avec } n \geq 0\textit{)}$$

  qui vont d'une suite finie de sortes $A_1 \cdots A_n$
  vers une sorte B,

- *une famille (finie ou infinie)*
  de "symboles de relations"

$$R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n \qquad \textit{(avec } n \geq 0\textit{)}$$

  entre des sortes en nombre fini $A_1 \cdots A_n$.

La notion de Σ-structure :

Définition. –
Soit Σ une signature.
Une Σ-structure dans un topos $\mathcal{E}$ est une triple application qui associe

- *à toute sorte A de Σ*
  un objet MA de $\mathcal{E}$,
- *à tout symbole de fonction $f : A_1 \cdots A_n \to B$ de Σ*
  un morphisme de $\mathcal{E}$ de la forme

$$Mf : MA_1 \times \cdots \times MA_n \longrightarrow MB$$

$$(\text{et} \quad Mf : 1_{\mathcal{E}} = 1 \longrightarrow MB \quad \text{si} \quad n = 0),$$

- *à tout symbole de relation $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ de Σ*
  un sous-objet dans $\mathcal{E}$ de la forme

$$MR \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$$

$$(\text{et} \quad MR \hookrightarrow 1 = 1_{\mathcal{E}} \quad \text{si} \quad n = 0).$$

La notion de morphisme de Σ-structures :

Définition. – *Soit Σ une signature.*
Un morphisme entre deux Σ-structures M, N dans un topos $\mathcal{E}$

$$u : M \longrightarrow N$$

est une application

sorte $A \mapsto$ morphisme $u_A : MA \to NA$ de $\mathcal{E}$, telle que :

- *pour tout symbole de fonction $f : A_1 \cdots A_n \to B$ de Σ, le carré*

$$\begin{tikzcd} MA_1 \times \cdots \times MA_n \arrow[r] \arrow[d, "u_{A_1} \times \cdots \times u_{A_n}"'] & MB \arrow[d, "u_B"] \\ NA_1 \times \cdots \times NA_n \arrow[r] & NB \end{tikzcd}$$

  est commutatif,

- *pour tout symbole de relation $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ de Σ,*
  on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} MR \arrow[r, hook] \arrow[d] & MA_1 \times \cdots \times MA_n \arrow[d, "u_{A_1} \times \cdots \times u_{A_n}"] \\ NR \arrow[r, hook] & NA_1 \times \cdots \times NA_n \end{tikzcd}$$

Les foncteurs des Σ-structures:

Lemme. – *Soit Σ une signature.*

(i) *Pour tout topos $\mathcal{E}$,*
les Σ-structures dans $\mathcal{E}$ et leurs morphismes constituent une catégorie (localement petite)

$$\Sigma\text{-str}(\mathcal{E})\,.$$

(ii) *Tout morphisme de topos $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$*

$$f = (\mathcal{E} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}', \mathcal{E}' \xrightarrow{f_*} \mathcal{E})$$

induit une paire de foncteurs adjoints

$$f^* : \Sigma\text{-str}(\mathcal{E}) \longrightarrow \Sigma\text{-str}(\mathcal{E}')$$

et

$$f_* : \Sigma\text{-str}(\mathcal{E}') \longrightarrow \Sigma\text{-str}(\mathcal{E})\,.$$

Preuve. –
En effet, f^* et f_* respectent les limites finies,
en particulier les produits finis et les monomorphismes.

Les éléments constitutifs des formules géométriques :

Définition. –
Soit une signature Σ.
Les éléments constitutifs des "formules géométriques" de Σ sont :

- *les sortes, les symboles de fonction et les symboles de relation de Σ,*
- *des variables formelles $x^A, y^B, \cdots$*
  dont chacune est affectée à une sorte $A, B, \cdots$ de Σ,
- *la relation d'égalité $=$,*
- *le symbole $\top$ (le "vrai")*
  et le symbole de conjonction finitaire $\wedge$,
- *le quantificateur existentiel $\exists$,*
- *le symbole $\perp$ (le "faux")*
  et les symboles de disjonction finitaire $\vee$ ou infinitaire $\bigvee$.

Remarque. – Une variable x^A d'une formule est dite

- "liée" si elle est soumise à un quantificateur $\exists$,
- "libre" dans le cas contraire.

Contextes et interprétations des formules géométriques :

Définition. –
Soit φ une formule géométrique dans une signature Σ.
Un "contexte" de φ est une famille finie de variables

$$\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$$

qui contient toutes les variables libres de φ
(lesquelles sont donc en nombre fini).

Interprétation des formules :

Une formule géométrique φ de signature Σ dans un contexte

$$\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$$

sert à définir,
pour toute Σ-structure M dans un topos $\mathcal{E}$,
un sous-objet

$$M\varphi = M\varphi(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}) \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n \, .$$

Les théories géométriques et leurs modèles :

Définition. – *Une "théorie géométrique du premier ordre"* $\mathbb{T}$ *consiste en*

- *une signature* Σ,
- *une famille d'implications entre formules géométriques de* Σ

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \quad \text{dans des contextes} \quad \vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n} \,,$$

appelées les "axiomes" de Σ.

Définition. – *Soit une théorie géométrique* $\mathbb{T}$ *de signature* Σ.

(i) *Un "modèle" de* $\mathbb{T}$ *dans un topos* $\mathcal{E}$ *est une* Σ*-structure* M *de* $\mathcal{E}$ *telle que, pour tout axiome de* $\mathbb{T}$

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \quad \text{de contexte} \quad \vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n} \,,$$

on a

$$M\varphi \subseteq M\psi$$

comme sous-objets de $MA_1 \times \cdots \times MA_n$.

(ii) *Les modèles de* $\mathbb{T}$ *dans un topos* $\mathcal{E}$ *forment une sous-catégorie pleine*

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \quad \text{de} \quad \Sigma\text{-str}(\mathcal{E})\,.$$

Première étape d'élaboration des formules géométriques : les termes

Définition. – *Un "terme" dans une signature Σ est une écriture de la forme*

$$y^B \qquad (\underline{\textit{variable}} \text{ de sorte } B)$$

ou $t(x_1^{A_1}\cdots x_n^{A_n})$ (à valeurs dans une sorte B) qui se déduit de y^B par une succession finie de substitutions de variables

$$x_i^{A_i}$$

par des expressions $f(y_1^{A_1'}\cdots y_m^{A_m'})$ formées de

$$\begin{cases} (f : A_1' \cdots A_m' \to A_i) = \underline{\text{symbole de fonction}} \text{ de } \Sigma, \\ y_1^{A_1'} \cdots y_m^{A_m'} = \text{ nouvelles variables.} \end{cases}$$

Interprétation dans une Σ-structure M d'un topos $\mathcal{E}$:

- Un terme $t(x_1^{A_1}\cdots x_n^{A_n})$ à valeurs dans une sorte B s'interprète comme un morphisme $Mt : MA_n \times \cdots \times MA_n \longrightarrow MB$.
- La variable y^B s'interprète comme $\mathrm{id} : MB \to MB$.
- La substitution d'une variable $x_i^{A_i}$ par $f(y_1^{A_1'}\cdots y_m^{A_m'})$ s'interprète comme la composition avec $Mf : MA_1' \times \cdots \times MA_m' \to MA_i$.

Seconde étape d'élaboration des formules géométriques : les formules atomiques

Définition. – *Une "formule atomique" de signature Σ est*

(1) *une formule de relation* $R(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n})$ *pour un symbole de relation* $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ *de* Σ,

(2) *une formule d'égalité* $x^B = y^B$ *pour une sorte* B *de* Σ,

(3) *une formule déduite de (1) ou (2) par substitution de certaines variables par des termes.*

Interprétation dans une Σ-structure M d'un topos $\mathcal{E}$:

(1) s'interprète comme le sous-objet relationel

$$MR \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n .$$

(2) s'interprète comme le sous-objet diagonal

$$MB \hookrightarrow MB \times MB .$$

(3) La substitution d'une variable $x_i^{A_i}$ par un terme $t(y_1^{A'_1} \cdots y_m^{A'_m})$ s'interprète comme une image réciproque (= produit fibré) de sous-objets par le morphisme $Mt : MA'_1 \times \cdots \times MA'_m \to MA_i$.

Troisième étape d'élaboration des formules géométriques : les formules de Horn

Définition. – *Une <u>"formule de Horn"</u> de signature Σ est de la forme*

(1) $\top(\vec{x})$ *(le <u>"vrai"</u> dans un contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$),*

(2) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$

pour des <u>formules atomiques</u> $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ de même contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$.

Interprétation dans une Σ-structure M d'un topos $\mathcal{E}$:

(1) La formule $\top(\vec{x})$ dans un contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$ s'interprète comme le <u>sous-objet total</u>

$$MA_1 \times \cdots \times MA_n \quad \text{de} \quad MA_1 \times \cdots \times MA_n \,.$$

(2) Une conjonction $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ s'interprète comme <u>l'intersection</u>

$$M(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) = M\varphi_1 \wedge \cdots \wedge M\varphi_k$$

des sous-objets $M\varphi_1, \cdots, M\varphi_k$ de $MA_1 \times \cdots \times MA_n$.

Quatrième étape d'élaboration des formules géométriques : les formules régulières

Définition. – *Une "formule régulière" de signature Σ est*

(1) *une formule de Horn,*

(2) *une formule de contexte $\vec{x} = (x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n})$ de la forme*

$$\varphi(\vec{x}) = (\exists\, \vec{y})\, \psi(\vec{x}, \vec{y})$$

pour une formule de Horn ψ de contexte $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n} y_1^{B_1} \cdots y_k^{B_k})$.

Interprétation dans une Σ-structure M d'un topos $\mathcal{E}$:

Une formule de la forme (2)

$$\varphi(\vec{x}) = (\exists\, \vec{y})\, \psi(\vec{x}, \vec{y})$$

s'interprète comme le sous-objet

$$M\varphi \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$$

image du sous-objet

$$M\psi \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n \times MB_1 \times \cdots \times MB_k$$

par le morphisme de projection

$$MA_1 \times \cdots \times MA_n \times MB_1 \times \cdots \times MB_k \longrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n \,.$$

Cinquième étape d'élaboration des formules géométriques : les formules cohérentes ou géométriques

Définition. – *Une "formule cohérente" [resp."géométrique"] de signature Σ est*

(1) $\perp(\vec{x})$ *(le "faux" dans un contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$),*

(2) *une disjonction finie [resp. infinie]*

$$\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_k \qquad [\textit{resp.} \quad \bigvee_{i \in I} \varphi_i \ ]$$

de formules régulières φ_i dans un même contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$.

Interprétation dans une Σ-structure M d'un topos $\mathcal{E}$:

(1) La formule $\perp(\vec{x})$ dans un contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$
s'interprète comme le sous-objet initial c'est-à-dire vide

$$\emptyset \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n \,.$$

(2) Une disjonction finie ou infinie
de formules régulières φ_i de contexte $\vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$
s'interprète comme la réunion finie ou infinie des sous-objets

$$M\varphi_i \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$$

c'est-à-dire comme l'image du morphisme

$$\coprod_i M\varphi_i \longrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n \,.$$

Une remarque sur l'ordre d'élaboration des formules géométriques :

Fait. – *Il fait partie des "règles d'inférence" de la "logique géométrique" que :*

- *Pour toutes formules géométriques* φ *de contexte* $\vec{x}$ *et* ψ *de contexte* $\vec{x}, \vec{y}$*, les formules de contexte* $\vec{x}$
$$\varphi(\vec{x}) \wedge (\exists\, \vec{y})\psi(\vec{x}, \vec{y}) \quad \textit{et} \quad (\exists \vec{y})(\varphi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x}, \vec{y}))$$
sont démontrablement équivalentes.
- *Pour toutes formules géométriques* φ_i*,* $i \in I$*, de contexte* $\vec{x}, \vec{y}$*, les formules de contexte* $\vec{x}$
$$\bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{y})\varphi_i(\vec{x}, \vec{y}) \quad \textit{et} \quad (\exists\, \vec{y})(\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\vec{x}, \vec{y}))$$
sont démontrablement équivalentes.
- *Pour toutes formules géométriques* φ *et* ψ_i*,* $i \in I$*, de contexte* $\vec{x}$*, les formules de contexte* $\vec{x}$
$$\varphi \wedge \bigvee_{i \in I} \psi_i \quad \textit{et} \quad \bigvee_{i \in I} (\varphi \wedge \psi_i)$$
sont démontrablement équivalentes.

Conséquence. – C'est pourquoi, dans la définition des formules géométriques, on fait apparaître les symboles $\wedge$, $\exists$ et $\bigvee$ dans un ordre.

Fragments de la logique géométrique :

Définition. – *Une théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ est dite*

(i) *"algébrique" si*

- *Σ n'a aucun symbole de relation,*
- *tous les axiomes de $\mathbb{T}$ ont la forme*
$$\top \vdash t_1(\vec{x}) = t_2(\vec{x})$$
pour des paires de termes t_1, t_2 dans un même contexte $\vec{x}$,

(ii) *"de Horn", "régulière" ou "cohérente"*
si tous les axiomes de $\mathbb{T}$ sont des implications

$$\varphi_i \vdash \psi_i$$

entre des paires de formules φ_i, ψ_i
qui sont "de Horn", "régulières" ou "cohérentes".

Remarque. –
Une théorie sans axiome, réduite à sa seule signature, est dite "vide".

Le fragment cartésien :

Définition. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de signature Σ.*

(i) *Une formule géométrique de Σ de contexte $\vec{x}$ est dite "$\mathbb{T}$-cartésienne" si elle a la forme*

$$(\exists\, \vec{y})\psi(\vec{x}, \vec{y})$$

pour une formule de Horn $\psi(\vec{x}, \vec{y})$ de contexte $\vec{x}, \vec{y}$ telle que l'implication

$$\psi(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \psi(\vec{x}, \vec{y}\,') \vdash \vec{y} = \vec{y}\,'$$

est démontrable dans la théorie $\mathbb{T}$.

(ii) *La théorie $\mathbb{T}$ est dite "cartésienne" si tous ses axiomes*

$$\varphi_i \vdash \psi_i$$

sont des implications entre formules $\mathbb{T}$-cartésiennes.

Remarques. –

(i) Toute formule $\mathbb{T}$-cartésienne est régulière.
Donc toute théorie cartésienne est régulière.

(ii) Toute théorie de Horn
(et a fortiori toute théorie vide, ou toute théorie algébrique)
est cartésienne.

Catégories syntactiques géométriques :

Définition. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de signature Σ.*
On appelle "catégorie syntactique géométrique" de $\mathbb{T}$, notée

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{geo}} ,$$

la catégorie ainsi définie :

(i) *Ses objets sont les formules géométriques de Σ*

$$\varphi(\vec{x}) \quad \text{dans des contextes } \vec{x} = x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n}$$

(considérées à remplacement près de variables par d'autres).

(ii) *Les morphismes entre deux formules géométriques de contextes disjoints*

$$\varphi(\vec{x}) \longrightarrow \psi(\vec{y})$$

sont les formules

$$\theta(\vec{x}, \vec{y})$$

(considérées à équivalence $\mathbb{T}$-démontrable près) qi sont "$\mathbb{T}$-démontrablement fonctionnelles" au sens que

$$\left.\begin{array}{l} \theta(\vec{x}, \vec{y}) \vdash \varphi(\vec{x}) , \\ \theta(\vec{x}, \vec{y}) \vdash \psi(\vec{y}) , \\ \varphi(\vec{x}) \vdash (\exists\, \vec{y}) \theta(\vec{x}, \vec{y}) , \\ \theta(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \theta(\vec{x}, \vec{y}\,') \vdash \vec{y} = \vec{y}\,' \end{array}\right\} \text{ sont } \mathbb{T}\text{-démontrables.}$$

(iii) *Le composé de deux morphismes*

$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{\theta_1(\vec{x},\vec{y})} \psi(\vec{y}) \xrightarrow{\theta_2(\vec{y},\vec{z})} \chi(\vec{z})$$

est défini comme la classe de la formule $\mathbb{T}$-démontrablement fonctionnelle

$$(\exists\, \vec{y})(\theta_1(\vec{x},\vec{y}) \wedge \theta_2(\vec{y},\vec{z}))\,.$$

Remarques. –

(i) La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{geo}}$ est essentiellement petite.

(ii) Elle admet des limites finies arbitraires.

Définition. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de signature Σ qui est cohérente [resp. régulière, resp. cartésienne].*
On appelle catégorie syntactique géométrique cohérente de $\mathbb{T}$ [resp. régulière, resp. cartésienne]

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}} \quad \text{[resp. } \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}\text{, resp. } \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{cart}}\text{]}$$

la sous-catégorie de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}}$ dont

- *les objets sont les formules cohérentes [resp. régulières, resp. $\mathbb{T}$-cartésiennes]*

$$\varphi(\vec{x})$$

  (à remplacement près de variables),

- *les morphismes entre telles formules de contextes disjoints*

$$\varphi(\vec{x}) \longrightarrow \psi(\vec{y})$$

  sont les classes d'équivalence de formules $\mathbb{T}$-démontrablement fonctionnelles

$$\theta(\vec{x}, \vec{y})$$

  qui sont cohérentes [resp. régulières, resp. $\mathbb{T}$-cartésiennes].

Remarques. –

(i) Les catégories $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{coh}}$, $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{cart}}$ sont petites.

(ii) Comme les catégories $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{geo}}$, elles ont des limites finies arbitraires.

Proposition. –
Si $\mathcal{C}$ est une catégorie essentiellement petite
qui a des limites finies arbitraires,
un foncteur dans un topos $\mathcal{E}$

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est plat
si et seulement si il respecte les limites finies.

Conséquence. –
Cette proposition s'applique aux catégories syntactiques

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{geo}}, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{coh}}, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{cart}}\,.$$

Sous-objets et démontrabilité :

Proposition. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique [resp. cohérente, resp. régulière, resp. cartésienne] de signature Σ.*

Alors on a dans la catégorie syntactique $\mathcal{C}_{\mathbb{T}} = \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}}, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}}, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{cart}}$:

(i) *Pour tout contexte $\vec{x} = (x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n})$ de Σ, les sous-objets de*

$$\top(\vec{x})$$

sont les formules géométriques [resp. cohérentes, régulières, resp. $\mathbb{T}$-cartésiennes]

$$\varphi(\vec{x})$$

considérées à équivalence $\mathbb{T}$-démontrable près.

(ii) *Deux telles formules considérées comme des sous-objets de $\top(\vec{x})$*

$$\varphi(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \psi(\vec{x})$$

satisfont la relation d'inclusion

$$\varphi(\vec{x}) \subseteq \psi(\vec{x})$$

si et seulement si l'implication

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

est $\mathbb{T}$-démontrable.

Topologies syntactiques :

Définition. – *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie de signature* Σ *qui est cartésienne [resp. régulière, resp. cohérente, resp. géométrique] . Soit*

$$J_{\mathbb{T}} = J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{disc}} \quad \textit{[resp. } J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}\textit{, resp. } J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}}\textit{, resp. } J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}}\textit{]}$$

la "topologie syntactique" sur $\mathcal{C}_{\mathbb{T}} = \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{cart}}$ *[resp.* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}$, $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}}$, *ou* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}}$*]* *pour laquelle une famille de morphismes de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

$$\theta_i : \varphi_i(\vec{x}_i) \xrightarrow{\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x})} \varphi(\vec{x}) , \quad i \in I ,$$

est couvrante si et seulement si:

- *dans le cas cartésien :*
  il existe $i \in I$ *tel que* $\mathrm{id} : \varphi(\vec{x}) \to \varphi(\vec{x})$ *se factorise à travers* θ_i,
- *dans le cas régulier : il existe* $i \in I$ *tel que*
  $$\varphi(\vec{x}) \vdash (\exists\, \vec{x}_i)\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) \quad \textit{soit } \mathbb{T}\textit{-démontrable,}$$
- *dans le cas cohérent :*
  il existe une partie finie $\{i_1, \cdots, i_n\} \subseteq I$ *telle que*
  $$\varphi(\vec{x}) \vdash (\exists\, \vec{x}_{i_1})\theta_{i_1}(\vec{x}_{i_1}, \vec{x}) \vee \cdots \vee (\exists\, \vec{x}_{i_n})\theta_{i_n}(\vec{x}_{i_n}, \vec{x}) \quad \textit{soit } \mathbb{T}\textit{-démontrable,}$$
- *dans le cas géométrique :*
  $$\varphi(\vec{x}) \vdash \bigvee_{i \in I} (\exists\, \vec{x}_i)\theta_i(\vec{x}_i, \vec{x}) \quad \textit{est } \mathbb{T}\textit{-démontrable.}$$

Modèles et foncteurs plats $J_{\mathbb{T}}$-continus :

Théorème. –
Soit $\mathbb{T}$ une théorie de signature Σ
qui est géométrique, cohérente, régulière ou cartésienne.
Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{T}} = \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}}, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}}, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{cart}}$.
Soit $\mathcal{E}$ un topos.
Associons à tout modèle M de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ le foncteur

$$F_M : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui associe

- *à tout objet $\varphi(\vec{x})$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ l'objet*
$$M\varphi(\vec{x}) \quad \text{de} \quad \mathcal{E}\,,$$
- *à tout morphisme de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$*
$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{\theta(\vec{x},\vec{y})} \psi(\vec{y})$$
le morphisme de $\mathcal{E}$
$$M\varphi(\vec{x}) \longrightarrow M\psi(\vec{y})$$
dont le graphe est le sous-objet
$$M\theta(\vec{x},\vec{y}) \hookrightarrow M\varphi(\vec{x}) \times M\psi(\vec{y})\,.$$

Alors:

(i) *Le foncteur*

$$M \longmapsto M_F$$

définit une équivalence de la catégorie des modèles

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

sur la catégorie des foncteurs

$$F : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui sont plats et $J_{\mathbb{T}}$-continus pour la topologie syntactique $J_{\mathbb{T}}$ sur $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

(ii) *Son équivalence réciproque*

$$F \longmapsto M_F$$

transforme tout tel foncteur plat et $J_{\mathbb{T}}$-continu

$$F : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

en le modèle M_F qui associe

- *à toute sorte A l'objet*
$$M_F A = F(T(x^A)),$$
- *à tout symbole de fonction $f : A_1 \cdots A_n \to B$ le morphisme*
$$M_F f = F(y^B = f(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n})),$$
- *à tout symbole de relation $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ le sous-objet*
$$M_F R = F(R(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n})) \hookrightarrow F(T(x_1^{A_1} \cdots x_n^{A_n})) = M_F A_1 \times \cdots \times M_F A_n .$$

Corollaire. – *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie de signature* Σ
qui est géométrique, cohérente, régulière ou cartésienne.
Soit sa catégorie syntactique

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}} = \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}}, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}}, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}} \text{ ou } \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{cart}}$$

munie de sa topologie syntactique

$$J_{\mathbb{T}} = J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}}, J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}}, J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}} \text{ ou } J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{disc}} .$$

Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}}$
le topos des faisceaux sur le site syntactique $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$.
Enfin, soit $M_{\mathbb{T}}$
le modèle de $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *qui correspond au morphisme canonique*

$$\ell : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}} .$$

Alors, pour tout topos $\mathcal{E}$, *le foncteur*

$$(f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{\mathbb{T}}) = (\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}, \mathcal{E} \xrightarrow{f_*} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}) \longmapsto f^* M_{\mathbb{T}}$$

définit une équivalence de la catégorie des morphismes de topos

$$[\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}]_T$$

sur la catégorie des modèles de $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) .$$

Remarques. –

(i) En particulier, on a une équivalence canonique

$$\mathrm{pt}(\mathcal{E}_{\mathbb{T}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathrm{Ens})\,.$$

(ii) Le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est appelé le "topos classifiant" de $\mathbb{T}$.
Il est caractérisé à équivalence canonique près par les équivalences

$$[\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})\,.$$

(iii) En particulier, si $\mathbb{T}$ est cohérente, régulière ou cartésienne, le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ considéré à équivalence canonique près, ne dépend pas du site syntactique $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ choisi.

(iv) Si $\mathbb{T}$ est une théorie cartésienne (en particulier si $\mathbb{T}$ est une théorie vide, algébrique ou de Horn), on peut prendre

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{cart}}}\,.$$

Ainsi, $\mathbb{T}$ est "de type préfaisceau" au sens que son topos classifiant est équivalent au topos des préfaisceaux

$$\widehat{\mathcal{C}}$$

sur une petite catégorie $\mathcal{C}$.

Résumé de ce que nous savons déjà sur les topos et leurs multiples présentations :

- Les topos sont par définition les catégories $\mathcal{E}$ équivalentes à des catégories de faisceaux sur des sites $(\mathcal{C}, J)$

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\,.$$

- Toute présentation

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

  et tout choix d'une sous-catégorie pleine et J-dense

$$\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$$

  munie de la topologie J' induite par J définissent une nouvelle équivalence

$$\widehat{\mathcal{C}'}_{J'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\,.$$

- Tout choix dans un topos $\mathcal{E}$ d'une petite sous-catégorie pleine et séparante

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{E}$$

  et de la topologie J de $\mathcal{C}$ induite par $\mathcal{E}$ définit une équivalence

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\,.$$

Du côté des théories et de leurs expressions géométriques :

- Toute théorie “géométrique du premier ordre” $\mathbb{T}$ admet un “topos classifiant” $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ muni d’un $\mathbb{T}$-modèle universel $M_{\mathbb{T}}$, caractérisé par la propriété que, pour tout topos $\mathcal{E}$, le foncteur
$$\begin{array}{rcl} [\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}]_T & \longrightarrow & \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})\,, \\ f & \longmapsto & f^* M_{\mathbb{T}} \end{array}$$
est une équivalence de catégories.
- Ce topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ peut être construit comme topos des faisceaux sur le site $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}}, J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{geo}})$
$\left\{\begin{array}{l}\text{des formules géométriques de la signature } \Sigma \text{ de } \mathbb{T}, \\ \text{et de leurs relations } \mathbb{T}\text{-démontrablement fonctionnelles.}\end{array}\right.$
- Si $\mathbb{T}$ est cohérente ou régulière, $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ peut aussi être construit comme topos des faisceaux sur le site
$\left\{\begin{array}{l}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}}, J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{coh}}) \text{ des formules cohérentes de } \Sigma, \\ (\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}, J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}) \text{ des formules régulières de } \Sigma.\end{array}\right.$
- Enfin, si $\mathbb{T}$ est cartésienne, $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ peut encore être construit comme topos des préfaisceaux sur la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{cart}}$ des formules $\mathbb{T}$-cartésiennes de Σ.

Du côté de l'expression des sites en termes de théories :

- Toute petite catégorie $\mathcal{C}$ définit une signature $\Sigma_{\mathcal{C}}$
  - dont les sortes sont les objets de $\mathcal{C}$,
  - dont les symboles de fonction sont les morphismes de $\mathcal{C}$,
  - et qui n'a aucun symbole de relation.
- Toute topologie J sur $\mathcal{C}$ définit
  une théorie géométrique $\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$ de signature $\Sigma_{\mathcal{C}}$,
  telle que, pour tout topos $\mathcal{E}$,
  $$\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}\text{-mod}(\mathcal{E})$$
  est la catégorie des foncteurs
  $$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$
  qui sont plats et J-continus.
- Ainsi, le topos des faisceaux sur le site $(\mathcal{C}, J)$
  $$\widehat{\mathcal{C}}_J$$
  apparaît comme topos classifiant de la théorie géométrique $\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}$
  $$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}_{\mathcal{C},J}} .$$

Présentations géométriques et descriptions linguistiques :

- Ainsi, on sait déjà que tout topos $\mathcal{E}$ admet

$$\begin{cases} - & \text{une } \underline{\text{infinie diversité de présentations géométriques}} \\ & \widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\,, \\ - & \text{une } \underline{\text{infinie diversité de descriptions linguistiques}} \\ & \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\,. \end{cases}$$

- Chaque présentation géométrique de $\mathcal{E}$
  $\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ prolongeant un foncteur $\ell : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$
  induit des <u>expressions naturelles de ses objets</u> E sous la forme

$$E = \varinjlim_{(X,x)\in\int F} \ell(X) \quad \text{avec} \quad F = \mathrm{Hom}(\ell(\bullet), E)\,.$$

- Chaque description linguistique de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

induit des <u>descriptions naturelles de ses points</u> à valeurs dans les topos $\mathcal{E}'$

$$[\mathcal{E}', \mathcal{E}]_T \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}')\,.$$

Les sens du passage aux topos : le versant géométrique

- Pour Grothendieck,
  les situations mathématiques les plus diverses
  donnent lieu à la définition naturelle de sites
  dont les topos associés incarnent

  "l'essence de ces situations".

- En particulier,
  dans toute situation géométrique
  ou que la notion extraordinairement générale de site
  permet de voir et d'étudier géométriquement,
  ce qui est vraiment signifiant dans cette situation
  se définit à partir du ou des topos
  associés à cette situation.

- Par exemple,
  les invariants cohomologiques ou homotopiques
  des espaces topologiques ou des variétés
  sont des invariants des topos
  associés à ces espaces ou ces variétés.

- En fait,
  la notion générale de topos
  a d'abord été découverte par Grothendieck
  comme

  le cadre le plus général
  dans lequel les invariants cohomologiques sont définis.

- De même, d'après Grothendieck et Artin-Mazur,

  le π_1
  et tous les invariants homotopiques

  se définissent dans le cadre général des topos.

Les sens du passage aux topos : le versant linguistique

- Par définition,
  pour toute "théorie géométrique du premier ordre" $\mathbb{T}$,
  son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$
  représente le foncteur de ses modèles
  au sens qu'existent des équivalences de catégories naturelles

  $$[\mathcal{E}', \mathcal{E}_{\mathbb{T}}]_T \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}')$$

  pour tout topos $\mathcal{E}'$.
- Cela signifie que les constructions

  $$\mathbb{T} \longmapsto (\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}}) \longmapsto \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}}$$

  incarnant mathématiquement
  le passage de la syntaxe à la sémantique
  au sens de Tarski.
- Ainsi, deux théories $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ sont "Morita-équivalentes" au sens que

  $$\mathcal{E}_{\mathbb{T}_1} \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}_2}$$

  si et seulement si elles sont "sémantiquement équivalentes" au sens que
  leurs foncteurs des modèles sont équivalents.

- Cela conduit à étudier spécialement
  les équivalences de Morita
  entre théories géométriques du premier ordre.
- Suivant Olivia Caramello, cela conduit aussi à
  étudier ensemble les théories $\mathbb{T}$
  dont le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est de tel ou tel type particulier.
- Par exemple, une théorie $\mathbb{T}$
  est dite "de type préfaisceau"
  si $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalent à un topos de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{C}}$.

$\longrightarrow$ Les théories de type préfaisceau comprennent
les théories algébriques, les théories vides et les théories cartésiennes.

$\longrightarrow$ O. Caramello a donné plusieurs séries de
critères nécessaires et suffisants
pour qu'une théorie soit de type préfaisceau.

- De même, elle a caractérisé
  les théories $\mathbb{T}$ qui sont "galoisiennes"
  au sens que leur topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalent
  au topos des actions continues d'un groupe topologique.

La notion générale d'invariant de topos :

- Il peut s'agir d'une propriété (P)
  susceptible d'être vérifiée ou non par n'importe quel topos
  et qui est respectée par toutes les équivalences de topos

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\,.$$

- Il peut s'agir aussi d'un
  foncteur covariant ou contravariant
  de la catégorie des topos vers une catégorie $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{rcccl} H & : & \text{topos } \mathcal{E} & \longmapsto & \text{objet } H(\mathcal{E}) \text{ de } \mathcal{A}, \\ & & (f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} & f_* : H(\mathcal{E}') \to H(\mathcal{E}) \\ \text{ou} & f^* : H(\mathcal{E}) \to H(\mathcal{E}') \end{array} \right\}, \\ & & \| & & \qquad\qquad \| \\ & & \text{morphisme} & & \text{morphisme de } \mathcal{A} \\ & & \text{de topos} & & \end{array}$$

et qui transforme
toute équivalence de topos $\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$
en un isomorphisme de $\mathcal{A}$.

La technique des “topos comme ponts” de Caramello : Les principes

- Tout topos $\mathcal{E}$ incarne un contenu mathématique.
- Toute présentation de $\mathcal{E}$ par un site $(\mathcal{C}, J)$

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

représente un point de vue géométrique sur ce contenu.
- Toute description de $\mathcal{E}$ par une théorie $\mathbb{T}$

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$$

représente un point de vue linguistique sur ce contenu.
- Varier les présentations d’un topos $\mathcal{E}$ par des sites ou des théories

  représente une incarnation mathématique
  de la multiplication des points de vue géométriques ou linguistiques
  sur le contenu mathématique incarné par ce topos.

- Choisir une question pertinente
  au sujet d'un contenu mathématique incarné par un topos $\mathcal{E}$
  se réalise par la considération et l'étude
  d'une propriété invariante (P) ou d'un invariant H des topos
  dans le cas spécifique du topos $\mathcal{E}$.
- Exprimer une propriété invariante (P) ou un invariant H des topos
  dans les termes d'une présentation géométrique par un site $(\mathcal{C}, J)$
  ou d'une description linguistique par une théorie $\mathbb{T}$
  revient à rapporter cette propriété ou cet invariant abstrait
  à des données ou des énoncés concrets
  directement formulables à partir de $(\mathcal{C}, J)$ ou de $\mathbb{T}$.
- Rapprocher les expressions d'une propriété abstraite ou d'un invariant
  dans les termes de différentes présentations géométriques
  ou descriptions linguistiques
  incarne mathématiquement l'opération
  de confronter des points de vue divers.
  Cela fait apparaître des correspondances et des équivalences,
  le plus souvent inattendues,
  entre diverses formes d'expressions d'un même phénomène abstrait.

La technique des “topos comme ponts” : Sa mise en œuvre

- Considérer des propriétés invariantes (P) ou des invariants H de topos (ou des classes de telles propriétés ou de tels invariants),
  et les exprimer ou les calculer dans les termes
  de différents types de sites de présentation
  ou de théories de description.

- Utiliser des procédés déjà connus permettant de
  faire apparaître des équivalences de topos,

  et enrichir les procédés connus

  — par une étude systématique des morphismes entre topos définis par des sites ou des théories,
  — par l’obtention de nouveaux critères pour que de tels morphismes soient des équivalences.

- Combiner les deux pour faire apparaître
  de nouvelles correspondances ou équivalences.

- En sens inverse, considérer
  des équivalences ou correspondances classiques des mathématiques,
  et chercher à les relever en des
  équivalences de topos associés à des sites ou des théories
  dont elles se déduiraient par expression ou calcul
  de certains invariants dans diverses présentations.

- De cette façon, constituer et enrichir peu à peu
  une bibliothèque constituée

  - d'équivalences connues
    entre des topos associés à des sites ou des théories,
  - de classes d'invariants de topos
    qui sont intéressants dans certains types de situations,
  - d'expressions ou de calculs concrets de tels invariants
    dans divers types de présentations géométriques
    ou de descriptions linguistiques.

- Quand une équivalence concrète classique est relevée en
  une équivalence abstraite de topos,
  on peut considérer d'autres invariants et les calculer pour obtenir
  d'autres équivalences concrètes "sœurs" de l'équivalence de départ.

Remarques sur le programme des “topos comme ponts” :

- Ce programme est structurellement à l’échelle des mathématiques.
- O. Caramello a montré par des exemples d’applications que sa “technique des topos comme ponts” engendre des résultats non triviaux et inattendus dans divers domaines des mathématiques.

→ Cela suffit à justifier que son programme continue d’être développé et approfondi par une nouvelle école mathématique.

Quelles parties de ce programme peuvent-elles donner lieu à des algorithmes ?

→ D’abord et avant tout, le calcul de certaines classes d’invariants de topos dans les termes de certaines classes de présentations géométriques ou de descriptions linguistiques.
(NB: O. Caramello a prouvé au moins un “méta-théorème” qui établit que certaines classes d’invariants de topos sont “calculables”.)

→ La constitution de “bibliothèques” d’équivalences de topos et d’invariants de topos ?

Le cas particulier d'un invariant de base : associer à tout topos l'ensemble ordonné de ses sous-topos

On rappelle:

- Un plongement de topos est un morphisme de topos $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$

$$j = (\mathcal{E} \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}', \mathcal{E}' \xrightarrow{j_*} \mathcal{E})$$

  tel que $j_* : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ est un foncteur pleinement fidèle.

- Deux plongements de topos

$$j_1 : \mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E} \quad \text{et} \quad j_2 : \mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}$$

  sont dits équivalents [resp. ordonnés en $\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_2$]
  s'il existe une équivalence [resp. un plongement]

$$e : \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_2 \qquad [\text{resp.} \quad \mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}_2\ ]$$

  et un isomorphisme de plongements de topos

$$e \circ j_2 \cong j_1 \,.$$

- Pour toute petite catégorie $\mathcal{C}$, les deux applications

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} J \\ \| \\ \text{topologie sur } \mathcal{C} \end{array} & \longmapsto & (\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J, \widehat{\mathcal{C}}_J \xhookrightarrow{j_*} \widehat{\mathcal{C}}), \\ & & \\ (\widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}, \mathcal{E} \xhookrightarrow{j_*} \widehat{\mathcal{C}}) & \longmapsto & \begin{array}{c} J_{\mathcal{E}} = \text{ topologie sur } \mathcal{C} \\ \text{pour laquelle un crible} \\ C \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, X) \\ \text{est couvrant si} \\ j^* C \to j^* \mathrm{Hom}(\bullet, X) \\ \text{est un isomorphisme} \end{array} \end{array} \right.$$

sont <u>deux bijections réciproques</u>

renversant les relations d'ordre, entre

- <u>l'ensemble ordonné des topologies</u> sur $\mathcal{C}$,
- les <u>sous-topos</u> de $\widehat{\mathcal{C}}$,
qui donc <u>forment un ensemble</u>.

Corollaire. –

(i) *Pour tout topos $\mathcal{E}$,*
ses sous-topos forment un ensemble ordonné.

(ii) *Pour toute présentation de $\mathcal{E}$ par un site $(\mathcal{C}, J)$*

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\,,$$

l'ensemble de ses sous-topos s'identifie,
modulo renversement de la relation d'ordre,
à l'ensemble ordonné des topologies J' de $\mathcal{C}$ telles que

$$J' \supseteq J\,.$$

Remarque. – En particulier, l'ensemble ordonné

$$\{J' = \text{ topologie de } \mathcal{C} \mid J' \supseteq J\}$$

ne dépend pas de la présentation choisie

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

du topos $\mathcal{E}$.

Fonctorialité des sous-topos :

L'application

$$\text{topos } \mathcal{E} \longmapsto \text{ensemble ordonné des sous-topos de } \mathcal{E}$$

définit un invariant des topos à la fois covariant et contravariant

$$(\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}) \longmapsto \begin{cases} f_* : (\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}') & \mapsto \quad \mathrm{Im}(\mathcal{E}'_1 \hookrightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E})\,, \\ f^{-1} : (\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}) & \mapsto \quad (f^{-1}\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}') \end{cases}$$

où :

- L'image d'un morphisme de topos
$$f_1 : \mathcal{E}'_1 \longrightarrow \mathcal{E}$$
est l'unique sous-topos $\mathrm{Im}(f_1) = (\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E})$
tel que f_1 se factorise en
$$\mathcal{E}'_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$$
où $\overline{f}_1$ est un morphisme surjectif de topos
au sens que $\overline{f}_1^*$ est un foncteur fidèle.
- L'image réciproque par $\mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ d'un sous-topos $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$
est l'unique sous-topos $f^{-1}\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}'$
tel qu'un morphisme de topos $g : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$
se factorise à travers $f^{-1}\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}'$ si et seulement si
$f \circ g$ se factorise à travers $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$.

Une question naturelle dans le cadre de la technique des “topos comme ponts” :

Question. –
Soit $\mathcal{E}$ un topos.
Considérons une description de ce topos
comme <u>topos classifiant</u>
d’une théorie <u>“géométrique du premier ordre”</u> $\mathbb{T}$ de signature Σ

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \,.$$

Est-il possible de <u>décrire l’invariant</u> de $\mathcal{E}$

$$\{\text{sous-topos de } \mathcal{E}\}$$

<u>en termes de la théorie</u> $\mathbb{T}$?

Sous-topos et théories quotients :

Théorème (O. Caramello). –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de signature Σ.

Alors il existe deux bijections réciproques constructives entre

$$\begin{cases} - & \text{l'ensemble ordonné des sous-topos de } \mathcal{E}_{\mathbb{T}}, \\ - & \text{l'ensemble ordonné des théories quotients de } \mathbb{T}, \\ & \text{modulo équivalence.} \end{cases}$$

Signification des mots :

(i) Si $\mathbb{T}$ est une théorie géométrique de signature Σ,
une théorie $\mathbb{T}'$ quotient de $\mathbb{T}$
est une théorie géométrique de même signature Σ
telle que tout axiome de $\mathbb{T}$ est démontrable dans $\mathbb{T}'$.

(ii) Deux théories $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ de même signature Σ
sont dites équivalentes
si chacune est quotient de l'autre.

Remarques. –

- La thèse de Caramello (reprise dans son livre “Theories, Sites, Toposes”) donne deux démonstrations constructives que nous allons expliquer et diverses applications, en particulier aux questions de démontrabilité.
- La théorie vide de signature Σ a pour topos classifiant
le topos de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{C}}_\Sigma$
sur la catégorie syntactique cartésienne $\mathcal{C}_\Sigma = \mathcal{C}_\Sigma^{\text{cart}}$.
D'après le théorème, toute théorie $\mathbb{T}$ de signature Σ
admet un topos classifiant de la forme

$$\mathcal{E}_\mathbb{T} = \widehat{(\mathcal{C}_\Sigma)_{J_\mathbb{T}}}$$

pour une certaine topologie $J_\mathbb{T}$ sur $\mathcal{C}_\Sigma$.
Cette manière de construire $\mathcal{E}_\mathbb{T}$ avait déjà été découverte
par Michel Coste et Marie-Françoise Roy
dans le cadre des théories “finitaires”.

Application aux problèmes de démontrabilité :

On voudrait explorer jusqu'à quel point
le corollaire suivant se prête au calcul sur ordinateur:

Corollaire. – *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de signature Σ.*
Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site de présentation du topos classifiant de $\mathbb{T}$:

$$\widehat{\mathcal{C}}_J \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \, .$$

Soit $\mathbb{T}'$ une théorie quotient de $\mathbb{T}$
définie par un axiome supplémentaire de la forme

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi \, .$$

Soit J' l'unique topologie de $\mathcal{C}$ contenant J telle que

$$\widehat{\mathcal{C}}_{J'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathbb{T}'} \, .$$

Alors l'axiome

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

est démontrable dans $\mathbb{T}$ si et seulement si

$$J' = J \, .$$

Remarque. – Pour cela, on cherche des conditions sous lesquelles
la topologie J' est engendrée sur J par des cribles
associés constructivement à $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$.