V. Opérations sur les topologies, formule d'engendrement et applications

Commençons par introduire le préfaisceau Ω
des cribles sur les objets d'une catégorie essentiellement petite :

Définition. – *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite.*
On note Ω le préfaisceau

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ X & \longmapsto & \Omega(X) = \textit{ensemble des cribles de } \mathcal{C} \textit{ sur } X\,, \\ (X' \xrightarrow{x} X) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x^* : \Omega(X) & \to & \Omega(X')\,, \\ C & \mapsto & x^* C = \{U \xrightarrow{u} X' \mid x \circ u \in C\}\,. \end{array} \right. \end{array}$$

Remarque. – Le préfaisceau Ω est appelé le "classificateur des sous-objets" de $\widehat{\mathcal{C}}$ car, pour tout préfaisceau P, l'application

$$(P \xrightarrow{\chi} \Omega) \longmapsto (P_\chi : X \mapsto \{p \in P(X) \mid \chi(p) = \text{ crible maximal sur } X\})$$

définit une bijection

$$\mathrm{Hom}(P, \Omega) \xrightarrow{\sim} \{\text{ensemble des sous-objets } P' \hookrightarrow P\}$$

dont la bijection réciproque est

$$(P' \hookrightarrow P) \longmapsto$$

$$\left(\chi : P \to \Omega, \left\{ \begin{array}{c} p \in P(X) \text{ vu comme} \\ \text{morphisme } \mathrm{Hom}(\bullet, X) \to P \end{array} \right\} \longmapsto \text{crible } \mathrm{Hom}(\bullet, X) \times_P P' \right)\,.$$

Les sous-objets du classificateur des sous-objets :

On considère toujours le topos $\widehat{\mathcal{C}}$ des préfaisceaux sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$.
Les endomorphismes de son classificateur des sous-objets $\qquad \Omega \longrightarrow \Omega$
correspondent aux sous-objets $\qquad D \hookrightarrow \Omega\,.$

Lemme. – *Les sous-objets* $\qquad D \hookrightarrow \Omega$
sont les applications $\qquad X \longmapsto D(X) =$ *sous-ensemble de* $\Omega(X)$
qui satisfont l'axiome de "stabilité" :
Pour tout morphisme $X' \xrightarrow{x} X$ *de* $\mathcal{C}$*, l'application*

$$x^* : \Omega(X) \to \Omega(X') \text{ envoie } D(X) \text{ dans } D(X').$$

Remarque. – Un tel sous-objet $D \hookrightarrow \Omega$ est une topologie sur $\mathcal{C}$ s'il satisfait de surcroît les deux axiomes :

- Maximalité : le crible maximal sur tout objet X de $\mathcal{C}$ est élément du sous-ensemble $D(X) \subseteq \Omega(X)$.
- Transitivité : l'endomorphisme qui correspond à D $\qquad \chi : \Omega \longrightarrow \Omega$ est idempotent, soit $\chi \circ \chi = \chi$.

L'opération de fermeture des cribles par une topologie :

Lemme. – *Pour tout sous-objet $D \hookrightarrow \Omega$, l'endomorphisme correspondant*

$$\chi : \Omega \longrightarrow \Omega$$

associe à tout crible C sur un objet X le crible sur X

$$\overline{C} = \{U \xrightarrow{u} X \mid u^* C \in D(U)\}.$$

Remarques. –

- Si $D \hookrightarrow \Omega$ satisfait l'axiome de maximalité, on a toujours $C \subseteq \overline{C}$.
- Dans ce cas, D est une topologie J si et seulement si

$$\overline{\overline{C}} = \overline{C} \quad \text{pour tout crible } C.$$

- Si D est une topologie J, un crible C sur X est dit "J-fermé" si $\overline{C} = C$ c'est-à-dire si une flèche $U \xrightarrow{u} X$ est dans C dès qu'elle est localement dans C.
- Dans ce cas, pour tout crible C, on appelle J-fermeture de C le crible

$$\overline{C} = \{U \xrightarrow{u} X \mid u \text{ est localement dans } C\}.$$

Intersections, réunions et topologies engendrées :

L'ensemble des sous-objets $D \hookrightarrow \Omega$
est muni d'une relation d'ordre par l'inclusion.
Toute famille de sous-objets a une intersection et une réunion.

Lemme. – *Pour toute famille de topologies J_i, $i \in I$, sur $\mathcal{C}$, vues comme des sous-objets $J_i \hookrightarrow \Omega$, leur intersection est encore une topologie notée* $\bigwedge\limits_{i \in I} J_i$.

Remarque. –
En revanche, une réunion de topologies n'est pas en général une topologie.

Corollaire. –

(i) *Pour tout sous-objet $D \hookrightarrow \Omega$, il existe une plus petite topologie J_D sur $\mathcal{C}$ qui contient D. On l'appelle la topologie engendrée par D.*

(ii) *En particulier, pour toute famille de topologies J_i, $i \in I$, sur $\mathcal{C}$, il existe une plus petite topologie* $\bigvee\limits_{i \in I} J_i$ *qui contient toutes les topologies J_i, $i \in I$.*

Intersections et réunions de théories :

Soit $\mathbb{T}_0$ une théorie géométrique qui admet $\widehat{\mathcal{C}}$ pour topos classifiant.
Alors les topologies J sur $\mathcal{C}$ correspondent aux théories quotients de $\mathbb{T}_0$
$\mathbb{T}$ considérées à équivalence près.

Rappel. – *La relation d'ordre entre topologies sur $\mathcal{C}$ correspond à la relation d'ordre $\mathbb{T}_1 \leq \mathbb{T}_2$, définie en demandant que toute propriété géométrique $\mathbb{T}_1$-démontrable soit $\mathbb{T}_2$-démontrable.*

Corollaire. –

(i) *L'intersection des topologies correspond à l'opération* $(\mathbb{T}_i)_{i\in I} \longmapsto \bigwedge_{i\in I} \mathbb{T}_i$ *définie en demandant qu'une propriété géométrique soit démontrable dans* $\bigwedge_{i\in I} \mathbb{T}_i$ *si et seulement si elle est démontrable dans chaque $\mathbb{T}_i$, $i \in I$.*

(ii) *Le supremum des topologies correspond à l'opération* $(\mathbb{T}_i)_{i\in I} \longmapsto \bigvee_{i\in I} \mathbb{T}_i$ *définie en demandant que $\bigvee_{i\in I} \mathbb{T}_i$ soit la plus petite théorie dans laquelle une propriété est démontrable si elle l'est dans l'une au moins des théories $\mathbb{T}_i$, $i \in I$.*

L’opération d’implication entre topologies :

Proposition. – *Pour toute topologie J sur $\mathcal{C}$, le foncteur d’intersection avec J*

$$J \wedge \bullet : K \longmapsto J \wedge K$$

possède un adjoint à droite

$$J' \longmapsto (J \Rightarrow J')\,,$$

caractérisé par la propriété que, pour toute topologie K, on a

$$K \leq (J \Rightarrow J')$$

si et seulement si

$$J \wedge K \leq J'\,.$$

Remarque. – Autrement dit, si $\mathbb{T}_0$ est une théorie classifiée par le topos $\widehat{\mathcal{C}}$, le foncteur d’intersection avec n’importe quelle théorie $\mathbb{T}$ quotient de $\mathbb{T}_0$

$$\mathbb{T} \wedge \bullet$$

possède un adjoint à droite

$$\mathbb{T}' \longmapsto (\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{T}')$$

caractérisé par la propriété que, pour toute théorie quotient $\mathbb{T}''$ de $\mathbb{T}_0$, on a

$$\mathbb{T}'' \leq (\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{T}')$$

si et seulement si

$$\mathbb{T} \wedge \mathbb{T}'' \leq \mathbb{T}'\,.$$

Distributivité des intersections et des réunions :

Corollaire. –

(i) *Pour toutes topologies J et J_i, $i \in I$, sur $\mathcal{C}$, on a*

$$J \wedge \bigvee_{i \in I} J_i = \bigvee_{i \in I} (J \wedge J_i)\,.$$

(ii) *Pour toutes topologies J et $J_1, \cdots, J_n$ sur $\mathcal{C}$, on a*

$$J \vee (J_1 \wedge \cdots \wedge J_n) = (J \vee J_1) \wedge \cdots \wedge (J \vee J_n)\,.$$

Remarque. – Ces propriétés se transportent à l'ensemble ordonné des théories quotients d'une théorie $\mathbb{T}_0$ classifiée par le topos $\widehat{\mathcal{C}}$.

Démonstration. –

(i) Le foncteur $J \wedge \bullet$ admet un adjoint à droite donc il respecte les colimites $\bigvee\limits_{i \in I}$.

(ii) Il suffit de considérer le cas $n = 2$. Alors

$$\begin{aligned}(J \vee J_1) \wedge (J \vee J_2) &= (J \wedge J) \vee (J_1 \wedge J) \vee (J \wedge J_2) \vee (J_1 \wedge J_2) \\ &= J \vee (J_1 \wedge J_2)\,.\end{aligned}$$

Début de la construction de l'adjoint : une condition nécessaire

Lemme. – *Soient J, J' et K trois topologies sur $\mathcal{C}$ telles que*

$$J \wedge K \leq J' .$$

Soient

$$\begin{cases} X \text{ un objet de } \mathcal{C}, \\ C \text{ un crible sur } X \text{ élément de } K(X), \\ (U \xrightarrow{u} X) \text{ un morphisme}, \\ C' \text{ un crible sur } U \text{ élément de } J(U),\ J'\text{-fermé et tel que} \\ \qquad\qquad u^* C \subseteq C' . \end{cases}$$

Alors le crible C' sur U est maximal.

Démonstration. –
Le crible C' sur U est J-couvrant.
Il est aussi K-couvrant puisqu'il contient $u^*(C)$.
Comme $J \wedge K \leq J'$, cela implique que C' est J'-couvrant.
Comme il est J'-fermé, il contient $U \xrightarrow{\mathrm{id}} U$ c'est-à-dire est maximal.

Vérification de ce que la condition nécessaire définit une topologie :

Proposition. – *Soient J et J' deux topologies sur $\mathcal{C}$.*
Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, soit $D(X) \subseteq \Omega(X)$
l'ensemble des cribles C sur X tels que,
pour tout morphisme $U \xrightarrow{u} X$ et tout crible C' sur U, les conditions

$$\begin{cases} C' \text{ est } J\text{-couvrant}, \\ C' \text{ est } J'\text{-fermé}, \\ C' \text{ contient } u^*(C) \end{cases}$$

impliquent que C' est le crible maximal.
Alors D est une topologie sur $\mathcal{C}$.

Démonstration. –

- Comme la définition fait apparaître une quantification sur tous les morphismes $U \xrightarrow{u} X$ de but X,
  D satisfait l'axiome de stabilité, c'est-à-dire est un sous-objet $D \hookrightarrow \Omega$.
- D satisfait l'axiome de maximalité
  car, si C est le crible maximal sur X,
  son image réciproque $u^*(C)$ par n'importe quel $U \xrightarrow{u} X$
  est le crible maximal de U.

Vérification de l'axiome de transitivité :

- On considère un crible C sur un objet X de $\mathcal{C}$
  et un crible C' sur X, élément de $D(X)$,
  tel que pour tout élément $U' \xrightarrow{u'} X$ de C', on ait $\quad u'^*(C) \in D(U')$.
- Il faut montrer qu'alors $\quad C \in D(X)$.
- Considérons donc un morphisme $U \xrightarrow{u} X$ et un crible S sur U qui
  $$\begin{cases} \text{est } J\text{-couvrant}, \\ \text{est } J'\text{-fermé}, \\ \text{contient } u^*(C). \end{cases}$$
  Il faut montrer que S est nécessairement le crible maximal.
- Pour tout élément $U' \xrightarrow{u'} U$ de $u^*(C')$, on a
  $$(u \circ u')^*(C) \in D(U') \quad \text{puisque} \quad u \circ u' \in C'.$$
  On a aussi que $\begin{cases} u'^*(S) \text{ est } J\text{-couvrant et } J'\text{-fermé}, \\ \text{il contient } (u \circ u')^*(C), \end{cases}$
  donc $u'^*(S)$ est le crible maximal sur U' ce qui signifie que $\quad u' \in S$.
- Ainsi, S est J-couvrant et J'-fermé et il contient le crible $u^*(C')$.
- Cela implique comme voulu que S est le crible maximal sur U.

Les opérateurs “gauche” et “droite” de Joyal :

Définition. – *Dans le contexte d'un topos de préfaisceaux* $\widehat{\mathcal{C}}$,
on associe à tout sous-objet $D \hookrightarrow \Omega$
les sous-objets $D^\ell \hookrightarrow \Omega$ *et* $D^r \hookrightarrow \Omega$ *définis par les formules :*

(i) *Pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$,

$$D^\ell(X) = \left\{ C = \text{crible sur } X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout } U \xrightarrow{u} X \text{ et tout } C' \in D(U) \\ \text{tel que } u^*(C) \subseteq C', \\ C' \text{ est nécessairement le crible maximal} \end{array} \right\}.$$

(ii) *Pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$,

$$D^r(X) = \left\{ C = \text{crible sur } X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout } U \xrightarrow{u} X \text{ et tout } C' \in D(U) \\ \text{tel que } C' \subseteq u^*(C), \\ \text{on a nécessairement } u \in C \end{array} \right\}.$$

Remarques. –

(i) D^ℓ et D^r satisfont l'axiome de “stabilité”
car $D^\ell(X)$ et $D^r(X)$ sont définis par une condition
qui comprend une quantification sur tous les $U \xrightarrow{u} X$.

(ii) Si $D_1 \leq D_2$, on a nécessairement $D_2^\ell \leq D_1^\ell$ et $D_2^r \leq D_1^r$.

Note sur les références :

- Joyal n'a pas publié lui-même
  sa théorie des opérateurs $\quad D \mapsto D^\ell \quad$ et $\quad D \mapsto D^r$.
- Elle est exposée dans le livre de P. Johnstone
  "Sketches of an Elephant: a topos theory compendium".
- Les définitions de ces opérateurs et leur étude sont formulées par Johnstone dans le cadre et dans le langage des "topos élémentaires", considérés comme un type de structure algébrique.
- Cela implique que, dans ce livre, les opérateurs de Joyal sont définis par des formules de type algébrique, qui s'écrivent

$$
\begin{aligned}
D^\ell &= \forall_{\pi_1}(\pi_2^*(D) \Rightarrow \theta) \\
D^r &= \forall_{\pi_2}(\pi_1^*(D) \Rightarrow \theta)
\end{aligned}
$$

  où π_1, π_2 sont les deux projections $\Omega \times \Omega \rightrightarrows \Omega$,

  et $\theta \hookrightarrow \Omega \times \Omega$ est l'égalisateur de $\Omega \times \Omega \underset{\Rightarrow}{\overset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \Omega$.

- L'explicitation de ces définitions en termes de cribles, dans le contexte des topos de préfaisceaux, est donnée au chapitre IV du livre d'O. Caramello
  "Theories, Sites, Toposes".

Une formule de calcul des topologies engendrées :

Théorème. – *Pour tout sous-objet* $D \hookrightarrow \Omega$ *c'est-à-dire toute application*

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & D(X) \\ \| & & \| \\ \text{objet de } \mathcal{C} & & \text{famille de cribles sur } X \end{array}$$

qui satisfait l'axiome de stabilité,
la topologie de Grothendieck J_D *de* $\mathcal{C}$ *engendrée par* D
est donnée par la formule

$$J_D = (D^r)^\ell \,.$$

Remarques :

- La théorie de Joyal présentée par Johnstone comprend une caractérisation de l'opérateur $D \longmapsto (D^r)^\ell$ dans le cadre des "topos élémentaires".
- La preuve de l'égalité $J_D = (D^r)^\ell$ dans le cadre des topos de préfaisceaux est donnée au chapitre IV du livre de Caramello.

Les principaux ingrédients de la démonstration :

- On sait déjà que les opérateurs

$$D \longmapsto D^{\ell} \quad \text{et} \quad D \longmapsto D^{r}$$

inversent la relation d'ordre,
donc on a pour tous $D_1 \leq D_2$ la relation d'ordre

$$(D_1^r)^{\ell} \leq (D_2^r)^{\ell} .$$

- Pour démontrer la formule, il suffit de prouver
les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) & \text{Pour tout sous-objet } D \hookrightarrow \Omega, \text{ on a la relation d'ordre} \quad D \leq (D^r)^{\ell}. \\ \\ (2) & \text{Pour tout sous-objet } D \hookrightarrow \Omega, \text{ le sous-objet} \quad D^{\ell} \hookrightarrow \Omega \\ & \text{est une topologie.} \\ \\ (3) & \text{Pour toute topologie} \quad J \hookrightarrow \Omega\,, \\ & \text{on a la propriété de point fixe} \quad (J^r)^{\ell} = J\,. \end{cases}$$

Explicitation de l'opérateur composé de Joyal :

Combinant les deux formules de définition des opérateurs

$$D \longmapsto D^\ell \quad \text{et} \quad D \longmapsto D^r \, ,$$

on obtient :

Lemme. –

Pour tout sous-objet $D \hookrightarrow \Omega$
et tout objet X *de* $\mathcal{C}$,
$(D^r)^\ell(X)$ *est l'ensemble des cribles* C *sur* X
tels que, pour tout morphisme $u : U \to X$,
un crible C' *sur* U *est le crible maximal si*

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{il contient } u^*(C), \\ \bullet \quad \text{pour tout morphisme } u' : U' \to U \\ \quad\;\; \text{on a} \quad u' \in C' \\ \quad\;\; \text{si } u'^*(C') \text{ contient au moins un crible sur } U' \\ \quad\;\; \text{qui est élément de } D(U'). \end{cases}$$

Vérification de l'inégalité (1) :

Lemme. – *Pour tout sous-objet $D \hookrightarrow \Omega$, on a la relation d'ordre*

$$D \leq (D^r)^\ell .$$

Démonstration. –

- Il s'agit de montrer que,
  pour tout objet X de $\mathcal{C}$, tout crible $C \in D(X)$,
  et tout morphisme $u : U \to X$,
  un crible C' sur U est le crible maximal si

$$\begin{cases} - & \text{il contient } u^*(C) \\ - & \text{pour tout morphisme } u' : U' \to U \\ & \text{on a } u' \in C' \\ & \text{si } u'^*(C') \text{ contient au moins un crible sur } U' \\ & \text{qui est élément de } D(U'). \end{cases}$$

- Or, pour tout crible C' sur U qui satisfait ces deux conditions,
  on a pour tout morphisme $u' : U' \to U$

$$u'^*(C') \geq u'^* \circ u^*(C) \in D(U')$$

  d'où $u' \in C'$.
- Cela signifie comme voulu que C' est le crible maximal.

Vérification de la propriété (2) : chaque D^ℓ est une topologie

Proposition. – *Pour tout sous-objet $D \hookrightarrow \Omega$, le sous-objet*

$$D^\ell \lhook\joinrel\longrightarrow \Omega$$

est une topologie.

Démonstration. –

- Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $D^\ell(X)$ est par définition l'ensemble des cribles C sur X tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } U \xrightarrow{u} X \text{ et tout } C' \in D(U) \\ \text{vérifiant } u^*(C) \leq C', \\ C' \text{ est nécessairement le crible maximal.} \end{array} \right.$$

- D^ℓ satisfait l'axiome de "maximalité" :
  En effet, si C est le crible maximal sur X
  la relation $\quad u^*(C) \leq C' \quad$ pour $\quad U \xrightarrow{u} X$
  implique que C' est le crible maximal sur U.

Vérification de ce que D^ℓ satisfait l'axiome de transitivité :

- Considérons un crible C sur un objet X de $\mathcal{C}$ et un crible $C' \in D^\ell(X)$ tel que, pour tout $(U \xrightarrow{u} X) \in C'$, on a
$$u^*(C) \in D^\ell(U)\,.$$
- Il faut prouver que $C \in D^\ell(X)$
c'est-à-dire que pour tout morphisme $u : U \to X$
et tout crible $S \in D(U)$, la relation d'ordre
$$u^*(C) \le S$$
implique que S est le crible maximal de U.
- On a $u^*(C') \in D^\ell(U)$.
Pour tout morphisme $(U' \xrightarrow{u'} U) \in u^*(C')$, on a
$u \circ u' \in C'$ avec $u'^*(S) \in D(U')$ et $(u \circ u')^*(C) \le u'^*(S)$.
- On en déduit que $u'^*(S)$ est le crible maximal de U', soit $u' \in S$.
- Autrement dit, on a $u^*(C') \le S$.
- Comme on a aussi par hypothèse $S \in D(U)$,
on conclut comme voulu que S est le crible maximal de U.

Vérification de la propriété (3) de fixité des topologies :

Proposition. – *Pour toute topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$ vue comme un sous-objet* $J \hookrightarrow \Omega$, *on a la propriété de point fixe*

$$J = (J^r)^\ell .$$

Démonstration. –

- On sait déjà que $J \leq (J^r)^\ell$.
- On est réduit à montrer que pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout crible $C \in (J^r)^\ell(X)$, on a nécessairement $C \in J(X)$.
- L'hypothèse $C \in (J^r)^\ell(X)$ signifie que, pour tout morphisme $u : U \to X$, un crible C' sur U est le crible maximal si
  - il contient $u^*(C)$,
  - il contient tout morphisme $u' : U' \to U$ tel que le crible $u'^*(C')$ de U' soit J-couvrant.

Fin de la démonstration :

- Autrement dit,
  l'hypothèse $\quad C \in (J^r)^\ell(X)$
  signifie que, pour tout morphisme $\quad u : U \to X$,
  un crible C' sur U est le crible maximal si

  $$\begin{cases} \bullet \quad \text{il contient } u^*(C), \\ \bullet \quad \text{il est } J\text{-fermé}. \end{cases}$$

- Cela signifie encore que, pour tout $\quad u : U \to X$,
  le crible

  $$u^*(C) \quad \text{sur} \quad U$$

  est J-couvrant.
- Donc on a comme annoncé

  $$C \in J(X)\,.$$

- Cela termine la preuve de la proposition,
  donc aussi du théorème.

Le cas des réunions de topologies :

- On considère une famille de topologies
$$J_i\,, \quad i \in I\,,$$
sur une petite catégorie $\mathcal{C}$.
- Posant pour tout objet X de $\mathcal{C}$
$$D(X) = \bigcup_{i \in I} J_i(X) \subseteq \Omega(X)\,,$$
on définit un sous-objet
$$D \hookrightarrow \Omega$$
que l'on peut noter simplement
$$D = \bigcup_{i \in I} J_i\,.$$
- On sait d'après le théorème précédent que
$$\bigvee_{i \in I} J_i = (D^r)^\ell\,.$$
- Nous allons expliciter D^r puis $(D^r)^\ell$ si
$$D = \bigcup_{i \in I} J_i\,.$$

Cribles fermés par rapport à une famille de topologies :

Lemme. – *Supposons que* $D = \bigcup_{i \in I} J_i$

pour des topologies J_i sur $\mathcal{C}$.
Alors, pour tout objet X de $\mathcal{C}$,

$$D^r(X)$$

est l'ensemble des cribles C sur X
qui sont fermés par rapport à chaque topologie J_i, $i \in I$.

Démonstration. –

- Par définition,
  $D^r(X)$ est l'ensemble des cribles C sur X
  tels que, pour n'importe quel morphisme $U \xrightarrow{u} X$, on a
  $$u \in C$$
  s'il existe $i \in I$ et $C' \in J_i(U)$ vérifiant
  $$C' \subseteq u^* C\,,$$
  soit $u \circ u' \in C$, $\forall\,(U' \xrightarrow{u'} U) \in C'$.
- Cela revient à demander que C soit J_i-fermé, pour tout $i \in I$.

Fermeture d'un crible par rapport à une famille de topologies :

Proposition. – *Soit une famille de topologies J_i, $i \in I$, sur $\mathcal{C}$. Alors :*

(i) *Pour tout crible C sur un objet X de $\mathcal{C}$ existe un plus petit crible $\overline{C}$, appelé la fermeture de C relativement aux J_i, qui*

$$\begin{cases} \bullet & \text{contienne } C, \\ \bullet & \text{soit fermé relativement à chaque } J_i,\ i \in I. \end{cases}$$

(ii) *Pour tout morphisme $U \xrightarrow{u} X$ de $\mathcal{C}$ et tout crible C sur X, on a*

$$\overline{u^*(C)} = u^*(\overline{C})\,.$$

Preuve. –

(i) Toute intersection de cribles J_i-fermés est J_i-fermée.

(ii) Le crible $u^*(\overline{C})$ contient $u^*(C)$ et il est fermé relativement à chaque J_i, $i \in I$. Donc on a

$$\overline{u^*(C)} \subseteq u^*(\overline{C})\,.$$

L'inclusion en sens inverse résulte de la description qui suit :

Description de la fermeture d'un crible :

Lemme. – *Soit une famille de topologies J_i, $i \in I$, sur $\mathcal{C}$.*
Soit un crible C sur un objet X de $\mathcal{C}$.
Alors la fermeture de C relativement aux J_i, $i \in I$,

$$\overline{C}$$

consiste en les morphismes

$$U \xrightarrow{u} X$$

tels qu'existe une famille de multicomposés

$$U_k \xrightarrow{u_k} U_{k-1} \xrightarrow{u_{k-1}} \cdots \longrightarrow U_1 \xrightarrow{u_1} U_0 = U$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- *Pour tout indice ℓ, $1 \leq \ell < k$, et tout composé partiel*
$$U_\ell \xrightarrow{u_\ell} U_{\ell-1} \xrightarrow{u_{\ell-1}} \cdots \longrightarrow U_1 \xrightarrow{u_1} U_0\,,$$
la famille des
$$U_{\ell+1} \xrightarrow{u_{\ell+1}} U_\ell$$
est J_i-couvrante pour au moins une topologie J_i, $i \in I$.
- *Tous les composés*
$$U_k \xrightarrow{u_k} U_{k-1} \xrightarrow{u_{k-1}} \cdots \longrightarrow U_1 \xrightarrow{u_1} U_0 = U \xrightarrow{u} X$$
sont éléments de C.

Description d'une réunion de topologies :

Corollaire. – *Soit une famille de topologies J_i, $i \in I$, sur $\mathcal{C}$. Soit*

$$C \longmapsto \overline{C}$$

l'opération de fermeture des cribles relativement aux J_i, $i \in I$.
Alors, pour tout objet X de $\mathcal{C}$,

$$\left(\bigvee_{i \in I} J_i\right)(X)$$

est l'ensemble des cribles C sur X tels que
$\overline{C}$ est le crible maximal sur X.

Démonstration. –

- Notant $D = \bigcup_{i \in I} J_i$, il résulte du théorème que
$$\left(\bigvee_{i \in I} J_i\right)(X) = (D^r)^\ell(X)$$
est l'ensemble des cribles C sur X
tels que, pour tout morphisme $U \xrightarrow{u} X$,
$\overline{u^*(C)}$ est le crible maximal de U.
- La conclusion résulte de la formule $\overline{u^*(C)} = u^*(\overline{C})$.

L'exemple des catégories produits :

- Considérons des petites catégories $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_k$ munies de topologies $J_1, \cdots, J_k$.
- On dispose de la catégorie produit $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$ dont les objets sont les familles d'objets de $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_k$
$$(X_1, \cdots, X_k)$$
et les morphismes
$$(U_1, \cdots, U_k) \longrightarrow (X_1, \cdots, X_k)$$
sont les familles de morphismes de $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_k$
$$(U_1 \xrightarrow{u_1} X_1, \cdots, U_k \xrightarrow{u_k} X_k)\,.$$
- Pour tout i, $1 \leq i \leq k$, on peut munir $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$ de la topologie encore notée J_i pour laquelle un crible sur un objet
$$(X_1, \cdots, X_k)$$
est couvrant s'il contient une famille de la forme
$$(\mathrm{id}_{X_1}, \cdots, \mathrm{id}_{X_{i-1}}, u_i, \mathrm{id}_{X_{i+1}}, \cdots, \mathrm{id}_{X_k})$$
où les $U_i \xrightarrow{u_i} X_i$ forment une famille J_i-couvrante de X_i.

La notion de topologie produit :

On considère donc des petites catégories

$$\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_k$$

munies de topologies

$$J_1, \cdots, J_k$$

et la catégorie produit

$$\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$$

munies des topologies induites

$$J_1, \cdots, J_k \, .$$

Définition. – *Avec ces notations, la topologie*

$$J_1 \vee \cdots \vee J_k$$

sur $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$ *peut être appelée*

la "topologie produit" des J_i, $1 \leq i \leq k$,

et notée

$$J_1 \times \cdots \times J_k \, .$$

Explicitation de la topologie produit :

On considère toujours des petites catégories $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_k$
munies de topologies $J_1, \cdots, J_k$
et les topologies induites $J_1, \cdots, J_k$ sur $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$.

Corollaire. – *Soit*

$$C \longmapsto \overline{C}$$

l'opérateur qui associe à tout crible

C sur un objet $(X_1, \cdots, X_k)$ de $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$

le plus petit crible

$\overline{C}$ contenant C

qui soit fermé relativement aux topologies $J_1, \cdots, J_k$.
Alors un crible

C sur $(X_1, \cdots, X_k)$

est couvrant pour la topologie produit $J_1 \times \cdots \times J_k$ si et seulement si

le crible $\overline{C}$

est maximal.

Relation avec les produits d'espaces topologiques :

- Considérons le cas où
$$\mathcal{C}_1 = O(X_1), \cdots, \mathcal{C}_k = O(X_k)$$
sont les catégories des ouverts non vides d'espaces topologiques $X_1, \cdots, X_k$.
- Alors
$$\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$$
est la sous-catégorie pleine de la catégorie
$$O(X_1 \times \cdots \times X_k) \quad \text{des ouverts de} \quad X_1 \times \cdots \times X_k$$
constituée des objets qui sont des produits d'ouverts non vides.
- Par construction de la topologie de l'espace produit
$$X_1 \times \cdots \times X_k$$
la sous-catégorie pleine
$$\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k \hookrightarrow O(X_1 \times \cdots \times X_k)$$
est dense.

Corollaire. – *Le topos des faisceaux sur l'espace produit* $X_1 \times \cdots \times X_k$ *s'identifie au topos des faisceaux sur la catégorie*
$$O(X_1) \times \cdots \times O(X_k)$$
munie de la topologie induite par celle de $O(X_1 \times \cdots \times X_k)$.

Espaces topologiques produits et topologies produits :

- On considère des espaces topologiques $X_1, \cdots, X_k$ et leurs catégories d'ouverts non vides $O(X_1), \cdots, O(X_k)$ munies de leurs topologies canoniques $J_1, \cdots, J_k$.
- Un crible sur un objet
$$U_1 \times \cdots \times U_k \quad \text{de} \quad O(X_1) \times \cdots \times O(X_k) \hookrightarrow O(X_1 \times \cdots \times X_k)$$
est un sous-ensemble $C \subseteq O(U_1) \times \cdots \times O(U_k)$ qui contient tout élément de $O(U_1) \times \cdots \times O(U_k)$ plus petit qu'un élément de C.
- Un tel crible C est J_i-fermé s'il contient tout élément
$$U_1' \times \cdots \times U_k'$$
tel que U_i' soit recouvert par des ouverts U_i'' qui vérifient la propriété que les
$$U_1' \times \cdots \times U_{i-1}' \times U_i'' \times U_{i+1}' \times \cdots \times U_k' \qquad \text{soient éléments de } C.$$
- On note $C \longmapsto \overline{C}$ l'opérateur qui associe à tout crible C sur un objet $U_1 \times \cdots \times U_k$ le plus petit crible contenant C qui soit J_i-fermé pour tout i, $1 \leq i \leq k$.

Comparaison de la topologie produit et de la topologie du produit :

On considère toujours des espaces topologiques $X_1, \cdots, X_k$
et les topologies canoniques $J_1, \cdots, J_k$
sur les catégories d'ouverts non vides $O(X_1), \cdots, O(X_k)$.

Proposition. –

(i) *La topologie produit* $J_1 \times \cdots \times J_k$ *sur*

$$O(X_1) \times \cdots \times O(X_k) \hookrightarrow O(X_1 \times \cdots \times X_k)$$

est contenue dans la topologie induite par celle de l'espace topologique produit $X_1 \times \cdots \times X_k$.

(ii) *Elle lui est égale si* $k-1$ *des* k *espaces* $X_1, \cdots, X_k$ *sont localement compacts.*

Remarque. – On rappelle qu'un espace topologique X
est "localement compact" si
tout ouvert U de X
s'écrit comme une réunion d'ouverts $V \subseteq U$
dont les adhérences $\overline{V} \subseteq U$ sont des espaces compacts.

Application à une caractérisation “sans points” de la topologie sur un espace produit :

Corollaire. – *Considérons des espaces topologiques* $X_1, \cdots, X_k$ *qui sont “localement compacts”, sauf peut-être l'un d'eux.*
Soit J la topologie sur le produit des catégories d'ouverts non vides

$$O(X_1) \times \cdots \times O(X_k) \hookrightarrow O(X_1 \times \cdots \times X_k)$$

qui est induite par la topologie canonique de $X_1 \times \cdots \times X_k$.
Alors un crible

$$C \text{ sur un objet } U_1 \times \cdots \times U_k \text{ de } O(X_1) \times \cdots \times O(X_k)$$

est couvrant si et seulement si

$$\overline{C} = \left\{ \begin{array}{c} \text{plus petit crible contenant } C \\ \text{qui soit fermé relativement à} \\ \text{la topologie canonique } J_i \text{ de chaque facteur } O(X_i) \end{array} \right\}$$

est le crible maximal.

Démonstration de l'identité des deux topologies :

(i) Il est évident que la topologie $J_1 \times \cdots \times J_k$ sur $O(X_1) \times \cdots \times O(X_k)$ est contenue dans celle induite par le plongement

$$O(X_1) \times \cdots \times O(X_k) \hookrightarrow O(X_1 \times \cdots \times X_k)\,.$$

(ii)

- Pour l'inclusion en sens inverse, il suffit de traiter le cas d'un produit de deux espaces X et Y tels que X soit localement compact.
- Il suffit de montrer que si C est un crible de $X \times Y$ qui est couvrant au sens ordinaire, alors $\overline{C}$ est le crible maximal.
- Soit U un ouvert de X tel que $\overline{U}$ soit compact et y un élément de Y.
  Pour tout $x \in \overline{U}$ existe dans C un objet $U_x \times V_x$ avec $x \in U_x$ et $y \in V_x$.
  L'espace compact $\overline{U}$ est recouvert par les U_x donc par une famille finie $U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}$.
  Posant $V_y = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, le crible C contient les $U_{x_i} \times V_y$, donc le crible $\overline{C}$ contient $U \times V_y$.
- Donc $\overline{C}$ contient $U \times Y$.
- On conclut que $\overline{C}$ contient $X \times Y$ puisque X est réunion d'ouverts U tels que $\overline{U}$ soit compact.

Un théorème de déduction en logique géométrique :

Nous allons donner l'application suivante
de la formule de calcul des topologies engendrées :

Théorème (Caramello). –
Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de signature Σ.
Soient φ et ψ deux formules géométriques sans variable libre dans la signature Σ.
Supposons que l'implication sans variable libre

$$\top \vdash \psi$$

est démontrable dans la théorie quotient de $\mathbb{T}$ définie en ajoutant l'axiome

$$\top \vdash \varphi \,.$$

Alors l'implication

$$\varphi \vdash \psi$$

est démontrable dans la théorie $\mathbb{T}$.

Remarque. – La réciproque est évidente.

Traduction géométrique du théorème :

- On considère

  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{T}} =$ catégorie syntactique géométrique de $\mathbb{T}$,
  $J = J_{\mathbb{T}} =$ topologie syntactique de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$,
  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})}_{J_{\mathbb{T}}} =$ topos classifiant de $\mathbb{T}$,
  muni du foncteur canonique

  $$\ell : \mathcal{C} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{C}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{C}}_J = \mathcal{E}$$

  qui est pleinement fidèle.

- La formule $\top$ définit l'objet terminal 1 de $\mathcal{C}$
  et les formules sans variable libre φ et ψ
  définissent deux sous-objets

  $$m \hookrightarrow 1 \quad \text{et} \quad n \hookrightarrow 1\,.$$

- L'implication

  $$\varphi \vdash \psi$$

  est démontrable dans $\mathbb{T}$
  si et seulement si le monomorphisme

  $$m \wedge n \hookrightarrow m$$

  est J-couvrant.

Forme topologique du théorème de déduction :

- Considérons une catégorie cartésienne essentiellement petite $\mathcal{C}$ et son objet terminal 1.
- Pour un sous-objet $m \hookrightarrow 1$,
  notons J_m la topologie de $\mathcal{C}$ qu'il engendre :
  un crible C d'un objet X est J_m-couvrant
  si et seulement si il contient le monomorphisme
  $$m \times_1 X \hookrightarrow X\,.$$
- On est réduit à démontrer :

Théorème. – *Dans les conditions ci-dessus, considérons encore*
un sous-objet $n \hookrightarrow 1$,
une topologie J sur $\mathcal{C}$.

Alors le monomorphisme
$$m \wedge n \hookrightarrow m$$
est J-couvrant si (et seulement si) le monomorphisme
$$n \hookrightarrow 1$$
est couvrant pour la topologie engendrée par J et J_m.

Les opérateurs d'implication entre sous-objets dans les topos :

Afin de démontrer le théorème topologique précédent,
on a besoin des opérateurs d'implication dans les topos :

Proposition. – *Soit $\mathcal{E}$ un topos.*

(i) *Pour tous sous-objets S_1 et S_2 d'un objet E de $\mathcal{E}$ existe un unique sous-objet*

$$(S_1 \Rightarrow S_2) \hookrightarrow E$$

caractérisé par la propriété que, pour tout sous-objet $S \hookrightarrow E$, on a

$$S \leq (S_1 \Rightarrow S_2)$$

si et seulement si

$$S \wedge S_1 \leq S_2 \,.$$

(ii) *Pour tout morphisme $E' \xrightarrow{e} E$ de $\mathcal{E}$ et pour tous sous-objets S_1 et S_2 de E, on a*

$$e^{-1}(S_1 \Rightarrow S_2) = (e^{-1}S_1 \Rightarrow e^{-1}S_2)$$

en notant e^{-1} le foncteur d'image réciproque

$$(S \hookrightarrow E) \longmapsto (S \times_E E' \hookrightarrow E') \,.$$

Démonstration du théorème topologique :

- On suppose connues l'existence des opérateurs d'implication $\Rightarrow$ et leur compatibilité avec les images réciproques.
- Soit C le crible de l'objet terminal 1 de $\mathcal{C}$

  constitué des morphismes $X \xrightarrow{p} 1$
  tels que $\ell(p)$ se factorise à travers le sous-faisceau

$$(\ell(m) \Rightarrow \ell(n)) \lhook\joinrel\longrightarrow \ell(1)\,.$$

- Nous allons démontrer les propriétés suivantes du crible C :

$$\begin{cases} (1) & \text{Le monomorphisme } n \hookrightarrow 1 \text{ est élément de } C. \\ (2) & \text{Le crible } C \text{ est } J\text{-fermé.} \\ (3) & \text{Le crible } C \text{ est } J_m\text{-fermé.} \end{cases}$$

- Ces propriétés et la formule de calcul des topologies engendrées impliquent que, si $n \hookrightarrow 1$ est couvrant pour la topologie $J \vee J_m$, alors C est le crible maximal de l'objet 1 de $\mathcal{C}$.
- Autrement dit, on a

$$\ell(m) \leq \ell(n)$$

  qui signifie comme voulu que

$$m \wedge n \lhook\joinrel\longrightarrow m \qquad \text{est } J\text{-couvrant.}$$

Vérification des propriétés du crible des implications :

Le crible C de l'objet terminal 1 de $\mathcal{C}$ défini par le sous-faisceau

$$(\ell(m) \Rightarrow \ell(n)) \hookrightarrow \ell(1)$$

possède les propriétés suivantes:

(1) Il contient le monomorphisme $n \hookrightarrow 1$.
En effet, on a l'inclusion

$$\ell(m) \wedge \ell(n) \leq \ell(n) .$$

(2) Il est J-fermé.
Cela résulte de ce qu'il est défini par un sous-préfaisceau de $\ell(1)$ qui est un faisceau pour la topologie J.

(3) Il est J_m-fermé.
En effet, pour tout morphisme $X \xrightarrow{p} 1$
tel que $m \times_1 X \hookrightarrow X \xrightarrow{p} 1$ est dans C,
$\ell(m \times_1 X) \hookrightarrow \ell(X)$ se factorise à travers

$$(\ell(m \times_1 X) \Rightarrow \ell(n \times_1 X)) \hookrightarrow \ell(X)$$

ce qui signifie $\ell(m \times_1 X) \leq \ell(n \times_1 X)$
soit $p^*(\ell(m) \Rightarrow \ell(n)) = \ell(X)$ et $(X \xrightarrow{p} 1) \in C$.

Retour sur les opérateurs d'implication :

- La démonstration du théorème de déduction
  et de sa variante topologique qui l'implique
  sera complète si l'on prouve que :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{Pour tout objet } E \text{ d'un topos } \mathcal{E} \text{ existe un opérateur d'implication } \Rightarrow \\ & \text{entre sous-objets de } E. \\ \text{(ii)} & \text{Cet opérateur est respecté par le foncteur} \\ & \text{d'image réciproque des sous-objets} \\ & \text{défini par un morphisme } e : E' \to E \text{ de } \mathcal{E}. \end{cases}$$

- Pour (i), le foncteur d'intersection avec un sous-objet $S_1 \hookrightarrow E$

$$S \longmapsto S \wedge S_1$$

  admet un adjoint à droite

$$S_2 \longmapsto (S_1 \Rightarrow S_2)$$

  car il respecte les colimites.
  En effet, pour tout sous-objet $S_2 \hookrightarrow E$
  et si S' décrit la famille des sous-objets de E tels que

$$S' \wedge S_1 \leq S_2\,,$$

  leur réunion $(S_1 \Rightarrow S_2)$ satisfait encore l'inégalité

$$(S_1 \Rightarrow S_2) \wedge S_1 \leq S_2\,.$$

Opérateurs d'implication et images réciproques :

- Considérant un morphisme d'un topos $\mathcal{E}$ $\quad e : E' \longrightarrow E$
et deux sous-objets S_1, S_2 de E, on doit vérifier que

$$e^{-1}(S_1 \Rightarrow S_2) = (e^{-1}S_1 \Rightarrow e^{-1}S_2)\,.$$

- On peut supposer que $\quad \mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}_J$
est le topos des faisceaux sur un site $(\mathcal{C}, J)$,
donc s'écrit comme un sous-topos d'un topos de préfaisceaux

$$\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}_J \xhookrightarrow{(j^*, j_*)} \widehat{\mathcal{C}}\,.$$

- Comme j^* et j_* respectent les limites finies
et $j^* \circ j_*$ s'identifie au foncteur id de $\widehat{\mathcal{C}}_J$,
on a pour tous sous-objets S_1, S_2 de tout objet E de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}_J$

$$(S_1 \Rightarrow S_2) = j^*(j_* S_1 \Rightarrow j_* S_2)\,.$$

- Cela réduit la vérification au cas où

$\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}$ est le topos des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$.

- Si $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{C}}$, on a la formule en tout objet X de $\mathcal{C}$

$$(S_1 \Rightarrow S_2)(X) = \left\{ \begin{array}{c} x \in E(X) \mid \forall\, (U \xrightarrow{u} X) = \text{ morphisme de } \mathcal{C}, \\ E(u)(x) \in S_2(U) \cup (E(U) - S_1(U)) \end{array} \right\}.$$