De l'utilité des mathématiques pour comprendre la dynamique des épidémies

par Laurent Lafforgue (IHÉS)

L'épidémie de covid a vu les pays occidentaux réagir bien moins vite que les pays d'Extrême-Orient comme le Vietnam, Taïwan, la Corée du Sud ou même la Chine alors que, contrairement aux autres pays, celle-ci a été surprise puisque frappée en premier. Or la rapidité de réaction est un facteur encore plus important que les capacités de test et de traçage pour contenir une épidémie et limiter le nombre final des victimes.

Il semble que les décideurs et la population aient eu un plus grand sentiment d'urgence en Extrême-Orient qu'en Occident grâce à une meilleure compréhension de la dynamique d'une épidémie fondée sur des mathématiques de base : la notion de proportionnalité (ce que l'on appelait autrefois la « règle de trois »), l'idée que le nombre de nouvelles contaminations est grosso modo proportionnel à celui des personnes contagieuses, sa conséquence qui est que ces nombres croissent « géométriquement », la compréhension que ce qui importe dans une progression géométrique n'est pas ses premières valeurs mais leur coefficient d'expansion.

Ce coefficient dépend du fameux R_0, le nombre moyen de personnes que chaque personne infectée contamine à son tour, mais aussi du temps moyen entre deux contaminations. Il est plus important que le R_0. Il pouvait être estimé dès la fin janvier par les statistiques publiques chinoises, avant d'être confirmées par celles de l'Italie puis des autres pays occidentaux à partir de la fin février. La nature « géométrique » de la progression d'une épidémie signifie que chaque intervalle de temps de retard dans la réaction multiplie le nombre final des victimes par ce coefficient.

L'explication que je donne ici n'est pas un argument d'autorité émanant d'un « sachant ». Elle est fondée sur un raisonnement et des mathématiques de base compréhensibles au plus grand nombre. Les mathématiques qui sont (ou devraient) être enseignées au collège et au lycée ne sont pas seulement ni d'abord un moyen d'obtenir de bonnes notes. Elles permettent d'analyser des aspects essentiels de la réalité et peuvent par exemple sauver d'innombrables vies en situation d'épidémie.

Le constat qu'en Occident les décideurs et les faiseurs d'opinion n'ont manifestement pas fait ces estimations élémentaires, ou ne les ont pas assez prises au sérieux, en dit long sur les déficiences de l'enseignement de base, particulièrement de celui des mathématiques, en France et dans les autres pays occidentaux depuis des décennies.

0. Mathématiques de base et covid

Les mathématiques élémentaires de niveau lycée ou fin du collège permettent en effet de se faire une idée de la progression des épidémies. Avant qu'elles n'atteignent une partie importante de la population, c'est une progression dite « géométrique » ou « exponentielle ».

Dans le cas de l'épidémie de Covid, l'examen des statistiques de mortalité du Covid en Chine puis dans les principaux pays occidentaux montre que l'ampleur de l'épidémie était multipliée par au moins 10 tous les dix jours, autrement dit par au moins 2 tous les trois jours.

Cette dynamique a été interrompue par les mesures de distanciation sociale et de confinement mais le nombre des morts de la première vague que nous avons connue est grosso modo proportionnel au niveau atteint par l'épidémie au moment où ces mesures ont été prises.

Cela signifie que si ces mesures avaient été prises 10 jours plus tôt, nous aurions aujourd'hui seulement quelques milliers de morts au lieu de dizaines de milliers. Si elles avaient été prises 3 jours plus tôt, nous aurions environ 2 fois moins de morts.

En revanche, si ces mesures avaient été prises 10 jours plus tard, nous aurions aujourd'hui des centaines de milliers de morts.

Nous ne savons pas encore si le « dé-confinement » a ramené, ou non, le coefficient de progression de l'épidémie au-dessus de 1. S'il s'avérait qu'il était au-dessus de 1, il faudrait prendre le plus vite possible des nouvelles mesures de distanciation sociale et de confinement au moins partiel de façon à ne pas démultiplier le nombre de morts de la « deuxième vague ».

Pour une meilleure compréhension du lecteur, j'ai choisi d'expliquer en deux fois cette estimation élémentaire, une première fois de manière informelle, puis de manière plus précise et explicite.

I. Estimation informelle

Une bonne approximation de la dynamique des épidémies avant qu'elles ne commencent à approcher de la saturation, c'est-à-dire n'affectent une partie importante de la population, est fondée sur une idée simple : chaque jour, le nombre de nouvelles contaminations est proportionnel au nombre des personnes contagieuses ce jour-là, autrement dit celles qui ont été contaminées quelques jours auparavant. Il est en effet naturel de penser que si par exemple 10 personnes contagieuses en contaminent 30 autres, alors 50 personnes contagieuses en contaminent 150, 100 personnes contagieuses en contaminent 300, etc. Ce principe ne commence à s'écarter de la réalité que lorsqu'une partie de plus en plus importante de la population a déjà contracté la maladie et, en principe, ne peut plus la contracter à nouveau.

Supposons par exemple que lorsqu'une personne est contaminée, elle contamine 3 autres individus 5 jours plus tard. Dans la réalité, ces nombres ne sont jamais fixes : le temps pour devenir contagieux varie d'une personne à l'autre, le nombre de personnes contaminées par une personne contagieuse varie également et elles ne le sont pas toutes le même jour. Mais on obtient une approximation raisonnable en remplaçant ces variables par leurs valeurs moyennes. Donc supposons que ces variables soient fixes et valent les nombres indiqués.

Cela implique que pour tout multiple 5N de 5, le nombre de personnes contaminées après 5N jours est multiplié par le produit 3^N de 3 par lui-même N fois.

Par exemple, le nombre de personnes contaminées est multiplié par $3^2 = 9$ au bout de 5 + 5 = 10 jours, par $9^3 = 729 > 700$ au bout de 10 + 10 + 10 = 30 jours c'est-à-dire un mois, et par $729^2 > 500\,000$ au bout de deux mois.

Les progressions qui vérifient cette loi (chaque valeur est le produit de la précédente par un facteur constant) sont appelées en mathématiques les « suites géométriques » ou « exponentielles ».

La dynamique d'une épidémie avant qu'elle ne commence à approcher de la saturation suit une telle loi exponentielle. Elle est caractérisée par le nombre de jours qu'il faut par exemple pour obtenir un doublement du nombre des contaminés ou un décuplement. Comme le nombre des morts est naturellement proportionnel à celui des contaminés (avec un décalage dans le temps puisqu'une victime de l'épidémie meurt un certain temps après avoir été contaminée), il revient au même d'évaluer les temps de doublement ou de décuplement des nombres de morts.

Comme les pays occidentaux n'ont pas fait de tests systématiques, leurs statistiques des nombres de contaminés sont très peu fiables. En revanche, leurs statistiques des nombres de morts sont certainement plus fiables.

De plus, il vaut mieux considérer les progressions des nombres totaux de morts comptabilisés jusqu'à chaque jour, plutôt que celles des nombres de morts jour par jour, car elles sont statistiquement plus stables. Elles doivent d'ailleurs suivre la même loi exponentielle.

Toujours pour éviter les aléas statistiques, il faut considérer ces progressions quand elles sortent de la zone des cas isolés, disons au-delà de la valeur 10.

Examinons donc les temps de décuplement dans différents pays occidentaux, avant que les mesures de confinement ou de réduction drastique des contacts rapprochés aient pu faire sentir leurs effets (ces statistiques sont tirées du site https://www.worldometers.info/coronavirus/) :

- Italie : 12 morts au 26 février, 148 morts au 5 mars, 1809 morts au 15 mars.
- Espagne : 10 morts au 7 mars, 133 morts au 13 mars, 1381 morts au 21 mars.
- France : 16 morts au 7 mars, 175 morts au 17 mars, 1995 morts au 27 mars.
- Royaume Uni : 10 morts au 13 mars, 115 morts au 18 mars, 1161 morts au 27 mars.
- Allemagne : 9 morts au 14 mars, 94 morts au 22 mars, 931 morts au 1er avril.
- Etat de New York : 10 morts au 15 mars, 100 morts au 20 mars, 1019 morts au 27 mars.

Autrement dit, on obtient le tableau suivant :

- Italie : multiplication par 12 en 9 jours puis à nouveau par 12 en 10 jours.
- Espagne : multiplication par 13 en 6 jours puis par 10 en 8 jours.
- France : multiplication par 11 en 10 jours puis à nouveau par 11 en 10 jours.
- Royaume-Uni : multiplication par 11 en 5 jours puis par 10 en 9 jours.
- Allemagne : multiplication par 10 en 8 jours puis à nouveau par 10 en 10 jours.
- Etat de New York : multiplication par 10 en 5 jours puis à nouveau par 10 en 7 jours.

On constate que le temps de multiplication par 10, propre à l'épidémie de Covid avant que ne soient prises des mesures de lutte contre la contagion, est d'à peine 10 jours. Ce fait apparaissait déjà dans les statistiques publiques chinoises de la fin janvier : 25 morts au 23 janvier et 259 morts au 31 janvier, soit une multiplication par 10 en 8 jours.

Rappeler les nombres de morts du covid comptabilisés dans les différents pays aux dates de début des confinements permet de comprendre dans quelle mesure chaque pays a été plus ou moins rapide à réagir :

Chine : confinement progressif entre le 22 janvier (17 morts) et le 25 janvier (56 morts).
Italie : confinement progressif entre le 8 mars (366 morts) et le 10 mars (631 morts).
Espagne : confinement progressif entre le 13 mars (133 morts) et le 15 mars (342 morts).
France : confinement le 17 mars (175 morts).
Royaume-Uni : confinement le 24 mars (508 morts).
Allemagne : confinement progressif entre le 16 mars (17 morts) et le 22 mars (94 morts).
Etat de New York : confinement le 23 mars (290 morts).

On voit que selon ces statistiques, la Chine a été la plus rapide, suivie de l'Allemagne, suivie de la France, de l'Espagne et de l'État de New York, suivis de l'Italie (qui a été la première frappée en Europe) et du Royaume-Uni. On constate que cet ordre est celui des nombres de victimes plus de deux mois plus tard, lesquels sont de plus relativement proportionnels aux nombres de morts aux dates de confinement. Les écarts par rapport à une proportionnalité plus parfaite s'expliquent principalement par le fait que le confinement n'a pas été le même partout : il a été plus strict en Italie et en Espagne qu'en France, et plus strict aussi dans la province du Hubei (épicentre de l'épidémie en Chine) qu'en Allemagne.

Cela signifie que si l'Italie, l'Espagne, la France, le Royaume-Uni ou l'État de New York avaient pris 10 jours plus tard les mesures qu'ils ont prises pour interrompre la progression exponentielle de l'épidémie, ils auraient déjà chacun plusieurs centaines de milliers de morts.

Pour la même raison, si le confinement avait été décidé 10 jours plus tôt, c'est-à-dire en France le 6 mars, nous aurions aujourd'hui seulement quelques milliers de morts au lieu de dizaines de milliers. Quant au niveau restant de contamination, il serait au moins dix fois inférieur et bien moins d'efforts seraient encore requis pour éradiquer le Covid.

Malheureusement, le covid est toujours présent et nous devons tous continuer à faire barrage à sa circulation. Il suffirait que les contacts rapprochés dans la population retrouvent un niveau élevé pendant quelques semaines pour que, un mois ou deux plus tard, nos pays se retrouvent avec des centaines de milliers de morts.
On peut toujours espérer que le Covid devienne moins contagieux lorsque les températures se relèvent, mais le constat que l'épidémie fait rage au Brésil ou au Mexique incite à la plus grande prudence.

II. Estimation plus précise et explicite de la dynamique des épidémies :

Cette estimation recourt seulement aux notions de multiplication (notée .), de division (notée /), de puissances successives d’un entier r^n = « r puissance n » = produit de r facteurs égaux à n = produit de r par lui-même n fois, d'addition + et de soustraction -, plus des approximations de bon sens.

La seule formule employée est $1 + r + r^2 + ... + r^n = (r^{n+1} – 1) / (r – 1)$.

Enfin, il faut se rendre compte que les puissances r^n grandissent très vite si $r > 1$ (par exemple $2^{10} = 1024 > 1000$), et décroissent très vite vers 0 si $r < 1$ (par exemple $(1/2)^{10} < 0{,}001$).

Principes de l’estimation :

On suppose que chaque personne contaminée en contamine d'autres exactement N jours après avoir été elle-même contaminée. Dans la pratique, ce temps varie d'une personne à l'autre et, de plus, une personne déjà contaminée peut en contaminer d'autres en des jours différents mais on obtient une approximation raisonnable en remplaçant cette variable par sa valeur moyenne.

Divisons alors le temps en intervalles dont chacun compte exactement N jours et que l'on numérote par les entiers n : intervalle 0, intervalle 1, ... , intervalle n, etc…
L'intervalle 0 est celui où l'épidémie commence.

Puis notons C(n) le nombre de personnes contaminées pendant l'intervalle n, et r(n) le quotient de C(n+1) par C(n) c'est-à-dire le nombre moyen de personnes que chaque personne contaminée pendant l'intervalle n a contaminées à son tour.

Le nombre r(n) dépend de la contagiosité du germe infectieux, des habitudes sociales de la population et de la proportion de la population qui peut être contaminée. Si le germe infectieux est plus ou moins contagieux suivant les saisons, il peut varier au cours de l'année. Il peut aussi varier si la population modifie ses habitudes sociales : ainsi, il diminue si des mesures de distanciation sociale ou de confinement sont mises en oeuvre par les pouvoirs publics ou de manière volontaire par la population. Enfin, il diminue si la proportion de la population qui ne peut plus être infectée s'accroît, soit parce qu'elle a déjà été infectée et est devenue immunisée, soit grâce à une campagne de vaccination.

Cependant, si la proportion des personnes contaminées n'est pas trop grande, il est raisonnable de penser que r(n) ne dépend pas du nombre C(n) de personnes contaminées dans l'intervalle n. Cela revient à supposer que le nombre C(n+1) = r(n). C(n) de personnes contaminées dans l'intervalle n+1 est proportionnel au nombre C(n) de personnes contaminées dans l'intervalle n.

De cette hypothèse résultent deux conséquences :

Premières conséquences de l'hypothèse de proportionnalité :

(**1**) Pour tous entiers n et m, on a C(n+k) = r(n,k) . C(n) avec r(n,k) = r(n) . r(n+1) ... r(n+k-1).

Autrement dit, le nombre C(n+k) de personnes contaminées dans l'intervalle n+k est proportionnel au nombre C(n) de personnes contaminées dans l'intervalle n.

(**2**) De plus, le nombre C(n) + C(n+1) + ... + C(n+m) = [1 + r(n,1) + ... + r(n,m)] . C(n) des personnes contaminées entre les intervalles n et n+m est lui aussi proportionnel au nombre des personnes contaminées dans l'intervalle n.

Conséquences plus précises lorsque le coefficient de proportionnalité est supposé constant :

Supposons qu'entre les intervalles n et n+m, le coefficient de proportionnalité r(n) est resté constant égal à une valeur r.

Alors :

(**1'**) Pour tout k compris entre 0 et m, le nombre r(n,k) est égal à r^k = le produit de k facteurs tous égaux à r = le produit de r par lui-même k fois.

Les C(n+k) = r^k . C(n) forment ce que l'on appelle une « suite géométrique » de coefficient multiplicatif r : ils sont les produits des puissances successives de r et d'une constante. Ils décroissent rapidement vers 0 si r < 1 et deviennent de plus en plus grands si r > 1.

(**2'**) Le coefficient [1 + r(n,1) + ... + r(n,m)] est égal au quotient (r^{m+1} - 1)/(r-1), si bien que la somme C(n) + ... + C(n+m) vaut [r . C(n+m) - C(n)] / (r-1).

Si r < 1, ce coefficient s'approche rapidement de 1/(1-r) lorsque m devient grand. Et donc le nombre total des personnes contaminées à partir de l'intervalle n s'approche de C(n) / (1-r).

Si, au contraire, r > 1, ce coefficient est très proche de r^{m+1} /(r-1) = r^m . r/(r-1) et donc le nombre total des personnes contaminées entre les intervalles n et m est très proche de r^m . r/(r-1) . C(n) = r/(r-1) . C(n+m).

Autrement dit, il ressemble lui aussi à l'expression d'une suite géométrique de coefficient multiplicatif r.

On déduit de ces considérations :

Conséquences lorsque le coefficient de proportionnalité est réduit par l’action humaine :

Supposons que dans les intervalles 0 à n, l'épidémie suive une dynamique caractérisée par un coefficient de croissance constant r(k) = r > 1 pour tout k < n, puis que des mesures de distanciation sociale et de confinement soient introduites à partir de l'intervalle n, permettant d'obtenir que r(k) = r' <1 pour tout k au moins égal à n.

Alors :

(**1**) On a $C(k) = r^k . C(0)$ pour tout k inférieur ou égal à n et $C(k) = r'^{(k-n)} . C(n)$ pour tout k supérieur ou égal à n.

(**2**) Le nombre total des contaminés dans les intervalles 0 à n+m est égal à la somme de $C(0) . (r^n - 1)/(r-1) = [C(n) - C(0)] / (r-1)$ et de $C(n) . (r'^{m+1} - 1)/(r'-1)$ et il est donc proche de $C(n) . [1/(r-1) + 1/(1-r')]$.

Conclusion :

A peu de chose près, le nombre total des contaminés est proportionnel au nombre des contaminés dans l'intervalle n où a été instauré le confinement.

Comme le nombre des morts est le produit du nombre des contaminés par le taux de mortalité (que l'on peut supposer constant), le nombre total des morts est proportionnel au nombre des contaminés dans l'intervalle n où a été instauré le confinement.

Si on retarde le confinement de k intervalles de temps, le nombre total des morts est multiplié par r^k.

Si au contraire on avance le confinement de k intervalles de temps, le nombre total des morts est divisé par r^k.

Application au cas de l'épidémie de Covid :

Les statistiques des morts du covid en Chine ou dans les principaux pays occidentaux (avant que les mesures de confinement produisent leurs effets) rapportées dans la première partie montrent que, pour des intervalles de dix jours, r est partout un peu supérieur à 10.

Comme $2^{10} = 1024$ est presque égal à $10^3 = 1000$, c'est presque équivalent à prendre r = 2 pour des intervalles de trois jours.

Ainsi, le nombre total de morts aurait été divisé ou multiplié par 10 si la date du confinement avait été avancée ou retardée de 10 jours.

Il aurait été divisé ou multiplié par 2 si la date du confinement avait été avancée ou retardée de 3 jours.

L'Allemagne a 4 fois moins de morts que l'Italie, non pas parce qu'elle aurait fait plus de tests (en fait les nombres de tests dans les deux pays sont très proches), mais parce que le hasard a fait que l'épidémie y a démarré plus tard et que, relativement au développement de l'épidémie dans chaque pays, l'Allemagne a pris des mesures de distanciation et de confinement environ 6 jours plus tôt que l'Italie.

Perspective d'avenir :

La sortie du confinement amène plus de contacts rapprochés, mais à un niveau quand même inférieur à ce qu'il était avant le confinement puisque la plupart des gens restent plus prudents.

Ces nouveaux comportements se traduisent par un troisième coefficient de progression r'' qui est évidemment plus petit que le coefficient r d'avant le confinement mais plus grand que le coefficient r' de pendant le confinement.

La question cruciale est de savoir s'il est plus petit ou plus grand que 1.

S'il est plus grand que 1, il y aura une nouvelle vague de morts et il faudra prendre de nouvelles mesures de distanciation sociale et de confinement au moins partiel. Dans ce cas, le nombre de morts de la deuxième vague sera proportionnel au nombre des contaminations dans l'intervalle où seront prises ces nouvelles mesures permettant de ramener à nouveau le coefficient de progression au-dessous de 1. Si le moment de cette décision était retardé de k intervalles, le nombre de morts de la deuxième vague serait multiplié par r''^{k}.