De l'utilité des mathématiques pour comprendre la dynamique des épidémies

par Laurent Lafforgue (IHÉS)

II. Estimation plus précise et explicite de la dynamique des épidémies :

Cette estimation recourt seulement aux notions de multiplication (notée .), de division (notée /), de puissances successives d'un entier r^n = « r puissance n » = produit de r facteurs égaux à n = produit de r par lui-même n fois, d'addition + et de soustraction -, plus des approximations de bon sens.

La seule formule employée est $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = (r^{n+1} - 1) / (r - 1)$.

Enfin, il faut se rendre compte que les puissances r^n grandissent très vite si $r > 1$ (par exemple $2^{10} = 1024 > 1000$), et décroissent très vite vers 0 si $r < 1$ (par exemple $(1/2)^{10} < 0{,}001$).

Principes de l'estimation :

On suppose que chaque personne contaminée en contamine d'autres exactement N jours après avoir été elle-même contaminée. Dans la pratique, ce temps varie d'une personne à l'autre et, de plus, une personne déjà contaminée peut en contaminer d'autres en des jours différents mais on obtient une approximation raisonnable en remplaçant cette variable par sa valeur moyenne.

Divisons alors le temps en intervalles dont chacun compte exactement N jours et que l'on numérote par les entiers n : intervalle 0, intervalle 1, ... , intervalle n, etc…
L'intervalle 0 est celui où l'épidémie commence.

Puis notons C(n) le nombre de personnes contaminées pendant l'intervalle n, et r(n) le quotient de C(n+1) par C(n) c'est-à-dire le nombre moyen de personnes que chaque personne contaminée pendant l'intervalle n a contaminées à son tour.

Le nombre r(n) dépend de la contagiosité du germe infectieux, des habitudes sociales de la population et de la proportion de la population qui peut être contaminée. Si le germe infectieux est plus ou moins contagieux suivant les saisons, il peut varier au cours de l'année. Il peut aussi varier si la population modifie ses habitudes sociales : ainsi, il diminue si des mesures de distanciation sociale ou de confinement sont mises en oeuvre par les pouvoirs publics ou de manière volontaire par la population. Enfin, il diminue si la proportion de la population qui ne peut plus être infectée s'accroît, soit parce qu'elle a déjà été infectée et est devenue immunisée, soit grâce à une campagne de vaccination.

Cependant, si la proportion des personnes contaminées n'est pas trop grande, il est raisonnable de penser que r(n) ne dépend pas du nombre C(n) de personnes contaminées dans l'intervalle n. Cela revient à supposer que le nombre C(n+1) = r(n). C(n) de personnes contaminées dans l'intervalle n+1 est proportionnel au nombre C(n) de personnes contaminées dans l'intervalle n.

De cette hypothèse résultent deux conséquences :

Premières conséquences de l’hypothèse de proportionnalité :

(**1**) Pour tous entiers n et m, on a C(n+k) = r(n,k) . C(n) avec r(n,k) = r(n) . r(n+1) ... r(n+k-1).

Autrement dit, le nombre C(n+k) de personnes contaminées dans l'intervalle n+k est proportionnel au nombre C(n) de personnes contaminées dans l'intervalle n.

(**2**) De plus, le nombre C(n) + C(n+1) + ... + C(n+m) = [1 + r(n,1) + ... + r(n,m)] . C(n) des personnes contaminées entre les intervalles n et n+m est lui aussi proportionnel au nombre des personnes contaminées dans l'intervalle n.

Conséquences plus précises lorsque le coefficient de proportionnalité est supposé constant :

Supposons qu'entre les intervalles n et n+m, le coefficient de proportionnalité r(n) est resté constant égal à une valeur r.

Alors :

(**1**’) Pour tout k compris entre 0 et m, le nombre r(n,k) est égal à r^k = le produit de k facteurs tous égaux à r = le produit de r par lui-même k fois.

Les C(n+k) = r^k . C(n) forment ce que l'on appelle une « suite géométrique » de coefficient multiplicatif r : ils sont les produits des puissances successives de r et d’une constante. Ils décroissent rapidement vers 0 si r < 1 et deviennent de plus en plus grands si r > 1.

(**2**’) Le coefficient [1 + r(n,1) + ... + r(n,m)] est égal au quotient (r^{m+1} - 1)/(r-1), si bien que la somme C(n) + ... + C(n+m) vaut [r . C(n+m) - C(n)] / (r-1).

Si r < 1, ce coefficient s'approche rapidement de 1/(1-r) lorsque m devient grand. Et donc le nombre total des personnes contaminées à partir de l'intervalle n s'approche de C(n) / (1-r).

Si, au contraire, r > 1, ce coefficient est très proche de r^{m+1} /(r-1) = r^m . r/(r-1) et donc le nombre total des personnes contaminées entre les intervalles n et m est très proche de r^m . r/(r-1) . C(n) = r/(r-1) . C(n+m).

Autrement dit, il ressemble lui aussi à l'expression d'une suite géométrique de coefficient multiplicatif r.

On déduit de ces considérations :

Conséquences lorsque le coefficient de proportionnalité est réduit par l’action humaine :

Supposons que dans les intervalles 0 à n, l'épidémie suive une dynamique caractérisée par un coefficient de croissance constant $r(k) = r > 1$ pour tout $k < n$, puis que des mesures de distanciation sociale et de confinement soient introduites à partir de l'intervalle n, permettant d'obtenir que $r(k) = r' <1$ pour tout k au moins égal à n.

Alors :

(**1**) On a $C(k) = r^k . C(0)$ pour tout k inférieur ou égal à n et $C(k) = r'^{(k-n)} . C(n)$ pour tout k supérieur ou égal à n.

(**2**) Le nombre total des contaminés dans les intervalles 0 à n+m est égal à la somme de $C(0) . (r^n - 1)/(r-1) = [C(n) - C(0)] / (r-1)$ et de $C(n) . (r'^{m+1} - 1)/(r'-1)$ et il est donc proche de $C(n) . [1/(r-1) + 1/(1-r')]$.

Conclusion :

A peu de chose près, le nombre total des contaminés est proportionnel au nombre des contaminés dans l'intervalle n où a été instauré le confinement.

Comme le nombre des morts est le produit du nombre des contaminés par le taux de mortalité (que l'on peut supposer constant), le nombre total des morts est proportionnel au nombre des contaminés dans l'intervalle n où a été instauré le confinement.

Si on retarde le confinement de k intervalles de temps, le nombre total des morts est multiplié par r^k.

Si au contraire on avance le confinement de k intervalles de temps, le nombre total des morts est divisé par r^k.

Application au cas de l'épidémie de Covid :

Les statistiques des morts du covid en Chine ou dans les principaux pays occidentaux (avant que les mesures de confinement produisent leurs effets) rapportées dans la première partie montrent que, pour des intervalles de dix jours, r est partout un peu supérieur à 10.

Comme $2^{10} = 1024$ est presque égal à $10^3 = 1000$, c'est presque équivalent à prendre r = 2 pour des intervalles de trois jours.

Ainsi, le nombre total de morts aurait été divisé ou multiplié par 10 si la date du confinement avait été avancée ou retardée de 10 jours.

Il aurait été divisé ou multiplié par 2 si la date du confinement avait été avancée ou retardée de 3 jours.

L'Allemagne a 4 fois moins de morts que l'Italie, non pas parce qu'elle aurait fait plus de tests (en fait les nombres de tests dans les deux pays sont très proches), mais parce que le hasard a fait que l'épidémie y a démarré plus tard et que, relativement au développement de l'épidémie dans chaque pays, l'Allemagne a pris des mesures de distanciation et de confinement environ 6 jours plus tôt que l'Italie.

Perspective d'avenir :

La sortie du confinement amène plus de contacts rapprochés, mais à un niveau quand même inférieur à ce qu'il était avant le confinement puisque la plupart des gens restent plus prudents.

Ces nouveaux comportements se traduisent par un troisième coefficient de progression r" qui est évidemment plus petit que le coefficient r d'avant le confinement mais plus grand que le coefficient r' de pendant le confinement.

La question cruciale est de savoir s'il est plus petit ou plus grand que 1.

S'il est plus grand que 1, il y aura une nouvelle vague de morts et il faudra prendre de nouvelles mesures de distanciation sociale et de confinement au moins partiel. Dans ce cas, le nombre de morts de la deuxième vague sera proportionnel au nombre des contaminations dans l'intervalle où seront prises ces nouvelles mesures permettant de ramener à nouveau le coefficient de progression au-dessous de 1. Si le moment de cette décision était retardé de k intervalles, le nombre de morts de la deuxième vague serait multiplié par r''^k.