Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires*

par Laurent Lafforgue

Dans tout le texte, on considère un groupe réductif connexe quasi-déployé G sur un corps global F, le groupe réductif complexe $\widehat{G}$ dual de G muni de l'action naturelle du groupe de Galois Γ_F de F, et une représentation de transfert continue

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \,.$$

On sait que le groupe réductif G et la représentation de transfert ρ sont non ramifiés en presque toute place et que, en toute telle place x, ρ induit une application de transfert $(\rho_x)_*$ de l'ensemble des représentations lisses admissibles irréductibles non ramifiées π_x de G vers celles π'_x de GL_r.

Langlands a conjecturé que pour toute représentation automorphe $\pi = \bigotimes\limits_x \pi_x$ de G, il existe une représentation automorphe $\pi' = \bigotimes\limits_x \pi'_x$ de GL_r telle que $\pi'_x = (\varphi_x)_*(\pi_x)$ en toute place x où G, ρ et π sont non ramifiées. C'est le "principe de fonctorialité".

Le but de cet article est d'introduire les énoncés de "formules de Poisson non linéaires" sur les groupes réductifs G qui généralisent la classique formule de Poisson sur les espaces linéaires matriciels M_r et qui sont équivalents au principe de fonctorialité.

Ces formules sont associées à toute représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

d'un groupe réductif quasi-déployé G sur F muni d'un caractère $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$ tel que le cocaractère central associé

$$\widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{G}$$

agisse sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par $z \mapsto z$.

On montre qu'une telle représentation de transfert ρ permet de définir en toute place un certain opérateur linéaire de ρ-transformation de Fourier d'un certain espace de fonctions locales sur G qui dépend lui-même de ρ.

En faisant le produit sur toutes les places, on obtient un opérateur linéaire de ρ-transformation de Fourier global d'un certain espace de fonctions globales sur G qui dépend lui-même de ρ.

* Je remercie notre secrétaire Cécile Gourgues qui a réalisé la frappe de ces notes à la perfection et avec une incroyable rapidité. Ces notes ont fait l'objet d'un cours donné à Milan en décembre 2012 puis à l'IHES en janvier et février 2013. Elles ont également servi de base à deux cours donnés au Japon (à l'Université de Kyushu et à l'Université Todai de Tokyo) en mai 2013 ainsi qu'à un double exposé donné au séminaire Takagi les 25 et 26 mai 2013.

La formule de Poisson associée consiste à affirmer qu'une certaine fonctionnelle linéaire de cet espace construite à partir de l'évaluation

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$$

est invariante par ρ-transformation de Fourier.

Le transfert des représentations automorphes de G à GL_r via ρ conjecturé par Langlands implique la formule de Poisson pour la ρ-transformation de Fourier sur G.

En sens inverse, la formule de Poisson sur le groupe

$$G_{r-1} = \{(g, g') \in G \times \mathrm{GL}_{r-1} \mid \det_G(g) = \det(g')\}$$

permet de construire des "noyaux du transfert" de G à GL_r, c'est-à-dire des fonctions automorphes sur le produit

$$G \times G \times \mathrm{GL}_r$$

qui réalisent le transfert simultané de toutes les représentations automorphes.

On remarque que l'énoncé des "formules de Poisson non linéaires" et la construction associée de "noyaux du transfert" ne font plus appel à la notion de représentation automorphe.

On traite le cas où le corps global F est le corps des fonctions rationnelles d'une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. On note $|F|$ l'ensemble des places de F, F_x le corps localisé de F en chaque place $x \in |F|$, O_x son anneau des entiers, $q_x = q^{\deg(x)}$ le nombre d'éléments de son corps résiduel et

$$|\bullet|_x = q_x^{-v_x(\bullet)} : F_x \to q_x^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

la norme de F_x. On note également

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$$

l'anneau des adèles de F, $\mathbb{A}^\times$ son groupe multiplicatif et

$$|\bullet| = \prod_{x \in |F|} |\bullet|_x : \mathbb{A}^\times \to q^{\mathbb{Z}}$$

la norme globale, qui vérifie la "formule du produit"

$$|\gamma| = 1\,, \quad \forall\, \gamma \in F^\times \subset \mathbb{A}^\times\,.$$

Comme toutes les constructions et démonstrations ne font appel qu'à de l'analyse harmonique sur les groupes réductifs locaux $G(F_x)$, $x \in |F|$, et adéliques $G(\mathbb{A})$, le cas où le corps global F est un corps de nombres se traiterait de la même façon. Cela sera montré dans un texte plus complet (en préparation) qui reprendra avec plus de détails l'ensemble des constructions de cet article.

Voici le plan de cet article :

Le paragraphe I rappelle l'énoncé de la conjecture de transfert de Langlands d'un groupe réductif quasi-déployé G vers un groupe linéaire GL_r, définit la notion de "noyau du transfert" et esquisse la construction de tels noyaux.

Le paragraphe II met en relation la construction de ces noyaux du transfert avec la théorie des intégrales de Rankin-Selberg et, se fondant sur les équations fonctionnelles locales de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika, introduit naturellement des opérateurs linéaires locaux qui généralisent la transformation de Fourier linéaire sur les espaces M_r de matrices.

Le paragraphe III montre comment la conjecture de transfert de Langlands implique une formule de Poisson très générale pour les fonctions globales très ramifiées en au moins une place.

Le paragraphe IV montre en sens inverse comment terminer la construction de noyaux du transfert en supposant connue la formule de Poisson pour les fonctions globales sur G_{r-1} très ramifiées en au moins une place.

Enfin, le paragraphe V indique comment formuler les "formules de Poisson non linéaires" pour les fonctions globales sur G qui ne sont pas nécessairement très ramifiées en une place. Cela passe par une reformulation purement multiplicative de la formule de Poisson linéaire classique sur l'espace matriciel M_r. L'expression multiplicative de la fonctionnelle de Poisson linéaire et de ses généralisations non linéaires donnée dans cet article corrige une expression erronée qui figurait dans [Lafforgue, 2012] et dans une version préliminaire du présent article.

Sommaire

I. Notion de noyaux du transfert et construction de leur partie principale

Le groupe réductif quasi-déployé G sur F est dit non ramifié en une place $x \in |F|$ si l'action du groupe de Galois local $\Gamma_{F_x} \subset \Gamma_F$ sur la donnée radicielle $(X_T, \Delta_B, X_T^\vee, \Delta_B^\vee)$ ou, ce qui revient au même, sur le groupe dual $\widehat{G}$ se factorise à travers son quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ dont un générateur topologique est l'élément de Frobenius σ_x. Dans ce cas, le groupe réductif G sur F_x se prolonge en un schéma en groupes réductifs lisse sur O_x et on dispose du sous-groupe ouvert compact maximal $G(O_x)$ de $G(F_x)$.

En une telle place x, la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est dite non ramifiée si l'homomorphisme induit $\Gamma_{F_x} \to \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ se factorise à travers le quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} = \langle \sigma_x \rangle$ de Γ_{F_x}. On sait qu'alors ρ induit un homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

de l'algèbre de Hecke sphérique

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r = C_c(\mathrm{GL}_r(O_x)\backslash \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x))$$

de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ vers celle

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = C_c(G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x))$$

de $G(F_x)$. Ces algèbres sont commutatives, et l'homomorphisme ρ_x^* transforme tout caractère $z_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}$ de la seconde en un caractère $(\rho_x)_*(z_x) = z_x \circ \rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathbb{C}$ de la première.

On sait que le groupe réductif quasi-déployé G sur F et la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ sont non ramifiés en toutes les places $x \in |F|$ sauf un ensemble fini que l'on note S_ρ.

Posons :

Définition I.1. –

Soit un sous-ensemble fini S de $|F|$ contenant S_ρ.

(i) *Étant donnée une famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C} \qquad \textit{[resp. } z'_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathbb{C}\textit{]}$$

indexés par les places $x \in |F| - S$, une fonction automorphe non nulle

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \qquad \textit{[resp. } \varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\textit{]}$$

est dite vecteur propre de valeurs propres les z_x [resp. z'_x] pour l'action par convolution des algèbres de Hecke sphériques $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ [resp. $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$] si, en toute place $x \in |F| - S$, φ [resp. φ'] est invariante à droite par $G(O_x)$ [resp. $\mathrm{GL}_r(O_x)$] et vérifie

$$\varphi * \varphi_x = z_x(\varphi_x) \cdot \varphi\,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G\,,$$

$$\textit{[resp. } \varphi' * \varphi'_x = z'_x(\varphi'_x) \cdot \varphi'\,, \quad \forall\, \varphi'_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\textit{]}.$$

(ii) *Une fonction automorphe non nulle*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \qquad \textit{[resp. } \varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\textit{]}$$

est dite "S-propre" si elle satisfait les conditions de (i) *relativement à une certaine famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C} \quad \textit{[resp. } z'_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C}\textit{]}, \quad x \in |F| - S\,.$$

(iii) *Une famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C} \quad \textit{[resp. } z'_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C}\textit{]}$$

indexés par les places $x \in |F| - S$ est dite automorphe si elle satisfait les conditions de (i) *relativement à une certaine fonction automorphe "S-propre" $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ [resp. $\varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$].*

□

Le principe de fonctorialité de Langlands peut être formulé de la manière suivante :

Conjecture I.2 (conjecture de transfert par ρ). –

Pour toute partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ, et pour toute famille de caractères $(z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C})_{x\in|F|-S}$ qui est automorphe, sa transformée $(z_x \circ \rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C})_{x\in|F|-S}$ par ρ est encore automorphe.

On introduit la notion de noyau du transfert :

Définition I.3. –

Soit une partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ.

On appelle "noyau" (ou "S-noyau") du transfert automorphe par ρ toute fonction automorphe en 3 variables $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in G(\mathbb{A})$

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

(i) *En toute place $x \in |F| - S$, K est invariante à droite par $G(O_x) \times G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(O_x)$. En notant $*_1, *_2$ et $*_3$ les produits de convolution en les 3 variables $g_1, g_2 \in G(F_x)$ et $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, K est compatible avec $\rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ au sens que*

$$K *_3 \varphi'_x = K *_2 \rho^*_x(\varphi'_x)\,, \quad \forall\, \varphi'_x \in \mathcal{H}^r_{x,\emptyset}\,,$$

et elle est compatible avec l'automorphisme $\varphi_x \mapsto \varphi^\vee_x$ de $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ défini par le changement de variable $g_1 \mapsto g_1^{-1}$ au sens que

$$K *_2 \varphi_x = K *_1 \varphi^\vee_x\,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}\,.$$

(ii) *Pour toute fonction automorphe S-propre*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

l'intégrale

$$(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$$

est absolument convergente quels que soient les éléments $g_2 \in G(\mathbb{A})$, $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et définit une fonction automorphe $(G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$.

□

On remarque :

Lemme I.4. –

Pour démontrer la conjecture de transfert I.2 *ci-dessus, il suffit de prouver que, pour toute fonction automorphe S-propre*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

il existe un S-noyau du transfert

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

tel que l'intégrale

$$(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} dg_1 \cdot \varphi_1(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$$

ne soit pas uniformément nulle. □

On choisit une fois pour toutes un caractère additif non trivial

$$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times\,.$$

On sait que les caractères additifs continus $\mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$ sont exactement les

$$\psi_\gamma : u \mapsto \psi(\gamma \cdot u)$$

associés aux éléments $\gamma \in F$.

Notant $N_r \subset \mathrm{GL}_r$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes, on s'intéresse aux caractères de $N_r(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $N_r(F)$. Ce sont exactement les composés

$$\psi_\ell : N_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

de l'homomorphisme de groupes algébriques

$$\begin{array}{rcl} N_r & \to & N_r/[N_r, N_r] = (\mathbb{A}^1)^{r-1} \\ u = (u_{i,j})_{1 \le i,j \le r} & \mapsto & (u_{i,i+1})_{1 \le i < r}\,, \end{array}$$

d'une forme linéaire définie sur F

$$\ell : (\mathbb{A}^1)^{r-1} \to \mathbb{A}^1$$

et du caractère $\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$. Un tel caractère ψ_ℓ est dit régulier lorsque les $r-1$ coordonnées de ℓ sont non nulles, et irrégulier dans le cas contraire. On note $\psi_{(r)}$ le caractère régulier dont les $r-1$ coordonnées valent 1.

Une fonction invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$

$$W : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \quad [\text{resp. } \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}\,,\ x \in |F|]$$

est dite "de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker" si

$$W(ug) = \psi_{(r)}(u) \cdot W(g)\,, \quad \forall\, g\,, \forall\, u \in N_r(\mathbb{A}) \quad [\text{resp. } N_r(F_x)]\,.$$

Notant

$$Q_r = \mathrm{GL}_{r-1} \cdot N_r = N_r \cdot \mathrm{GL}_{r-1} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

le sous-groupe "mirabolique" supérieur, on rappelle le résultat suivant de Shalika :

Proposition I.5. –

(i) *L'opérateur*

$$H \mapsto W_{(r)}^{\psi} H = \left[g \mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} du \cdot \psi_{(r)}^{-1}(u) \cdot H(ug) \right]$$

définit une projection de l'espace des fonctions invariantes à droite par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$

$$H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sur l'espace des fonctions de $\psi_{(r)}$*-type de Whittaker* $W : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$.

(ii) *Cet opérateur* $W_{(r)}^{\psi}$ *admet pour section, c'est-à-dire pour inverse à droite, l'opérateur*

$$W \mapsto \left[g \mapsto \sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W(\delta g) \right].$$

(iii) *L'image de cette section est le sous-espace des fonctions* $H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ *qui sont cuspidales au sens que leurs coefficients unipotents*

$$g \mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} du \cdot \psi_{\ell}^{-1}(u) \cdot H(ug)$$

associés aux caractères irréguliers $\psi_{\ell} : N_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^{\times}$ *sont uniformément nuls.*

Remarque :

Il résulte de cette proposition que toute fonction localement constante

$$H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

s'écrit de manière unique comme la somme

$$H = H^c + H^{nc}$$

d'une fonction $H^c : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ qui est cuspidale et d'une fonction $H^{nc} : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ non cuspidale au sens que

$$W_{(r)}^{\psi} H^{nc} = 0\,.$$

Cela s'applique en particulier aux fonctions $H : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ mais leurs composantes $H^c, H^{nc} : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ ne sont en général pas invariantes par $\mathrm{GL}_r(F)$.

□

On cherche à construire des noyaux

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

comme sommes de leur composante cuspidale

$$K^c : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et de leur composante non cuspidale

$$K^{nc} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

De plus, construire K^c équivaut à construire le $\psi_{(r)}$-coefficient unipotent

$$W^{\psi}_{(r)} K = W^{\psi}_{(r)} K^c : (G \times G \times N_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, .$$

Étant données une partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ et une fonction automorphe S-propre $\varphi : G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, il suffit que l'intégrale $(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot W^{\psi}_{(r)} K(g_1, g_2, g)$ ne soit pas uniformément nulle pour qu'il en soit de même de l'intégrale $(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$. Cette condition sera facile à réaliser si, dans le but de construire des noyaux $K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, on commence par construire leur coefficient $W^{\psi}_{(r)} K$ de la manière suivante :

Définition I.6. –

Soit S une partie finie de $|F|$ contenant S_ρ.

On définit les $\psi_{(r)}$-coefficients unipotents

$$W^{\psi}_{(r)} K : G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \times G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

des noyaux cherchés K comme des sommes localement finies de la forme

$$W^{\psi}_{(r)} K(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x \in |F|} K^{G,\rho}_{\psi_x} \right) (g_1^{-1} \gamma \, g_2, g) \, ,$$

où les facteurs locaux

$$K^{G,\rho}_{\psi_x} \, , \quad x \in |F| \, ,$$

sont des fonctions localement constantes

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (g, g') & \mapsto & K^{G,\rho}_{\psi_x}(g, g') \end{array}$$

telles que

- *en toute place $x \in |F|$, les fonctions $K^{G,\rho}_{\psi_x}(\bullet, g')$ sont à support compact dans $G(F_x)$ et les fonctions $K^{G,\rho}_{\psi_x}(g, \bullet)$ sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ sont de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker,*
- *en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, $K^{G,\rho}_{\psi_x}$ est un "noyau local" du transfert non ramifié par ρ : cela signifie que $K^{G,\rho}_{\psi_x}$ est invariante à gauche et à droite par $G(O_x)$ en la variable $g \in G(F_x)$, invariante à droite par $\mathrm{GL}_r(O_x)$ en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$ et compatible avec l'homomorphisme*

  $$\rho_x^* : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$$

  au sens que

  $$K^{G,\rho}_{\psi_x} *_2 \varphi'_x = K^{G,\rho}_{\psi_x} *_1 \rho^*_x(\varphi'_x) \, , \quad \forall \, \varphi'_x \in \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \, .$$

Remarque :

La dernière condition sur $K^{G,\rho}_{\psi_x}$ équivaut à demander que sa décomposition spectrale sous la double action par convolution à droite de $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ et $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$ ne fasse apparaître que des paires de caractères ($z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C}$, $z'_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C}$) reliés par la condition

$$z'_x = z_x \circ \rho^*_x = (\rho_x)_*(z_x) \, .$$

$\square$

Afin de construire des noyaux locaux du transfert non ramifié

$$K^{G,\rho}_{\psi_x} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions de la définition I.6 ci-dessus en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, on a besoin de préciser la forme des homomorphismes

$$\rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}\,, \quad x \in |F| - S_\rho\,,$$

et pour cela de rappeler l'isomorphisme de Satake. À cette fin, on choisit une fois pour toutes un tore maximal T défini sur F du groupe réductif quasi-déployé G et on note $\mathfrak{S}_G = \{g \in G \mid g^{-1}\,Tg = T\}/T$ le groupe de Weyl de G.

Proposition I.7. –

Soit x une place en laquelle le groupe quasi-déployé G est non ramifié, et soit $\mathfrak{S}^x_G = \{w \in \mathfrak{S}_G \mid \sigma_x(w) = w\}$ le groupe de Weyl F_x-rationnel de G.

Soient T^d_x le plus grand sous-tore de T qui est déployé sur F_x, $\widehat{T}^d_x$ son tore complexe dual muni de l'action de $\mathfrak{S}^x_G$, et $\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x$ le plus grand sous-tore réel compact de $\widehat{T}^d_x$.

Alors :

(i) *Il existe un isomorphisme, appelé isomorphisme de Satake,*

$$S^G_x : \mathcal{H}^G_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{T}^d_x]^{\mathfrak{S}^x_G}$$

si bien que les caractères de l'algèbre commutative $\mathcal{H}^G_x$ sont associés aux éléments de $\widehat{T}^d_x$, modulo l'action du groupe fini $\mathfrak{S}^x_G$.

(ii) *Pour tout élément $\lambda \in \widehat{T}^d_x$, il existe une unique fonction*

$$\varphi^G_{x,\lambda} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

telle que

$$\varphi^G_{x,\lambda} * \varphi_x = \varphi_x * \varphi^G_{x,\lambda} = S^G_x(\varphi_x)(\lambda) \cdot \varphi^G_{x,\lambda}\,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}\,,$$

et

$$\varphi^G_{x,\lambda}(1) = 1\,.$$

(iii) *Il existe une unique mesure $d\lambda$ sur $\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x$, appelée la mesure de Plancherel, telle que pour tout $\varphi_x \in \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$, on ait*

$$\varphi_x(g) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot S^G_x(\varphi_x)(\lambda) \cdot \varphi^G_{x,\lambda}(g)\,, \quad \forall\, g \in G(F_x)\,.$$

□

Si $T_r = \mathbb{G}^r_m$ désigne le tore maximal de GL_r et $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ son tore dual, on dispose de même en toute place $x \in |F|$ de l'isomorphisme de Satake sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$

$$S^r_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r}\,.$$

Passons maintenant aux homomorphismes ρ^*_x en les places $x \in |F| - S_\rho$:

Lemme I.8. –

Quitte à remplacer la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par une représentation conjuguée, supposons – ce que nous ferons toujours désormais – qu'elle induit un homomorphisme entre tores maximaux

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r\,.$$

En une place non ramifiée arbitraire $x \in |F| - S_\rho$, notons e_x l'ordre de l'élément de Frobenius σ_x agissant sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Alors :

(i) *Le dual* $\widehat{T}_x^d$ *de* T_x^d *s'identifie au quotient de* $\widehat{T}$ *par le sous-tore* $\{\lambda \cdot \sigma_x(\lambda^{-1}) \mid \lambda \in \widehat{T}\}$, *si bien que l'homomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{T} & \to & \widehat{T}_r \\ \lambda & \mapsto & \rho_T(\lambda \cdot \sigma_x(\lambda) \dots \sigma_x^{e_x - 1}(\lambda)) \end{array}$$

définit un homomorphisme

$$\rho_{T,x} : \widehat{T}_x^d \to \widehat{T}_r \, .$$

(ii) *Il est possible d'ordonner la famille*

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x^1, \dots, \varepsilon_x^r) \in (\mathbb{C}^\times)^r$$

des r *valeurs propres de* σ_x *agissant sur* $\mathbb{C}^r$, *de telle façon que l'homomorphisme d'algèbres*

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \, ,$$

vu comme un homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$$

vérifie

$$\rho_x^*(p_x)(\lambda^{e_x}) = p_x(\varepsilon_x \cdot \rho_{T,x}(\lambda)) \, , \quad \forall\, \lambda \in \widehat{T}_x^d \, , \quad \forall\, p_x \in \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} \, .$$

□

En toute place $x \in |F|$ et pour tout caractère $\lambda' \in \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$, il existe une unique fonction de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x} : \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}$$

telle que

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x} * \varphi_x' = S_x^r(\varphi_x')(\lambda') \cdot W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x}$$

et

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x}\left(\begin{pmatrix} \gamma_x^{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \gamma_x & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

pour n'importe quel élément $\gamma_x \in F_x^\times$ de valuation $v_x(\gamma_x)$ égale au conducteur N_{ψ_x} de la composante ψ_x de ψ en x.

On a :

Proposition I.9. –

En toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, *les noyaux locaux du transfert non ramifié au sens de la définition* I.6

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}$$

sont exactement les fonctions de la forme

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda^{e_x} \cdot p_x(\lambda^{e_x}) \cdot \varphi_{x,\lambda^{e_x}}^G(g) \cdot W_{x,\varepsilon_x \cdot \rho_{T,x}(\lambda)}^{r,\psi_x}(g')$$

pour un certain polynôme symétrique $p_x \in \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$.

Remarque :

Pour que le produit infini $\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}$ ait un sens comme fonction sur $(G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$, on demande que $p_x = 1$ en presque toute place $x \in |F| - S$. $\square$

Notons $\mu_G : \mathbb{G}_m \to Z_G \subset G$ le cocaractère central de G bien défini sur F qui correspond au caractère $\widehat{\mu}_G : \widehat{G} \to \mathbb{C}^\times$ composé de $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et du déterminant.

On remarque :

Corollaire I.10. –

Soit

$$\omega_\rho : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

le caractère automorphe d'ordre fini qui correspond, via la théorie du corps de classes, au caractère

$$\Gamma_F \to \mathbb{C}^\times$$

composé de $\Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et du déterminant.

Alors, en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, les noyaux locaux du transfert non ramifié

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

vérifient la condition

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Remarque :

Il est naturel de demander à la suite de ce corollaire – et nous le ferons toujours désormais – que, en toutes les places $x \in |F|$ sans exception, les facteurs $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ de la définition I.6 vérifient la même condition

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Démonstration du corollaire :

La conclusion résulte de ce que, en toute place $x \in |F| - S_\rho$, le produit $\varepsilon_x^1 \dots \varepsilon_x^r$ des r composantes de $\varepsilon_x = (\varepsilon_x^1, \dots, \varepsilon_x^r)$ est égal au déterminant de σ_x agissant sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. En effet, $\varepsilon_x = (\varepsilon_x^1, \dots, \varepsilon_x^r)$ est la famille des r valeurs propres de cette action.

$\square$

Étant donnée une famille de fonctions locales

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,,$$

vérifiant toutes les conditions que nous avons énoncées, le $\psi_{(r)}$-coefficient unipotent

$$\begin{aligned} W_{(r)}^\psi K : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \quad &\to \quad \mathbb{C} \\ (g_1, g_2, g) \quad &\mapsto \quad \sum_{\gamma\in G(F)} \left(\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g_1^{-1}\gamma\, g_2, g) \end{aligned}$$

correspond à une fonction cuspidale

$$\begin{array}{rcl} K^c = K_\psi^{G,\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C} \\ (g_1, g_2, g) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^\psi K(g_1, g_2, \delta g) \end{array}$$

qui, en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, est compatible avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x \mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$.

Conjecture I.11. –

Si en chaque place $x \in S$, la fonction locale

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

vérifient certaines conditions qui dépendent de la restriction de ρ en $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, il est possible de construire une fonction

$$K^{nc} = K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est non cuspidale au sens que

$$W_{(r)}^\psi K^{nc} = 0\,,$$

est compatible avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x \mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x \in |F| - S$, et telle que la somme

$$K^{G,\rho} = K = K^c + K^{nc} = K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho}$$

soit invariante à gauche par $\mathrm{GL}_r(F)$ et définisse un S-noyau du transfert par ρ. □

Dans le but d'essayer de prouver cette conjecture, on introduit comme dans la théorie des "théorèmes réciproques" (voir [Cogdell, Piatetski-Shapiro]) les matrices de permutation en rang r

$$w_r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad w_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_r = w_r\, w_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et le sous-groupe mirabolique inférieur

$$Q_r^{\mathrm{op}} = (\alpha_r^{-1} N_r\, \alpha_r) \cdot \mathrm{GL}_{r-1} = \mathrm{GL}_{r-1} \cdot (\alpha_r^{-1} N_r\, \alpha_r) = \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Remarquant que

$$(\alpha_r^{-1} N_r\, \alpha_r) \cap \mathrm{GL}_{r-1} = N_{r-1}\,,$$

on forme la somme

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{(r-1)}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^\psi K(g_1, g_2, \alpha_r\, \delta g)\,.$$

La fonction ainsi définie sur $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ est compatible avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x \mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x \in |F| - S$, et elle est invariante à gauche par $(G \times G \times Q_r)(F)$.

La conjecture suivante implique la précédente :

Conjecture I.12. –

Sous les hypothèses de la conjecture I.11, *il est possible de construire deux fonctions complémentaires*

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

toutes deux compatibles avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x \mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x \in |F| - S$, et telles que $K_\psi^{\overline{G},\rho}$ soit non cuspidale, et

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_\psi^{G,\rho} + \widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}\,.$$

Remarque :

L'implication résulte de ce que $\mathrm{GL}_r(F)$ est engendré par ses sous-groupes $Q_r(F)$ et $Q_r^{\mathrm{op}}(F)$. $\square$

II. Intégrales de Rankin-Selberg, facteurs L locaux et transformation de Fourier

Rappelons qu'on part d'une fonction localement constante

$$W^{\psi}_{(r)}K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

de la forme

$$(g_1, g_2, g) \mapsto W^{\psi}_{(r)}K(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x \in |F|} K^{G,\rho}_{\psi_x} \right) (g_1^{-1} \gamma \, g_2, g) \, .$$

Les facteurs locaux $K^{G,\rho}_{\psi_x}$ en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$ sont des noyaux du transfert non ramifié. Le produit $\left(\prod_{x \in |F|} K^{G,\rho}_{\psi_x} \right) (\bullet, \bullet)$ est à supports compacts dans $G(\mathbb{A})$ en la première variable et de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ en la seconde variable, et il vérifie

$$\left(\prod_{x \in |F|} K^{G,\rho}_{\psi_x} \right) (g, zg') = \left(\prod_{x \in |F|} K^{G,\rho}_{\psi_x} \right) (\mu_G(z) g, g') \cdot \omega_\rho(z) \, , \quad \forall \, z \in \mathbb{A}^\times \, .$$

On cherche à comparer les deux fonctions sommes sur $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$

$$K^{G,\rho}_{\psi}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W^{\psi}_{(r)}K(g_1, g_2, \delta g) \, ,$$

$$\widetilde{K}^{G,\rho}_{\psi}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W^{\psi}_{(r)}K(g_1, g_2, \alpha_r \, \delta g) \, ,$$

et, si possible, à construire deux fonctions complémentaires

$$K^{\overline{G},\rho}_{\psi} : (G \times G \times Q_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, ,$$

$$\widetilde{K}^{\overline{G},\rho}_{\psi} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, ,$$

vérifiant l'égalité $K^{G,\rho}_{\psi} + K^{\overline{G},\rho}_{\psi} = \widetilde{K}^{G,\rho}_{\psi} + \widetilde{K}^{\overline{G},\rho}_{\psi}$.

Dans ce but, on considère une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et on forme les produits scalaires

$$K^{G,\rho,h}_{\psi}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot K^{G,\rho}_{\psi}(g_1, g_2, g' g) \cdot h(g') \, ,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot \widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g) \cdot h(g')\,.$$

Lemme II.1. –

Les produits scalaires $K_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g)$ *et* $\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g)$ *se développent en*

$$K_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \; \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \; \sum_{\delta\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

où

$$W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$$

et

$$\widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$$

sont les produits des fonctions locales

$$G(F_x)\times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

respectivement définies en chaque place $x\in|F|$ *par les intégrales*

$$W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x \cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x^{-1}g_2, g'_x\, g) \cdot h_x(m_x'^{-1}\, g'_x)$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m_x,m'_x) &= \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x \cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x\, g_2, \alpha_r\, g'_x\, g) \cdot h_x(m'_x\, g'_x) \\ &= \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x \cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x\, g_2, w_r\, {}^t g_x'^{-1} g) \cdot h_x(m'_x\, w_{r-1}\, {}^t g_x'^{-1})\,.\end{aligned}$$

□

En toute place $x\in|F|-S\subset|F|-S_\rho$, le noyau $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ se décompose spectralement sous la forme

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g,g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot K_{\psi_x,\lambda}^{G,\rho}(g,g')$$

où, pour tout caractère unitaire $\lambda\in\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, $K_{\psi_x,\lambda}^{G,\rho}(\bullet,\bullet)$ est le produit de la fonction sphérique propre normalisée $\varphi_{x,\lambda}^G : G(F_x)\to\mathbb{C}$ et d'une fonction $W_\lambda : \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x)\to\mathbb{C}$ de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker qui vérifie

$$W_\lambda * \varphi'_x = ((\rho_x)_*(\lambda))(\varphi'_x)\cdot W_\lambda\,,\quad \forall\,\varphi'_x\in\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\,,$$

autrement dit qui appartient au $\psi_{(r)}$-modèle de Whittaker du caractère unitaire $(\rho_x)_*(\lambda)$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$.

Si le facteur local h_x en une telle place x de la fonction test h est sphérique, il admet quant à lui (d'après la proposition I.7(iii) appliquée au groupe GL_{r-1}) une décomposition spectrale de la forme

$$h_x(g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}=U(1)^{r-1}} dz\cdot S_x^{r-1}(h_x)(z)\cdot\varphi_{x,z}^{r-1}(g')\,,\quad g'\in\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)\,.$$

Un résultat fondamental de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika – l'équation fonctionnelle locale des intégrales de Rankin-Selberg – permet de donner des décompositions spectrales de $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ à partir de celles de $K^{G,\rho}_{\psi_x}$ et h_x, et de les relier par une équation fonctionnelle :

Théorème II.2. –

Soit $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$ une place en laquelle le facteur h_x de la fonction test h est sphérique. Alors :

(i) *Les deux fonctions $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ sur $(G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x)$ admettent des décompositions spectrales de la forme*

$$W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}} dz \cdot L_x\left(\rho,\lambda^{-1},z^{-1},q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)\,,$$

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}} dz \cdot L_x\left(\rho,\lambda^{-1},z^{-1},q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)\,,$$

où

- *chaque fonction $W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ [resp. $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$] sur $G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ est élément de l'espace propre associé à la paire (λ,z) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$,*
- *la dépendance des $W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)$, $m_x \in G(F_x)$, $m'_x \in \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$, en les valeurs propres $\lambda \in \widehat{T}^d_x$ et $z \in \widehat{T}_{r-1} = (\mathbb{C}^\times)^{r-1}$ est polynomiale,*
- *si les $(\rho_x)^i_*(\lambda)$, $1 \le i \le r$, désignent les r valeurs propres de Hecke du caractère $(\rho_x)_*(\lambda)$ de $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$, et les z_j, $1 \le j \le r-1$, désignent les $r-1$ valeurs propres de Hecke du caractère z de $\mathcal{H}^{r-1}_{x,\emptyset}$, $L_x(\rho,\lambda,z,Z)$ est le dénominateur*

$$L_x(\rho,\lambda,z,Z) = \prod_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r-1}} \frac{1}{1-(\rho_x)^i_*(\lambda)\cdot z_j \cdot Z}\,.$$

(ii) *On a les équations fonctionnelles*

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda^{-1},z^{-1}}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x^{-1},m_x'^{-1}) \cdot \varepsilon_x\left(\rho,\lambda,z,\psi_x,q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où

$$\varepsilon_x(\rho,\lambda,z,\psi_x,Z) = \prod_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r-1}} \varepsilon_x((\rho_x)^i_*(\lambda)\cdot z_j,\psi_x,Z)\,.$$

□

Afin de généraliser ce résultat au cas d'une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

on doit la décomposer spectralement.

On rappelle :

Proposition II.3. –

En n'importe quel rang $r \ge 1$, on a :

(i) *L'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires [resp. et tempérées] π de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ se décompose comme une réunion disjointe de variétés algébriques réelles*

$$\mathrm{Im}\,[\pi_0]/\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$$

indexées par des paires $(\underline{r},\pi_0)$ où

- *$\underline{r}$ désigne une partition $r = r_1 + \ldots + r_k$ du rang r,*
- *π_0 est une représentation lisse admissible irréductible unitaire discrète [resp. et de carré intégrable] de $\mathrm{GL}_{\underline{r}}(F_x) = \mathrm{GL}_{r_1}(F_x) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{r_k}(F_x)$,*
- *$[\pi_0]$ est une variété algébrique complexe sur laquelle le tore complexe $(\mathbb{C}^\times)^k$ agit simplement transitivement,*
- *$\mathrm{Im}\,[\pi_0]$ est une sous-variété algébrique réelle compacte de $[\pi_0]$ sur laquelle le sous-tore $U(1)^k$ agit simplement transitivement,*
- *$\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$ est un groupe fini qui agit sur $[\pi_0]$ en respectant $\mathrm{Im}\,[\pi_0]$.*

Cela permet de parler de fonctions polynomiales sur cet espace : ce sont les fonctions nulles en dehors d'un nombre fini de composantes et dont la restriction à chaque composante $\mathrm{Im}\,[\pi_0]/\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$ est polynomiale et se prolonge donc en un polynôme sur la variété complexe $[\pi_0]$ invariant par $\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$.

(ii) *Cet espace est muni d'une mesure $d\pi$ supportée par les représentations tempérées, dite "mesure de Plancherel", telle que toute fonction localement constante à support compact*

$$h_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

se décompose spectralement sous la forme

$$h_x(g) = \int d\pi \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in \mathrm{GL}_r(F_x)\,,$$

où

- *chaque $h_{x,\pi} : \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ est élément du sous-espace propre associé à π, c'est-à-dire est une combinaison linéaire de coefficients matriciels de π,*
- *chaque fonction $\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$, $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, est un polynôme.*

□

Ce rappel étant fait, on peut déduire de l'équation fonctionnelle locale de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika :

Théorème II.4. –

En n'importe quelle place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, considérons la décomposition spectrale

$$h_x(\bullet) = \int d\pi \cdot h_{x,\pi}(\bullet)$$

de la fonction test localement constante à support compact $h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$. Alors :

(i) *Les deux fonctions $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ sur $(G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x)$ admettent des décompositions spectrales de la forme*

$$W^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho,\lambda^{-1},\pi^\vee,q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)\,,$$

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho,\lambda^{-1},\pi^\vee,q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)\,,$$

où

- *chaque fonction* $W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ *[resp.* $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$*] sur* $G(F_x)\times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ *est élément de l'espace propre associé à la paire* (λ,π) *de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de* $G(F_x)$ *et* $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$*,*
- *la dépendance de* $W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)$ *et* $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)$*,* $m_x\in G(F_x)$*,* $m'_x\in \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$*, en* $\lambda\in\widehat{T}^d_x$ *et* π *est polynomiale,*
- $L_x(\rho,\lambda,\pi,Z)$ *est le dénominateur*

$$L_x(\rho,\lambda,\pi,Z)=\prod_{1\le i\le r} L_x(\pi,(\rho_x)^i_*(\lambda)\cdot Z)\,.$$

(ii) *On a les équations fonctionnelles*

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda^{-1},\pi^\vee}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)=W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x^{-1},m'^{-1}_x)\cdot\varepsilon_x\left(\rho,\lambda,\pi,\psi_x,q_x^{-\frac12}\right)\cdot\chi_\pi(-1)^{r-1}$$

où

$$\varepsilon_x(\rho,\lambda,\pi,\psi_x,Z)=\prod_{1\le i\le r}\varepsilon_x(\pi,\psi_x,(\rho_x)^i_*(\lambda)\cdot Z)\,.$$

L'apparition des facteurs linéaires locaux $L_x(\pi,Z)$ et $\varepsilon_x(\pi,\psi_x,Z)$ dans les équations fonctionnelles de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika, et donc dans notre recherche de "noyaux" du transfert automorphe, incite à revoir rapidement la théorie de ces facteurs L_x et ε_x classiques associés, en tout rang $r\ge 1$, aux représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Les $L_x(\pi,Z)$ sont définis par la proposition suivante (due à Tate dans le cas $r\ge 1$, et à Godement et Jacquet dans le cas $r\ge 2$), au moyen du plongement de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ dans l'algèbre matricielle $M_r(F_x)$:

Proposition II.5. –

En n'importe quel rang $r\ge 1$*, on a :*

(i) *Toute fonction localement constante à support compact*

$$f_x : M_r(F_x)\to\mathbb{C}$$

se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(g)=|\det(g)|_x^{-\frac r2}\cdot\int_\pi d\pi\cdot L_x\left(\pi^\vee,q_x^{-\frac12}\right)\cdot f_{x,\pi}(g)\,,\quad g\in\mathrm{GL}_r(F_x)\,,$$

où

- *chaque* $f_{x,\pi}:\mathrm{GL}_r(F_x)\to\mathbb{C}$ *est élément du sous-espace propre associé à* π*,*
- *chaque fonction* $\pi\mapsto f_{x,\pi}(g)$*,* $g\in\mathrm{GL}_r(F_x)$*, est un polynôme,*
- *sur chaque composante de l'espace des* π*,* $L_x(\pi,Z)$ *est l'inverse d'un polynôme* $L_x(\pi,Z)^{-1}$ *en* π *et* Z*, et vérifie*

$$L_x(\pi,0)^{-1}=1\,,\quad\forall\,\pi\,,$$
$$L_x(\pi\otimes|\det(\bullet)|^s,Z)=L_x(\pi,q_x^{-s}\cdot Z)\,,\quad\forall\,s\in\mathbb{C}\,,\quad\forall\,\pi\,.$$

(ii) *Pour toute famille de polynômes* $L'_x(\pi,Z)^{-1}$ *en* π *et* Z *qui vérifie les propriétés de* (i)*, les polynômes* $L_x(\pi,Z)^{-1}$ *divisent les polynômes* $L'_x(\pi,Z)^{-1}$*.* $\square$

Le choix du caractère additif continu non trivial $\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$ définit un opérateur

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[m' \mapsto \widehat{f}_x(m') = \int_{M_r(F_x)} dm \cdot f_x(m) \cdot \psi_x\left(\mathrm{Tr}\,(m\,m')\right)\right]$$

de ψ_x-transformation de Fourier dans l'espace des fonctions localement constantes à support compact $f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$.

Modulo multiplication par le caractère $g \mapsto |\det(g)|_x^r$ et changement de variable $g \mapsto g^{-1}$, cet opérateur commute avec les translations à gauche ou à droite par tout élément de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Il doit donc agir par multiplication par un scalaire sur l'espace des coefficients matriciels de toute représentation lisse admissible irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Tate dans le cas $r = 1$, puis Godement et Jacquet dans le cas $r \geq 2$, ont montré que ce scalaire a la forme

$$\frac{L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)}{L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)} \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, dans toute composante de l'espace des π,

$$\pi \mapsto \varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$$

est un polynôme inversible, autrement dit un monôme, en π et Z. Ce monôme est égal à 1 si π est non ramifiée et que le conducteur N_{ψ_x} de ψ_x est 0, et il vérifie

$$\varepsilon_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|^s, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi, \psi_x, q_x^{-s} \cdot Z)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, \pi\,.$$

Ainsi on a :

Proposition II.6. –

Pour toute fonction localement constante à support compact

$$f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

décomposée spectralement en

$$f_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot f_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$$

comme dans la proposition II.5(i)*, sa ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{f}_x$ admet la décomposition spectrale*

$$\widehat{f}_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot f_{x,\pi}(g^{-1})\,.$$

□

Revenons maintenant au groupe réductif quasi-déployé G sur F et à la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

Le conjecture I.2 de transfert par ρ peut être reformulée en la partie (i) de la conjecture suivante que l'on complète habituellement par la partie (ii) :

Conjecture II.7. –

(i) *Pour toute représentation automorphe* $\pi = \bigotimes_{x\in|F|} \pi_x$ *de* $G(\mathbb{A})$ *non ramifiée en dehors du sous-ensemble fini* $S \supset S_\rho$ *de* $|F|$*, il existe une représentation automorphe* $\pi' = \bigotimes_{x\in|F|} \pi'_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *telle que, en toute place* $x \in |F| - S$*, le facteur* π'_x *est non ramifié et s'identifie au caractère de* $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$ *image par* $(\rho_x)_*$ *du caractère* π_x *de* $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$.

(ii) *De plus, même en les places éventuellement ramifiées* $x \in S$*, le facteur* π'_x *de* π' *ne dépend que de* ρ *et du facteur* π_x *de* π*, si bien que, en toute place* $x \in |F|$*, on devrait pouvoir associer aux représentations locales* π_x *des facteurs* L_x *et* ε_x *non linéaires*

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\pi'_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi'_x, \psi_x, Z)\,.$$

Remarque :

Colette Moeglin et Guy Henniart ont fait remarquer à l'auteur que la partie (ii) de la conjecture est trop optimiste si G n'est pas nécessairement un groupe linéaire. Pour une représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ en une place $x \in |F|$, et si (π, π') décrit l'ensemble des paires de représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ telles que π_x soit la composante locale de π en x et que π' soit un transfert global de π au sens de (i), il n'est pas nécessairement vrai que π'_x ni même $L_x(\pi'_x, Z)$ et $\varepsilon_x(\pi'_x, \psi_x, Z)$ ne dépendent que de π_x.

En revanche, il est raisonnable de conjecturer que le quotient

$$\gamma_x(\pi'_x, \psi_x, Z) = \frac{L_x(\pi'_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi'_x, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi'^{\vee}_x, \frac{q_x}{Z}\right)}$$

ne dépend que de π_x, ce qui permettrait de noter

$$\gamma_x(\rho, \pi_x, Z) = \gamma_x(\pi'_x, \psi_x, Z)\,.$$

On pourrait alors prendre pour $L_x(\rho, \pi_x, Z)$ l'inverse du plus grand commun diviseur des $L_x(\pi'_x, Z)^{-1}$ puis poser

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, Z) = \gamma_x(\rho, \pi_x, Z) \cdot \frac{L_x\left(\rho, \pi^{\vee}_x, \frac{q_x}{Z}\right)}{L_x(\rho, \pi_x, Z)}$$

qui est nécessairement un monôme. □

Les facteurs $L_x(\rho, \pi_x, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$ ne sont pas faciles à définir a priori sur l'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires π_x de $G(F_x)$. Rappelons que, comme dans le cas linéaire, cet espace se décompose naturellement comme la réunion disjointe de variétés algébriques, quotients de tores par l'action de groupes finis. On s'attend certainement à ce que, sur chaque composante, $L_x(\rho, \pi_x, Z)^{-1}$ soit un polynôme en π_x et Z qui vaut 1 en $Z = 0$, et que $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$ soit un monôme en π_x et Z égal à 1 si $x \notin S_\rho$, π_x est non ramifié et $N_{\psi_x} = 0$.

Il n'est pas restrictif de supposer, comme nous le ferons toujours, que le groupe réductif G est muni d'un caractère bien défini sur F

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m$$

dont le cocaractère central correspondant du groupe dual

$$\widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \subset \widehat{G}\,,$$

composé avec $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, est égal à

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Alors les facteurs locaux non linéaires $L_x(\rho,\pi_x,Z)$ et $\varepsilon_x(\rho,\pi_x,\psi_x,Z)$ devront nécessairement vérifier

$$\begin{aligned} &L_x(\rho,\pi_x\otimes|\det_G(\bullet)|^s,Z) = L_x(\rho,\pi_x,q_x^{-s}\cdot Z)\,, \\ &\varepsilon_x(\rho,\pi_x\otimes|\det_G(\bullet)|^s,\psi_x,Z) = \varepsilon_x(\rho,\pi_x,\psi_x,q_x^{-s}\cdot Z)\,, \quad \forall\, s\in\mathbb{C}\,, \quad \forall\,\pi_x\,. \end{aligned}$$

Proposons la définition de travail suivante :

Définition II.8. –

En n'importe quelle place $x \in |F|$, appelons ensemble des "représentations de type L (relatif à ρ) de $G(F_x)$" une réunion de composantes de l'espace des représentations lisses admissibles π_x de $G(F_x)$ sur lesquelles on sait définir a priori les facteurs non linéaires $L_x(\rho,\pi_x,Z)$ et $\varepsilon_x(\rho,\pi_x,\psi_x,Z)$. On demande que cet ensemble soit stable par le passage aux représentations contragrédientes $\pi_x \mapsto \pi_x^\vee$.

Remarque :

La règle de transfert de Langlands impose de ranger parmi les représentations de type L, en toute place non ramifiée $x \in |F| - S_\rho$, les représentations de $G(F_x)$ qui sont sphériques, c'est-à-dire correspondent à un caractère z_x de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$. Via l'homomorphisme $\rho_x^* : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ induit par ρ, tout tel caractère z_x induit un caractère $(\rho_x)_*(z_x)$ de $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$, de valeurs propres de Hecke les $(\rho_x)^i_*(z_x)$, $1\le i\le r$, et on pose naturellement

$$L_x(\rho,\pi_x,Z) = L_x(\rho,z_x,Z) = L_x((\rho_x)_*(z_x),Z) = \prod_{1\le i\le r} L_x((\rho_x)^i_*(z_x),Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho,\pi_x,\varepsilon_x,Z) = \varepsilon_x(\rho,z_x,\psi_x,Z) = \varepsilon_x((\rho_x)_*(z_x),\psi_x,Z) = \prod_{1\le i\le r} \varepsilon_x((\rho_x)^i_*(z_x),\psi_x,Z)\,.$$

□

En dehors du cas central des représentations sphériques de $G(F_x)$ en les places non ramifiées $x \in |F| - S_\rho$, donnons d'autres exemples de types de représentations locales qu'il est possible de classer comme "représentations de type L".

Voyons d'abord les cas où le groupe de Galois Γ_F de F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation de ses r vecteurs de base. Cette action définit une F-algèbre E séparable de degré r dont le dual $\widehat{T}_E$ du tore multiplicatif $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m$ s'identifie à $\prod\limits_{1\le i\le r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_r$. L'homomorphisme Γ_F-équivariant induit par ρ

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = \prod_{1\le i\le r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_E$$

admet un homomorphisme dual bien défini sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

qui induit en toute place $x \in |F|$ un homomorphisme

$$T_E(F_x) \to T(F_x)$$

du groupe multiplicatif $T_E(F_x) = E_x^\times$ de la F_x-algèbre séparable $E_x = E \otimes_F F_x$ vers $T(F_x)$. On note enfin qu'en toute telle place $x \in |F|$, l'algèbre E_x est munie de la ψ_x-transformation de Fourier définie par le caractère $E_x \to \mathbb{C}^\times$ composé de $\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$ et de l'homomorphisme de trace $\mathrm{Tr} : E_x \to F_x$. Cela permet de définir les facteurs $L_x(\chi'_x, Z)$ et $\varepsilon_x(\chi'_x, \psi_x, Z)$ de tout caractère continu $\chi'_x : E_x^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Lemme II.9. –

Supposons comme ci-dessus que Γ_F agit sur $\mathbb{C}^r$ par permutation de ses r vecteurs de base, définissant ainsi une F-algèbre E et un homomorphisme $\rho_T^\vee : T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m \to T$.

Alors :

(i) *En toute place $x \in |F|$, tout caractère continu $\chi_x : T(F_x) \to \mathbb{C}^\times$ peut être considéré comme "de type L" relativement à la représentation de transfert $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, en posant*

$$L_x(\rho_T, \chi_x, Z) = L_x(\chi'_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi'_x, \psi_x, Z)\,,$$

si $\chi'_x : T_E(F_x) = E_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ désigne le composé de χ_x avec $T_E(F_x) \to T(F_x)$.

(ii) *En toute place $x \in |F|$, toute représentation lisse admissible π_x de $G(F_x)$ qui est l'induite normalisée d'un caractère χ_x du tore maximal $T(F_x)$, peut être considérée comme "de type L" relativement à ρ, en posant*

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\rho_T, \chi_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, Z)\,.$$

Pour l'exemple suivant, on a besoin de remplacer G par ses "groupes croisés" de degré $r' \geq 2$ que permet de définir le caractère $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$ déjà introduit.

Définition II.10. –

Soit un entier $r' \geq 2$.

(i) *Le "groupe croisé" de degré r' de G est défini comme le sous-groupe algébrique*

$$G_{r'} = \{(g, g') \in G \times \mathrm{GL}_{r'} \mid \det_G(g) = \det(g')\}\,.$$

C'est un groupe réductif dont le dual s'identifie au quotient

$$\widehat{G}_{r'} = (\widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}))/\mathbb{C}^\times$$

de $\widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})$ par le cocaractère central

$$\mathbb{C}^\times \ni z \mapsto (\widehat{\det}_G(z), z^{-1})\,.$$

(ii) *Le dual $\widehat{G}_{r'}$ de $G_{r'}$ est muni de la "représentation croisée"*

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

produit tensoriel de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et de la représentation standard de $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_{r'}$. □

Nous pouvons énoncer :

Lemme II.11. –

Considérons un degré $r' \geq 2$ *comme dans la définition* II.10 *ci-dessus.*

(i) *En toute place* $x \in |F|$*, les représentations lisses admissibles irréductibles de* $G_{r'}(F_x)$ *sont les facteurs directs (conjugués les uns des autres par l'action de* $F_x^\times/(F_x^\times)^{r'}$*) des produits* $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ *d'une représentation lisse admissible irréductible* π_x *de* $G(F_x)$ *et d'une représentation lisse admissible irréductible* π'_x *de* $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$*.*

(ii) *Si* $x \in |F| - S_\rho$ *est une place non ramifiée, et que* π_x *est sphérique et correspond donc à un caractère* z_x *de* $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ *dont le transfert* $(\rho_x)_*(z_x)$ *admet pour valeurs propres de Hecke les* $(\rho_x)_*^i(z_x) \in \mathbb{C}^\times$*,* $1 \leq i \leq r$*, alors* $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ *est une représentation irréductible de* $G_{r'}(F_x)$ *et peut être classée parmi les représentations "de type L" relativement à* $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$*, en posant*

$$L_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x(\pi'_x, (\rho_x)_*^i(z_x) \cdot Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x(\pi'_x, \psi_x, (\rho_x)_*^i(z_x) \cdot Z)\,.$$

Remarque :

Cet exemple est particulièrement important lorsque $r' = r - 1$. Dans ce cas en effet, les facteurs L_x et ε_x simples introduits ci-dessus coïncident avec les facteurs L_x et ε_x de paires

$$L_x(\rho, z_x, \pi'_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, z_x, \pi'_x, \psi_x, Z)\,,$$

qui apparaissent d'après Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika dans les équations fonctionnelles locales du théorème II.4.

□

Le lemme II.11 ci-dessus est naturellement complété par le lemme suivant :

Lemme II.12. –

Supposons comme dans le lemme II.9 *que* Γ_F *agit sur* $\mathbb{C}^r$ *par permutation de ses* r *vecteurs de base.*

Et considérons, en une place arbitraire $x \in |F|$*, les représentations lisses admissibles irréductibles* $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ *de* $G_{r'}(F_x)$ *telles que* π_x *est l'induite normalisée d'un caractère* χ_x *du tore maximal* $T(F_x)$*, et que la représentation* π'_x *de* $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ *est sphérique, avec pour valeurs propres de Hecke* $z'_1, \ldots, z'_r \in \mathbb{C}^\times$*.*

Alors $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ *est une représentation irréductible de* $G_{r'}(F_x)$ *et peut être classée parmi les représentations "de type L" relativement à* $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$ *en posant*

$$L_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, Z) = \prod_{1 \leq j \leq r'} L_x(\rho_T, \chi_x, z'_j \cdot Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq j \leq r'} \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, z'_j \cdot Z)\,.$$

□

Nous allons donner une dernière série importante de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$ (ou $G_{r'}(F_x)$, $r' \geq 2$), $x \in |F|$, qu'il est possible de classer a priori parmi les représentations "de type L" relativement à ρ (ou $\rho_{r'}$).

Pour cela, rappelons le résultat local fondamental suivant de Jacquet et Shalika :

Proposition II.13. –

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π'_x de $\mathrm{GL}_r(F_x)$, de caractère central $\chi_{\pi'_x} : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$, et pour tout caractère $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ suffisamment ramifié en fonction de la ramification de π'_x, on a

$$\begin{aligned} &L_x(\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det), Z) = 1\,, \\ &\varepsilon_x(\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det), \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi'_x}\, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1}\,. \end{aligned}$$

□

Rappelons que nous avons noté $\mu_G : \mathbb{G}_m \to Z_G \hookrightarrow G$ le cocaractère central de G dont le dual est le caractère composé

$$\widehat{\mu}_G : \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times\,,$$

et $\omega_\rho : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ le caractère automorphe qui correspond, via la théorie du corps de classes, au déterminant de l'action par ρ du groupe de Galois Γ_F sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$, notons $\chi_{\pi_x} : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ le caractère induit par π_x via le cocaractère central $\mu_G : F_x^\times \to G(F_x)$.

Selon la conjecture II.7(ii), on devrait pouvoir transférer par ρ toute telle représentation locale π_x de $G(F_x)$ en une représentation lisse admissible irréductible π'_x de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Si $x \in |F| - S_\rho$ et que π_x est non ramifiée, π'_x est déjà définie comme la représentation non ramifiée image de π_x par $\rho_x^* : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$, et on connaît d'après le corollaire I.10 la formule

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho\,.$$

Par compatibilité avec le transfert global de la conjecture II.7(i), l'hypothétique transfert local π'_x de toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ en n'importe quelle place $x \in |F|$ doit nécessairement vérifier la même formule

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho\,.$$

Enfin, la ramification de π'_x devrait être bornée en fonction de celle de π_x.

On parvient ainsi à l'énoncé suivant :

Corollaire II.14. –

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ en une place arbitraire $x \in |F|$, et pour tout caractère $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ suffisamment ramifié en fonction de la ramification de π_x, on peut classer le produit

$$\pi_x \otimes \omega_x = \pi_x \otimes (\omega_x \circ \det_G)$$

parmi les représentations "de type L" relativement à ρ, en posant

$$\begin{aligned} &L_x(\rho, \pi_x \otimes \omega_x, Z) = 1\,, \\ &\varepsilon_x(\rho, \pi_x \otimes \omega_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi_x}\, \omega_\rho\, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1}\,. \end{aligned}$$

Remarque :

Tout comme la remarque qui suit la définition II.8 et comme le lemme II.9, le corollaire II.14 ci-dessus s'applique aux groupes croisés $G_{r'}$, $r' \geq 2$, aussi bien qu'à G.

□

Une fois que l'on a précisé en chaque place $x \in |F|$ ce que l'on entendra par "représentation de type L relativement à ρ [resp. $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$] sur $G(F_x)$ [resp. $G_{r'}(F_x)$, $r' \geq 2$]", on est en mesure de définir une ψ_x-transformation de Fourier locale relative à ρ [resp. $\rho_{r'}$] en chaque telle place x :

Définition II.15. –

Considérons un caractère algébrique bien défini sur F

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m \, .$$

En n'importe quelle place $x \in |F|$, on pose :

(i) *Appelons fonction "de type L" (relatif à ρ) sur $G(F_x)$ toute fonction*

$$h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

telle que :

(1) *h_x est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*

(2) *la restriction de h_x à*

$$\{g \in G(F_x) \mid v_x(\det_G(g)) = N\}$$

est à support compact pour tout $N \in \mathbb{Z}$, et elle est nulle si $N \ll 0$,

(3) *h_x admet une décomposition spectrale de la forme*

$$h_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g) \, , \quad g \in G(F_x) \, ,$$

où

- *π décrit l'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ qui sont "de type L" (relativement à ρ) et admettent donc des facteurs $L_x(\rho, \pi, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi, \psi_x, Z)$ bien définis a priori,*
- *cet espace est muni de la mesure de Plancherel $d\pi$,*
- *pour toute π, la fonction $h_{x,\pi} : G(F_x) \to \mathbb{C}$ est élément de l'espace propre associé à π, autrement dit, c'est une combinaison linéaire de coefficients matriciels de π,*
- *pour tout $g \in G(F_x)$, la fonction $\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$ est polynomiale sur l'espace des représentations π.*

(ii) *Pour toute fonction h_x de type L comme dans* (i)*,*

$$h_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g) \, , \quad g \in G(F_x) \, ,$$

on appelle ψ_x-transformée de Fourier de h_x (relativement à ρ) la fonction

$$\widehat{h}_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$\widehat{h}_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g^{-1}) \, , \quad g \in G(F_x) \, .$$

(iii) *Si $x \in |F| - S_\rho$ est une place non ramifiée, on appelle "fonction de type L standard (relatif à ρ) sur $G(F_x)$" l'unique fonction sphérique*

$$G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \to \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$g \mapsto |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\operatorname{Im} \widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varphi_{x,\lambda}^G(g)\,.$$

Elle est sa propre ψ_x-transformée de Fourier si le conducteur N_{ψ_x} de ψ_x est 0.

Remarques :

(i) La ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{h}_x$ d'une fonction “de type L” h_x vérifie par définition les propriétés (1) et (3) de (i). On peut montrer qu'elle vérifie aussi la propriété (2), ce qui signifie qu'elle est elle-même “de type L”.

(ii) Le caractère $\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$ sera choisi plus tard en fonction de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, il faut prendre

$$\det_\rho = (\det)^{r-1}$$

pour que les fonctions localement constantes à support compact

$$f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

soient les fonctions “de type L” au sens de (i) et que leur ψ_x-transformation de Fourier linéaire coïncide avec la ψ_x-transformation de Fourier de (ii). La “fonction de type L standard” au sens de (iii) n'est alors autre que la fonction caractéristique de $M_r(O_x)$.

(iii) La présente définition II.15 s'applique aux groupes croisés $G_{r'}$, $r' \geq 2$, aussi bien qu'à G. On prendra

$$\det_{\rho_{r'}}(g, g') = \det_\rho(g) \cdot \det(g')^{r'-1}\,, \quad \forall\, (g, g') \in G_{r'}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r'}(F_x)\,.$$

III. Principe de fonctorialité et formules de Poisson non linéaires

Commençons par rappeler la formule de Poisson linéaire sur l'espace matriciel adélique $M_r(\mathbb{A})$, $r \geq 1$, et ses conséquences pour les fonctions L linéaires globales des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Le choix du caractère additif continu non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$$

a permis de définir en toute place $x \in |F|$ l'automorphisme de ψ_x-transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

de l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(F_x)$.

Le produit de ces transformations

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto \widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x$$

définit l'automorphisme de ψ-transformation de Fourier des fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(\mathbb{A})$.

La propriété globale essentielle de cet opérateur est qu'il laisse invariante la "fonctionnelle de Poisson"

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)\,.$$

Autrement dit, on a :

Proposition III.1. –

Toute fonction localement constante à support compact

$$f : M_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

satisfait la "formule de Poisson"

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

□

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on pose

$$L(\pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien définie a priori en tant que série formelle en Z. En presque toute place x, le facteur local π_x de π est une représentation non ramifiée et on a $\varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z) = 1$. Il en résulte que le produit

$$\varepsilon(\pi, \psi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)})$$

est bien défini en tant que monôme en Z.

Cette théorie des facteurs L et ε globaux s'applique en particulier aux représentations automorphes irréductibles de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Tate en rang $r = 1$, puis Godement et Jacquet en rang $r \geq 2$, ont montré que la formule de Poisson sur $M_r(\mathbb{A})$ implique :

Théorème III.2. –

Pour toute représentation automorphe irréductible cuspidale $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$*, on a :*

(i) *Le produit*

$$L(\pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, q_x^{-s})$$

est absolument convergent dès que la partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ *de* $s \in \mathbb{C}$ *est assez grande.*

(ii) *La fonction holomorphe que ce produit définit dans sa zone de convergence se prolonge analytiquement à* $\mathbb{C}$ *tout entier. Dans le cas présent où* F *est un corps de fonctions, c'est même une fraction rationnelle en* q^{-s}*.*

(iii) *Cette fonction analytique satisfait l'équation fonctionnelle*

$$L(\pi^\vee, q^{-(1-s)}) = L(\pi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\pi, \psi, q^{-s})\,.$$

(iv) *Cette fonction analytique ne peut admettre de pôles que si* $r = 1$ *et* π *est un caractère automorphe*

$$\mathbb{A}^\times / F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

qui se factorise à travers l'homomorphisme de degré

$$\deg : a = (a_x)_{x \in |F|} \mapsto \sum_{x \in |F|} \deg(x) \cdot v_x(a_x)\,,$$

autrement dit qui est de la forme

$$a \mapsto |a|^{s_0}\,.$$

Les pôles d'un tel caractère sont simples.

□

Pour passer des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ aux représentations automorphes arbitraires, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition III.3. –

(i) (Langlands) *Pour toute représentation automorphe irréductible* $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$*, il existe une partition* $r = r_1 + \ldots + r_k$ *du rang* r *et des représentations automorphes irréductibles cuspidales* $\pi_1 = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_{1,x}, \ldots, \pi_k = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_{k,x}$ *de* $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}), \ldots, \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$ *telles que* π *soit un sous-quotient de l'induite normalisée de la représentation automorphe* $\pi_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \pi_k$ *de* $(\mathrm{GL}_{r_1} \times \ldots \times \mathrm{GL}_{r_k})(\mathbb{A})$*.*

De plus, la ramification de $\pi_{1,x}, \ldots, \pi_{k,x}$ *en n'importe quelle place* $x \in |F|$ *est bornée en fonction de celle de* π_x *et, en particulier,* $\pi_{1,x}, \ldots, \pi_{k,x}$ *sont non ramifiées si* π_x *est non ramifiée.*

(ii) (Godement, Jacquet) *Dans la situation de* (i), *la fraction rationnelle en n'importe quelle place* $x \in |F|$

$$L_x(\pi_x, Z)$$

est le produit de la fraction rationnelle

$$\prod_{1 \leq i \leq k} L_x(\pi_{i,x}, Z)$$

et d'un polynôme en Z *qui vaut* 1 *lorsque* π_x *et donc aussi les* $\pi_{i,x}$, $1 \leq i \leq k$, *sont non ramifiées. De plus, le quotient*

$$\frac{L_x(\pi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi_x^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)}$$

est toujours égal au produit de quotients

$$\prod_{1 \leq i \leq k} \frac{L_x(\pi_{i,x}, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi_{i,x}^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)} .$$

$\square$

On déduit de cette proposition et du théorème III.2 :

Corollaire III.4. –

Toute représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *vérifie les propriétés* (i), (ii) *et* (iii) *du théorème* III.2.

Si de plus le facteur π_x *de* π *en au moins une place* x *est le produit*

$$\pi_x = \pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det)$$

d'une représentation lisse admissible irréductible π'_x *de* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *de ramification bornée et d'un caractère* $\mathrm{GL}_r(F_x) \xrightarrow{\det} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$ *suffisamment ramifié en fonction de cette borne, la fonction* L *globale de* π

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\pi, q^{-s})$$

n'a pas de pôle. $\square$

Revenons maintenant au groupe réductif quasi-déployé G sur F et à la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) .$$

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $G(\mathbb{A})$ dont tous les facteurs locaux π_x, $x \in |F|$, sont "de type L" relativement à ρ, on pose

$$L(\rho, \pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien définie a priori en tant que série formelle en Z. En presque toute place x, le facteur local π_x de π est une représentation non ramifiée et on a $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = 1$. Il en résulte que le produit

$$\varepsilon(\rho, \pi, \psi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)})$$

est bien défini en tant que monôme en Z.

Cette théorie des facteurs L et ε globaux relatifs à ρ s'applique en particulier aux représentations automorphes irréductibles de $G(\mathbb{A})$ dont tous les facteurs locaux sont "de type L" relativement à ρ.

Le corollaire III.4 ci-dessus implique :

Corollaire III.5. –

Supposons que la conjecture II.7 *de transfert automorphe global par ρ et de compatibilité avec les transferts locaux en toutes les places soit connue.*

On en déduit alors que, pour toute représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$ dont tous les facteurs locaux π_x sont "de type L" relativement à ρ, on a :

(i) *Le produit*

$$L(\rho, \pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, q_x^{-s})$$

est absolument convergent dès que la partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ *de $s \in \mathbb{C}$ est assez grande.*

(ii) *La fonction holomorphe que ce produit définit dans sa zone de convergence se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$ tout entier. Dans le cas présent où F est un corps de fonctions, c'est même une fraction rationnelle en q^{-s}.*

(iii) *Cette fonction analytique satisfait l'équation fonctionnelle*

$$L(\rho, \pi^\vee, q^{-(1-s)}) = L(\rho, \pi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\rho, \pi, \psi, q^{-s})\,.$$

(iv) *Si de plus le facteur π_x de π en au moins une place x est le produit*

$$\pi_x = \pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det_G)$$

d'une représentation lisse admissible irréductible π'_x de $G(F_x)$ de ramification bornée et d'un caractère $G(F_x) \xrightarrow{\det_G} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$ suffisamment ramifié en fonction de cette borne, la fonction L globale relative à ρ de π

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\rho, \pi, q^{-s})$$

n'a pas de pôle.

$\square$

Le but principal de ce paragraphe est de montrer, via le corollaire III.5 ci-dessus, que la conjecture II.7 de transfert automorphe par ρ implique une sorte de "formule de Poisson non linéaire relative à ρ sur $G(\mathbb{A})$" qui généralise au moins partiellement la formule de Poisson linéaire classique de la proposition III.1.

Pour cela, nous devons d'abord introduire la notion de "fonction de type L global (relatif à ρ) sur $G(\mathbb{A})$" et la ψ-transformation de Fourier de ces fonctions.

Définition III.6. –

Considérant un caractère algébrique bien défini sur F

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$$

comme dans la définition II.15*, on pose :*

(i) *On appelle fonction "de type L" (relatif à ρ) sur $G(\mathbb{A})$ toute combinaison linéaire de fonctions produits*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont tous les facteurs locaux $h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ sont "de type L" (relatif à ρ) sur $G(F_x)$ au sens de la définition II.15(i) *et dont presque tous les facteurs h_x, $x \in |F| - S_\rho$, sont égaux à "la fonction de type L standard" de la définition* II.15(iii).

(ii) *On appelle ψ-transformation de Fourier relative à ρ l'unique opérateur linéaire de l'espace des fonctions de type L global, qui transforme toute fonction produit élément de cet espace*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$$

en le produit des ψ_x-transformées de Fourier (relativement à ρ) de ses facteurs h_x, au sens de la définition II.15(ii),

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{h}_x \, .$$

Remarque :

Il résulte de la définition II.15 que toute fonction de type L global

$$h = G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$.

Sa restriction à

$$\{g \in G(\mathbb{A}) \mid \deg(\det_G(g)) = N\}$$

est à support compact pour tout $N \in \mathbb{Z}$, et elle est nulle si $N \ll 0$.

Enfin, la ψ-transformée de Fourier (relative à ρ) $\widehat{h}$ de h est elle-même de type L global.

$\square$

D'après cette remarque, les sommes $\sum\limits_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$ et $\sum\limits_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma)$ associées à toute fonction de type L global sur $G(\mathbb{A})$ sont finies. Dans le but de les relier, nous avons besoin de rappeler l'expression spectrale de la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$$

qu'implique, pour toute fonction localement constante à support compact $h : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, le théorème de décomposition spectrale de Langlands.

Le groupe réductif quasi-déployé G est muni d'une paire de Borel (T, B) bien définie sur F. Un sous-groupe parabolique P de G défini sur F est dit "standard" s'il contient B ; il possède un unique sous-groupe de Levy $M = M_P$ contenant T. Les sous-groupes de Levy $M \supset T$ obtenus de cette façon sont dits "standard" ; chacun est le sous-groupe de Levy M_P d'un unique sous-groupe parabolique standard $P = P_M$.

La décomposition spectrale de Langlands sur $G(F) \backslash G(\mathbb{A})$ est paramétrée par les "paires discrètes" (M, π) constituées de

- un sous-groupe de Levy standard M,

- une représentation automorphe irréductible unitaire “discrète” π de $M(\mathbb{A})$, c'est-à-dire une représentation lisse admissible irréductible de $M(\mathbb{A})$ dont le caractère central

$$\chi_\pi : Z_M(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

est unitaire, et qui apparaît comme facteur direct de l'espace de Hilbert

$$L^2_{\chi_\pi}(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$$

des fonctions

$$\varphi : M(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

invariantes à gauche par le sous-groupe discret $M(F)$ et qui vérifient

$$\varphi(\mu g) = \chi_\pi(\mu) \cdot \varphi(g)\,, \quad \forall\, \mu \in Z_M(\mathbb{A})\,, \quad \forall\, g \in M(\mathbb{A})\,,$$

$$\int_{M(F)\cdot Z_M(\mathbb{A})\backslash M(\mathbb{A})} dg \cdot |\varphi(g)|^2 < +\infty\,.$$

Pour une telle paire discrète (M, π), la représentation π apparaît avec une multiplicité finie dans l'espace $L^2_{\chi_\pi}(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$. On note $L^2_\pi(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ le sous-espace correspondant.

Si $P = P_M$ est le sous-groupe parabolique standard associé à M, si

$$\delta_P : P \to P/N_P \cong M_P = M \to \mathbb{G}_m$$

désigne le caractère modulaire par lequel P ou M agissent sur la puissance extérieure maximale de l'espace $\mathrm{Lie}\,(N_P)$, et si $K = \prod_{x\in|F|} K_x$ est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$, on note encore

$$L^2_\pi(M(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)$$

l'espace des fonctions de carré intégrable

$$\varphi : M(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K \to \mathbb{C}$$

telles que, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, la fonction induite

$$M(F)\backslash M(\mathbb{A}) \ni m \mapsto |\delta_P(m)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \varphi(mg)$$

soit élément de l'espace $L^2_\pi(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$.

Cet espace

$$L^2_\pi(M(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)$$

est nécessairement de dimension finie. On peut le munir d'une base orthonormée $\mathcal{B}_K(M, \pi)$.

Pour tout sous-groupe de Levy standard M, on note Λ_M le réseau des caractères algébriques bien définis sur F

$$M \to \mathbb{G}_m\,,$$

$\Lambda_M^\vee$ son réseau dual et $\widehat{\Lambda}_M$ le tore complexe dont le réseau des caractères est égal à $\Lambda_M^\vee$.

Il existe un unique homomorphisme

$$\deg_M : M(\mathbb{A}) \to \Lambda_M^\vee$$

tel que, pour tout élément $\chi : M \to \mathbb{G}_m$ de Λ_M, on ait

$$\langle \chi, \deg_M(m)\rangle = \deg\,(\chi(m))\,, \quad \forall\, m \in M(\mathbb{A})\,.$$

L'image de $\deg_M$ est d'indice fini dans $\Lambda_M^\vee$ et son noyau contient le sous-groupe discret $M(F)$ de $M(\mathbb{A})$.

On note $\mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_M$ le plus grand sous-tore réel compact de $\widehat{\Lambda}_M$. Il est constitué des éléments $z \in \widehat{\Lambda}_M$ qui sont unitaires au sens que
$$|\mu(z)| = 1\,, \quad \forall\, \mu \in \Lambda_M^\vee\,.$$

En toute place $x \in |F|$ où G est non ramifié, notons
$$K_x^0 = G(O_x)\,.$$

En les places x où G est ramifié, choisissons un sous-groupe ouvert compact K_x^0 de $G(F_x)$ tel que
$$G(F_x) = B(F_x) \cdot K_x^0\,,$$

puis notons $K^0 = \prod\limits_{x \in |F|} K_x^0$.

Tout élément $z \in \widehat{\Lambda}_M$ définit un caractère composé
$$M(\mathbb{A}) \xrightarrow{\deg_M} \Lambda_M^\vee \xrightarrow{z} \mathbb{C}^\times$$

invariant à la fois par le sous-groupe discret $M(F)$ et par n'importe quel sous-groupe ouvert compact de $M(\mathbb{A})$.

Comme $G(\mathbb{A}) = B(\mathbb{A}) \cdot K^0 = P_M(\mathbb{A}) \cdot K^0$, il se prolonge de manière unique en une fonction
$$N_{P_M}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K^0 \to \mathbb{C}$$

que l'on notera encore z. Cette fonction est invariante à gauche par $M(F)$.

Si (M,π) est une paire discrète, on note
$$\pi_z$$

les représentations obtenues comme produit tensoriel de π et d'un caractère $z \in \widehat{\Lambda}_M$. Les (M,π_z) sont encore des paires discrètes et, si K est un sous-groupe ouvert de K^0, chaque
$$\varphi \mapsto z \cdot \varphi$$

définit un isomorphisme d'espaces vectoriels
$$L^2_\pi(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K) \xrightarrow{\sim} L^2_{\pi_z}(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)\,.$$

Si π est unitaire, π_z est unitaire si et seulement si z est élément de $\mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_M$. On note $[\pi]$ la variété complexe des représentations de la forme π_z et, si π est unitaire, on note $\mathrm{Im}\,[\pi]$ la sous-variété réelle compacte de $[\pi]$ constituée des représentations unitaires.

Deux paires discrètes (M,π) et (M',π') sont dites "équivalentes" si elles sont transformées l'une dans l'autre par un élément du groupe de Weyl F-rationnel $\mathfrak{S}_G^F$ de G.

Elles sont dites "faiblement équivalentes" s'il existe $z \in \widehat{\Lambda}_M$ tel que les paires discrètes (M,π_z) et (M',π') soient équivalentes.

Pour toute paire discrète (M,π), on note
$$\mathrm{Fixe}\,(M,\pi)$$

le groupe fini des paires $(\sigma, z) \in \mathfrak{S}_G^F \times \widehat{\Lambda}_M$ telles que
$$w \cdot M \cdot w^{-1} = M \quad \text{et} \quad \pi_z \cong w(\pi)\,.$$

Rappelons enfin la construction des séries d'Eisenstein.

Si M est un sous-groupe de Levy standard de G, notons $\Delta_{B,M}^{\vee}$ l'ensemble des éléments non nuls de $\Lambda_M^{\vee}$, c'est-à-dire des formes linéaires non triviales sur $\Lambda_M \subset X_T$, qui sont induites par une coracine simple $\alpha^{\vee} \in \Delta_B^{\vee}$.

Pour toute paire discrète (M,π), tout sous-groupe ouvert K de K^0, toute fonction

$$\varphi \in L^2_{\pi}(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$$

et tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, la série

$$\sum_{\gamma \in P_M(F)\backslash G(F)} (z \cdot \varphi)(\gamma g)$$

converge absolument pour tout élément $z \in \widehat{\Lambda}_M$ tel que les modules

$$|\alpha^{\vee}(z)| \, , \quad \alpha^{\vee} \in \Delta_{B,M}^{\vee} \, ,$$

soient assez grands (indépendamment de g).

Elle converge vers une limite

$$E(z \cdot \varphi)(g)$$

qui est une fraction rationnelle en $z \in \widehat{\Lambda}_M$, appelée série d'Eisenstein, que l'on peut aussi noter

$$E_{\pi_z}(\varphi)(g) \, .$$

Ces fractions rationnelles sur $[\pi]$ peuvent s'écrire comme le quotient de deux polynômes dont le second, le dénominateur, ne dépend pas de $g \in G(\mathbb{A})$ et ne s'annule pas sur la sous-variété réelle $\mathrm{Im}\,[\pi]$ de $[\pi]$ constituée des représentations unitaires ni, plus généralement, en les représentations de la forme

$$\pi' \otimes |\mathrm{det}_G(\bullet)|^s \, , \quad \pi' \in \mathrm{Im}\,[\pi] \, , \quad s \in \mathbb{C} \, .$$

Nous avons maintenant rappelé tous les ingrédients nécessaires à l'énoncé suivant (équivalent à celui du paragraphe VI.2.1, page 264, de [Moeglin, Waldspurger]) du théorème de décomposition spectrale de Langlands :

Théorème III.7. –

Soit un sous-groupe ouvert $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ *du sous-groupe ouvert compact* $K^0 = \prod_{x\in|F|} K_x^0$ *de* $G(\mathbb{A})$*.*

Alors les paires discrètes (M,π) *telles que l'espace*

$$L^2_{\pi}(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$$

ne soit pas nul forment un ensemble fini de classes d'équivalence faible, et on peut choisir un ensemble fini de paires discrètes unitaires (M,π_0) *qui représentent ces classes.*

Pour toute fonction à support compact

$$h : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

invariante à gauche et à droite par K*, et pour tous éléments* $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$*, on a*

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma \, g_2) = \sum_{(M,\pi_0)} \frac{1}{|\mathrm{Fixe}\,(M,\pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot (h * E_{\pi}(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^{\vee}}(\overline{\varphi})(g_1)$$

où $d\pi$ *désigne la mesure de volume* 1 *sur chaque* $\mathrm{Im}\,[\pi_0]$ *qui est invariante par le tore réel compact* $\mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_M$*.*

Remarque :

Plus synthétiquement, la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma \, g_2)$$

a la forme

$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2)$$

où chaque $(g_1, g_2) \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$ est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes $\pi^\vee$ et π, et chaque $\pi \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$ est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de g_1 et g_2 et ne s'annule pas en les représentations de la forme

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|^s \,, \quad \pi' \in \mathrm{Im}\,[\pi_0] \,, \quad s \in \mathbb{C} \,.$$

$\square$

Si $h : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ est une fonction de type L global (relatif à ρ) au sens de la définition III.6, la somme finie

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$$

ne change pas si l'on multiplie la fonction h par le caractère $|\det_G(\bullet)|^s$ pour n'importe quel $s \in \mathbb{C}$.

Pour toute famille d'entiers presque nulle $(N_x \in \mathbb{Z})_{x \in |F|}$, la restriction de la fonction $h \cdot |\det_G(\bullet)|^s$ à

$$\{g \in G(\mathbb{A}) \mid v_x(\det_G(g)) = N_x, \ \forall \, x \in |F|\}$$

est à support compact, et on peut lui appliquer le théorème III.7 ci-dessus. En faisant la somme sur toutes les familles presque nulles d'entiers $(N_x)_{x \in |F|}$, on obtient différentes séries, qui sont toutes convergentes si $\mathrm{Re}\,(s)$ est assez grande. En mettant en facteurs les dénominateurs $L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right)$ dans les décompositions spectrales obtenues, on démontre ainsi :

Corollaire III.8. –

Soit une fonction de type L global (relatif à ρ)

$$h : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ de $K^0 = \prod_{x \in |F|} K_x^0$.

Faisant décrire à (M, π_0) l'ensemble fini de représentants associé à K dans le théorème III.7*, on a :*

(i) *Pour tous $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, la somme*

$$|\det_G(g_1^{-1} g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_1^{-1} g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma \, g_2)$$

s'écrit, pour n'importe quel $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ *assez grande,*

$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

où

- *chaque $(g_1, g_2) \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$ est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes $\pi^\vee$ et π,*

- *chaque* $\pi \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$ *est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de* g_1 *et* g_2 *et ne s'annule pas en les représentations de la forme*

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|\,, \quad \pi' \in \mathrm{Im}\,[\pi_0]\,, \quad s \in \mathbb{C}\,.$$

(ii) *De même, pour tous* $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$*, la somme*

$$|\det_G(g_2^{-1} g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_2^{-1} g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(g_2^{-1} \gamma\, g_1)$$

s'écrit, pour n'importe quel $s \in \mathbb{C}$ *de partie réelle* $\mathrm{Re}\,(s)$ *assez petite*

$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi, q^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot \widehat{h}_{\pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s}(g_2, g_1)$$

où

- *chaque* $(g_2, g_1) \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1)$ *est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes* π *et* $\pi^\vee$*,*
- *chaque* $\pi \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1)$ *est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de* g_1 *et* g_2 *et ne s'annule pas en les représentations de la forme*

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|\,, \quad \pi' \in \mathrm{Im}\,[\pi_0]\,, \quad s \in \mathbb{C}\,.$$

Remarque :

Il résulte de la définition de la ψ-transformation de Fourier relative à ρ que, pour tous $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et tout représentant (M, π_0), les fractions rationnelles sur $[\pi_0]$

$$\pi \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$$

et

$$\pi \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1)$$

sont reliées par la formule

$$h_{\pi^\vee}(g_2, g_1) = h_\pi(g_1, g_2) \cdot \varepsilon\left(\rho, \pi, \psi, q^{-\frac{1}{2}}\right)\,.$$

Les dénominateurs $L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$ et $L\left(\rho, \pi, q^{-\frac{1}{2}}\right)$ n'apparaissent pas dans cette équation puisqu'ils ont été mis en facteurs dans les décompositions spectrales de (i) et (ii). $\square$

On déduit du corollaire III.8 ci-dessus, de la remarque qui le suit et du corollaire III.5, la forme faible suivante de formule de Poisson non linéaire relative à ρ :

Proposition III.9. –

Supposons que la conjecture II.7 *de transfert automorphe global par* ρ *et de compatibilité avec les transferts locaux en toutes les places soit connue.*

On en déduit alors que, pour toute fonction de type L global (relatif à ρ*)*

$$h : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et sa ψ*-transformée de Fourier relative à* ρ

$$\widehat{h} : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a :

(i) *Avec les notations du corollaire* III.8(i), *la somme*

$$|\det_G(g_1^{-1} g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_1^{-1} g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma \, g_2)$$

s'écrit

$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

pour n'importe quel $s \in \mathbb{C}$ *de partie réelle* $\mathrm{Re}\,(s) \gg 0$, *tandis que la somme*

$$|\det_G(g_2^{-1} g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_2^{-1} g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(g_2^{-1} \gamma \, g_1)$$

s'écrit

$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

pour n'importe quel $s \in \mathbb{C}$ *de partie réelle* $\mathrm{Re}\,(s) \ll 0$.

Autrement dit, on passe de l'une à l'autre somme par un simple déplacement de contours d'intégration, et leur différence est une somme de résidus calculés le long des pôles des fonctions

$$(\pi, s) \mapsto L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) .$$

(ii) *Supposons en outre que, en au moins une place* x, *la fonction* h *ait un facteur local* h_x *qui s'écrive comme le produit*

$$h_x = h'_x \cdot \omega_x \circ \det_G(\bullet)$$

d'une fonction $h'_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ *de ramification bornée et d'un caractère* $G(F_x) \xrightarrow{\det_G} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$ *suffisamment ramifié en fonction de cette borne.*

Alors les deux sommes de (i) *sont égales, avec en particulier*

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma) = \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma) .$$

Remarque :

La formule de (ii), qui s'applique aux fonctions de type L global suffisamment ramifiées en au moins une place, sera appelée "formule de Poisson sans terme de bord" (relative à ρ sur $G(\mathbb{A})$).

IV. Formules de Poisson non linéaires et noyaux du transfert automorphe

On considère toujours le groupe réductif quasi-déployé G sur F muni de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et, pour tout degré $r' \geq 2$, le groupe croisé associé $G_{r'}$ muni de la représentation de transfert croisée $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$.

Le but du présent paragraphe est de montrer, en sens inverse du paragraphe précédent, que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$" permet de construire, pour toute partie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ, suffisamment de "S-noyaux du transfert" pour en déduire le transfert automorphe global par ρ de G à GL_r.

On reprend donc la construction de S-noyaux du transfert par ρ là où nous l'avions laissée aux paragraphes I et II.

On est parti d'une famille de "noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ" en les places $x \in |F| - S$,

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

complétée en les places $x \in S$ par une famille de fonctions

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

astreintes à certaines conditions automatiquement vérifiées en les places $x \in |F| - S$: En toute place $x \in |F|$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, elle est à supports compacts en la variable $g \in G(F_x)$, et elle satisfait l'équation

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Le produit

$$\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est donc de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, il est à supports compacts en la variable $g \in G(\mathbb{A})$, et il satisfait l'équation

$$\left(\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g, z\, g') = \left(\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{A}^\times\,.$$

On a posé pour tous $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$

$$W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma\in G(\mathbb{A})} \left(\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g_1^{-1}\gamma\, g_2, g)\,,$$

$$K_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, \delta g)\,,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho}(g_1,g_2,g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^{\psi} K(g_1,g_2,\alpha_r\,\delta g)\,.$$

Les fonctions $K_{\psi}^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho}$ sur $(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ sont respectivement invariantes à gauche par les sous-groupes discrets $(G\times G\times Q_r)(F)$ et $(G\times G\times Q_r^{\mathrm{op}})(F)$.

Afin de les comparer, on a introduit une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

et formé les produits scalaires

$$K_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg'\cdot K_{\psi}^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g)\cdot h(g')\,,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg'\cdot \widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g)\cdot h(g')\,.$$

Ceux-ci s'écrivent

$$K_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)$$

où

$$W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G\times \mathrm{GL}_{r-1})(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G\times \mathrm{GL}_{r-1})(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sont deux fonctions produits dont les facteurs locaux $W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ et $\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ en les places $x\in|F|-S\subset |F|-S_\rho$ sont analysés spectralement dans les théorèmes II.2 et II.4.

Afin de reformuler le lien entre fonctions $W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ et $\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ que ces théorèmes établissent en toutes les places $x\in|F|-S$, on pose la définition suivante :

Définition IV.1. –

Considérons un degré arbitraire $r'\geq 2$.

Une fonction locale en une place $x\in|F|$ [resp. globale]

$$W_x : G_{r'}(F_x)\to\mathbb{C} \quad [\textit{resp. } W : G_{r'}(\mathbb{A})\to\mathbb{C}]$$

qui est de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker, sera dite "de type L local sur $G_{r'}(F_x)$ [resp. global sur $G_{r'}(\mathbb{A})$] relativement à $\rho_{r'}$" s'il existe une fonction "de type L local [resp. global] relatif à ρ" au sens de la définition II.15(i) *[resp.* III.6(i)*]*

$$H_x : G_{r'}(F_x)\to\mathbb{C} \quad [\textit{resp. } H : G_{r'}(\mathbb{A})\to\mathbb{C}]$$

telle que

$$W_x = W_{(r')}^{\psi} H_x = \left[(g,g')\mapsto \int_{N_{r'}(F_x)} du'\cdot \psi_{r'}^{-1}(u')\cdot H_x(g,u'g')\right]$$

$$[\textit{resp. } W = W_{(r')}^{\psi} H = \left[(g,g')\mapsto \int_{N_{r'}(\mathbb{A})} du'\cdot \psi_{r'}^{-1}(u')\cdot H(g,u'g')\right]\,].$$

On appelle alors ψ_x-transformée de Fourier de W_x [resp. ψ-transformée de Fourier de W] relativement à ρ la fonction

$$\begin{array}{rrcl} & \widehat{W}_x : (g,g') & \mapsto & \displaystyle\int_{N_{r'}(F_x)} du'_x \cdot \psi_{(r')}^{-1}(u'_x) \cdot \widehat{H}_x(g, g' u_x'^{-1}) \\ \textit{[resp.} & \widehat{W} : (g,g') & \mapsto & \displaystyle\int_{N_{r'}(\mathbb{A})} du' \cdot \psi_{(r')}^{-1}(u') \cdot \widehat{H}(g, g' u'^{-1})\textit{]}. \end{array}$$

Elle ne dépend pas du choix du relèvement H_x [resp. H] de W_x [resp. W].

Remarque :

En toute place $x \in |F| - S_\rho$, on appelle "fonction de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker de type L standard" (relatif à ρ) le $\psi_{(r')}$-coefficient unipotent

$$W_x = W^{\psi}_{(r')} H_x$$

de la "fonction de type L standard" (relatif à ρ)

$$H_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$$

au sens de la définition II.15(iii).

Une fonction produit de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker

$$W = \bigotimes_{x \in |F|} W_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est de type L global relatif à ρ lorsque tous ses facteurs W_x, $x \in |F|$, sont de type L local relatif à ρ et que presque tous sont la fonction standard.

□

On déduit immédiatement de cette définition :

Lemme IV.2. –

Étant donné un degré $r' \geq 2$, supposons que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à $\rho_{r'}$ sur $G_{r'}(\mathbb{A})$" est connue.

Cela signifie que pour toute fonction produit de type L global relatif à $\rho_{r'}$

$$H = \bigotimes_{x \in |F|} H_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont un facteur local H_x au moins est le produit

$$G_{r'}(F_x) \ni (g,g') \mapsto H_x(g,g') = H'_x(g,g') \cdot \omega_x(\det_G(g))$$

d'une fonction $H'_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$ de ramification bornée et d'un caractère $\omega_x \circ \det_G = \omega_x \circ \det$ suffisamment ramifié en fonction de cette borne, on connaît la formule

$$\sum_{(\gamma,\gamma') \in G_{r'}(F)} H(\gamma,\gamma') = \sum_{(\gamma,\gamma') \in G_{r'}(F)} \widehat{H}(\gamma,\gamma')\,.$$

Alors, pour toute fonction produit de type de Whittaker de type L global relatif à $\rho_{r'}$

$$W = \bigotimes_{x \in |F|} W_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont un facteur local W_x au moins est le produit

$$W_x = W'_x \cdot \omega_x \circ \det_G$$

d'une fonction $W'_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$ de ramification bornée et d'un caractère $\omega_x \circ \det_G = \omega_x \circ \det$ suffisamment ramifié en fonction de cette borne, on connaît la formule

$$\sum_{(\gamma,\gamma') \in N_{r'}(F)\backslash G_{r'}(F)} W(\gamma,\gamma') = \sum_{(\gamma,\gamma') \in G_{r'}(F)/N_{r'}(F)} \widehat{W}(\gamma,\gamma')\,.$$

$\square$

Revenant aux noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

et aux fonctions $W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$, $\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ sur $G(F_x)\times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \supset G_{r-1}(F_x)$ qui s'en déduisent par intégration contre des fonctions tests arbitraires $h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$, les théorèmes II.2 et II.4 impliquent :

Théorème IV.3. –

Modulo multiplication par le caractère $(m,m') \mapsto |\det_G(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(m')|_x^{-\frac{r-2}{2}}$, la restriction à

$$G_{r-1}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$$

de la fonction de $\psi_{(r-1)}$-type de Whittaker

$$W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x) \to \mathbb{C}$$

est "de type L local relatif à ρ_{r-1}" en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, et elle se confond avec la fonction standard en presque toute telle place.

De plus, sa ψ_x-transformée de Fourier relative à ρ_{r-1} n'est autre que la restriction à

$$G_{r-1}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)\,,$$

multipliée par le même caractère $|\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r-2}{2}}$, de la fonction

$$G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \ni (m,m') \mapsto \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m, (-1)^{r-1}\, m')$$

en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$.

$\square$

Considérons maintenant les places $x \in S$.

Jusqu'à présent, on n'a demandé aux fonctions de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker $K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ en ces places $x \in S$ que de satisfaire l'équation

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Autrement dit, la décomposition spectrale de ces fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ ne doit faire apparaître que des paires (π_x, π'_x) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ telles que

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho\,.$$

Un lemme inspiré de [Cogdell, Piatetski-Shapiro] permet d'imposer aux fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ des conditions supplémentaires qui seront suffisantes pour étendre partiellement la conclusion du théorème IV.3 ci-dessus aux places $x \in S$:

Lemme IV.4. –

En une place $x \in S$, considérons l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ des paires de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui vérifient

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho$$

et dont la ramification n'excède pas une borne donnée.

Soit $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caractère unitaire suffisamment ramifié pour que tout élément (π_x, π'_x) de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ vérifie les conditions suivantes :

- *D'une part, la représentation $\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det) = \pi'_x \, \omega_x$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ satisfait la double conclusion de la proposition* II.13

$$\begin{aligned} &L_x(\pi'_x \, \omega_x, Z) = 1 \, , \\ &\varepsilon_x(\pi'_x \, \omega_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi'_x} \, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1} \, . \end{aligned}$$

- *D'autre part, pour toute représentation non ramifiée irréductible z de $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ de valeurs propres de Hecke $z_1, \ldots, z_{r-1}$, la représentation $(\pi_x \boxtimes z) \otimes (\omega_x \circ \det_G) = (\pi_x \boxtimes z) \otimes (\omega_x \circ \det) = (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x$ de $G_{r-1}(F_x)$ satisfait la conclusion du corollaire* II.14*, au sens qu'elle est "de type L" relativement à ρ_{r-1} avec*

$$\begin{aligned} &L_x(\rho_{r-1}, (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x, Z) = 1 \, , \\ &\varepsilon_x(\rho_{r-1}, (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x, \psi_x, 1) = \prod_{1 \le j \le r-1} \varepsilon_x(\chi_{\pi_x} \, \omega_\rho \, \omega_x, \psi_x, z_j \, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, z_j \, Z)^{r-1} \, . \end{aligned}$$

Alors, si $N_x \in \mathbb{N}$ est un entier assez grand en fonction de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ et du caractère très ramifié $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$, il est possible de construire une fonction de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$$

telle que :

- $K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g') \, , \quad \forall\, z \in F_x^\times \, ,$
- *chaque $K_{\psi_x}^{G,\rho}(\bullet, g')$, $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, est à support compact dans $G(F_x)$,*
- *en la première variable $g \in G(F_x)$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est invariante à gauche et à droite par un certain sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*
- *en la seconde variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est invariante à droite par le sous-groupe ouvert compact*

$$\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \subset \mathrm{GL}_r(O_x) \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$$

  des matrices entières inversibles dont la réduction modulo $\varpi_x^{N_x}$ a la forme

$$\begin{pmatrix} * & \ldots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \ldots & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

- *la décomposition spectrale de $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ ne fait apparaître que des paires de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ de la forme*

$$(\pi_x\,\omega_x, \pi'_x\,\omega_x) \quad \textit{avec} \quad (\pi_x, \pi'_x) \in \{(\pi_x, \pi'_x)\}\,,$$

et la composante de $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ dans l'espace propre associé à toute première projection $\pi_x\,\omega_x$ d'une telle paire ne s'annule pas uniformément sur $G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)_{N_x}$.

Remarque :

Le sous-groupe ouvert compact $\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ introduit ci-dessus contient comme sous-groupe $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$.

□

L'équation fonctionnelle locale de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika permet de compléter le théorème IV.3 ci-dessus de la manière suivante :

Théorème IV.5. –

En n'importe quelle place $x \in S$, supposons que la fonction

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

satisfait toutes les conditions du lemme IV.4 *ci-dessus relativement à la famille donnée $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$, à un caractère unitaire $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de cette famille, et à un entier $N_x \in \mathbb{N}$ assez grand en fonction de cette famille et de ω_x.*

Soit une fonction test localement constante à support compact

$$h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est sphérique ou, plus généralement, dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations non ramifiées z.

Alors, modulo multiplication par le caractère

$$(m, m') \mapsto |\det_G(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(m')|_x^{-\frac{r-2}{2}}\,,$$

la restriction à $G_{r-1}(F_x)$ de la fonction de $\psi_{(r-1)}$-type de Whittaker

$$W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x) \to \mathbb{C}$$

est "de type L local relatif à ρ_{r-1}", et sa ψ_x-transformée de Fourier relative à ρ_{r-1} n'est autre que la restriction à $G_{r-1}(F_x)$ de la fonction

$$G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \ni (m, m') \mapsto \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m, (-1)^{r-1}\,m')\,,$$

multipliée par le même caractère $|\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r-2}{2}}$.

De plus, sa décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G_{r-1}(F_x)$ de la forme

$$(\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x\,,$$

où π_x est la première projection d'un élément (π_x, π'_x) de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ et z est une représentation non ramifiée de $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$.

□

Si la partie finie $S \supset S_\rho$ de $|F|$ n'est pas vide et que les fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$, $x \in S$, satisfont les propriétés du lemme IV.4, toutes les conditions nécessaires pour appliquer la "formule de Poisson sans terme de bord" relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$ sont satisfaites. On obtient d'après le lemme IV.2 :

Corollaire IV.6. –

Supposons que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$" est connue.

Étant donnée une partie finie non vide S de $|F|$ qui contient S_ρ, complétons la famille de noyaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S$

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

par une famille de fonctions en les places $x \in S$

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \to \mathbb{C}$$

qui satisfont les conditions du lemme IV.4.

Soient des éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Soit enfin une fonction test localement constante à support compact

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont les facteurs h_x en les places $x \in S$ sont sphériques ou, plus généralement, ne font apparaître dans leur décomposition spectrale que des représentations non ramifiées.

Alors on a

$$\sum_{(\gamma,\delta) \in N_{r-1}(F)\backslash G_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta) = \sum_{(\gamma,\delta) \in G_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,(-1)^{r-1}\,\delta)\,.$$

Remarque :

La conclusion du corollaire s'applique également aux translatées à gauche ${}^{\delta'_0}h$ de h par tous les éléments $\delta'_0 \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)$.

En faisant la somme sur toutes les classes $\delta'_0 \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/\mathrm{SL}_{r-1}(F)$, on obtient

$$\sum_{\gamma \in G(F)} \sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta) = \sum_{\gamma \in G(F)} \sum_{\delta \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,.$$

$\square$

De la remarque qui suit ce corollaire, combinée avec le lemme II.1, on déduit :

Corollaire IV.7. –

Étant donnée une partie finie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ, considérons une famille de fonctions

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : (G \times \mathrm{GL}_r)(F_x) \to \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,,$$

qui sont des noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S$, et satisfont les conditions du lemme IV.4 *en les places $x \in S$.*

Alors :

(i) *Pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et pour toute fonction test localement constante à support compact*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante à gauche et à droite par $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$ en toute place $x \in S$, le produit scalaire

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot K_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \cdot h(g')$$

est égal au produit scalaire

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot \widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \cdot h(g')\,.$$

(ii) *Si $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ désigne le sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ image réciproque du sous-groupe ouvert*

$$\prod_{x \in S} \mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \subset \prod_{x \in S} \mathrm{GL}_r(F_x)\,,$$

les fonctions $K_\psi^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ ont même restriction à $G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

(iii) *La restriction commune de $K_\psi^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ à $G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ est invariante à gauche par le sous-groupe discret*

$$G(F) \times G(F) \times \mathrm{GL}_r(F)_{N_S}$$

si l'on note $\mathrm{GL}_r(F)_{N_S} = \mathrm{GL}_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

Démonstration :

(ii) résulte de (i) puisque, pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$, les fonctions

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \ni g' & \mapsto & K_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \\ \text{et} & g' & \mapsto & \widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \end{array}$$

sont invariantes à droite par $\prod_{x \in S} \mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$.

(iii) Par construction, $K_\psi^{G,\rho}$ est invariante à gauche par $G(F) \times G(F) \times Q_r(F)$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ est invariante à gauche par $G(F) \times G(F) \times Q_r^{\mathrm{op}}(F)$.

La conclusion résulte du lemme suivant tiré de [Cogdell, Piatetski-Shapiro] (proposition 9.1) :

Lemme IV.8. –

Le sous-groupe discret

$$\mathrm{GL}_r(F)_{N_S} = \mathrm{GL}_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$$

de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ est engendré par ses sous-groupes

$$Q_r(F)_{N_S} = Q_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$$

et

$$Q_r^{\mathrm{op}}(F)_{N_S} = Q_r^{\mathrm{op}}(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}\,.$$

□

De plus, on a :

Lemme IV.9. –

Le sous-groupe $\mathrm{GL}_r(F)$ *est dense dans le produit fini* $\prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(F_x)$.

Par conséquent, l'image réciproque $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *dans* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *du sous-groupe ouvert* $\prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ *de* $\prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(F_x)$ *vérifie*

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(F)\cdot \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}\,,$$

et l'inclusion

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S} \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$$

définit un isomorphisme

$$\mathrm{GL}_r(F)_{N_S}\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})\,.$$

Cet isomorphisme est compatible avec les actions à droite des $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *en toutes les places* $x\in|F|-S$, *et avec celles des sous-groupes* $\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ *en les places* $x\in S$.

□

On déduit de ce lemme et du corollaire IV.7 :

Corollaire IV.10. –

Dans les conditions du corollaire IV.7, *la restriction commune à* $G(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})\times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *des fonctions* $K_\psi^{G,\rho}$ *et* $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ *peut être vue comme une fonction*

$$K : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Cette fonction est un "S-noyau du transfert automorphe par ρ*" au sens de la définition* I.3.

De plus, on a pour tous éléments $g_1,g_2\in G(\mathbb{A})$ *et* $g\in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *la formule*

$$W_{(r)}^{\psi} K(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \left(\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g_1^{-1}\gamma\, g_2, g)\,.$$

Démonstration :

La dernière formule résulte de ce qu'il est possible de relever le quotient compact

$$N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})$$

en une partie compacte de $N_r(\mathbb{A})$ dont la projection dans $\prod_{x\in S} N_r(F_x)$ est contenue dans $\prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$.

□

On a enfin :

Théorème IV.11. –

Supposons toujours que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} *sur* $G_{r-1}(\mathbb{A})$*" est connue.*

Alors la construction des corollaires IV.7 *et* IV.10 *ci-dessus fournit suffisamment de "S-noyaux du transfert automorphe par* ρ*"*

$$K : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

pour réaliser le transfert automorphe global de G *à* GL_r *par* ρ.

Démonstration :

Considérons une représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes\limits_{x \in |F|} \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$ et une partie finie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ et les places x où π_x est ramifiée.

Il existe des caractères automorphes unitaires

$$\omega = \bigotimes_{x \in |F|} \omega_x : \mathbb{A}^\times / F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

qui sont non ramifiés en les places $x \in |F| - S$ et arbitrairement ramifiés en les places $x \in S$.

Si les facteurs $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$, $x \in S$, sont suffisamment ramifiés, on peut réaliser les conditions du lemme IV.4 de telle façon que la composante dans l'espace propre de $\pi \otimes \omega$ de la fonction

$$(g_1, g_2, g) \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g_1^{-1} \gamma \, g_2, g)$$

ne s'annule par uniformément sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

On conclut d'après le corollaire IV.10. $\square$

V. Nouvelle construction de la fonctionnelle de Poisson linéaire et généralisation non linéaire conjecturale

Il est intéressant de chercher à raffiner la construction du paragraphe précédent et à définir des termes complémentaires “non cuspidaux”

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

permettant de réaliser l’égalité

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_\psi^{G,\rho} + \widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}$$

sur $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ tout entier, et donc de définir directement un noyau automorphe

$$(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

comme prévu dans la conjecture I.11.

On doit impérativement trouver un tel raffinement si l’on cherche à construire des noyaux du transfert global par ρ qui soient compatibles avec le transfert local en toute place $x \in |F|$ sans exception. On part alors d’une famille de fonctions locales de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$K_\psi^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui sont des “noyaux locaux” du transfert par ρ en toute place $x \in |F|$: cela signifie que leur décomposition spectrale ne fait apparaître que des paires (π_x, π'_x) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ telles que π'_x soit le transfert local de π_x par ρ en un sens déjà connu sans ambiguïté.

Afin de réaliser ce programme, on a besoin d’une “formule de Poisson non linéaire avec termes de bord” relative à ρ (ou $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$) qui s’applique à toutes les fonctions “de type L global” sur $G(\mathbb{A})$ (ou $G_{r'}(\mathbb{A})$). Autrement dit, on a besoin de définir sur l’espace des fonctions de type L global une fonctionnelle linéaire, complémentaire de l’évaluation

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)\,,$$

telle que leur somme, notée par convention

$$h \mapsto \text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”}\,,$$

vérifie la formule de Poisson

$$\text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”} = \text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{h}(\gamma)\text{”}\,, \quad \forall\, h\,.$$

Dans le but de proposer une définition conjecturale d’une telle “fonctionnelle de Poisson non linéaire relative à ρ (ou $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$)”, on pose la définition suivante :

Définition V.1. –

En n'importe quelle place $x \in |F| - S_\rho$, considérons une fonction sphérique

$$h_x : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

qui est "de type L local" relativement à $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Autrement dit, elle se décompose spectralement sous la forme

$$h_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\lambda}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

où $d\lambda$ désigne toujours la mesure de Plancherel sur l'espace $\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d/\mathfrak{S}_G^x$ des caractères unitaires λ de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ de $G(F_x)$, et chaque $g \mapsto h_{x,\lambda}(g)$ est une fonction sphérique, vecteur propre de valeur propre λ, et dont la dépendance en $\lambda \in \widehat{T}_x^d$ est polynomiale.

Alors, pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, on note $h_x^{N,N'}$ la fonction sur $G(F_x)$ définie par la décomposition spectrale

$$\begin{aligned} h_x^{N,N'}(g) \quad &= \quad |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^N\left(\rho, \lambda, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) I_x^{N'}\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\lambda}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,, \end{aligned}$$

où $I_x^N(\rho, \lambda, Z)$ désigne le polynôme en $\lambda \in \widehat{T}_x^d$ et Z qui est le produit du polynôme

$$L_x(\rho, \lambda, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N en Z qui figure dans le développement en série formelle de l'inverse

$$L_x(\rho, \lambda, Z)\,.$$

Remarques :

(i) On note l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_x^N(\rho, \lambda, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en Z à coefficients dans $\mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$. De plus, les séries

$$\sum_{N \geq N_0} \left| I_x^N\left(\rho, \lambda, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)\right|$$

convergent uniformément vers 0 si $\lambda \in \mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d$ et N_0 devient arbitrairement grand.

On en déduit que, pour tout $g \in G(F_x)$, la série

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} h_x^{N,N'}(g)$$

converge vers $h_x(g)$.

(ii) Pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, la fonction $h_x^{N,N'}$ et sa ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{h_x^{N,N'}}$ sont supportées par des parties compactes de $G(F_x)$.

(iii) Il est possible de généraliser la définition ci-dessus à toutes les fonctions de type L sur $G(F_x)$ en n'importe quelle place $x \in |F|$, mais nous n'en aurons pas besoin.

$\square$

Étant donné un élément $z_0 \in \mathbb{C}$, toute fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(Z)$ à coefficients complexes s'écrit de manière unique comme une somme

$$R = R_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{a_i}{(Z - z_0)^i}$$

où les a_i, $1 \leq i \leq k$, sont des constantes et R_0 est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas en z_0. On peut appeler $R_0(z_0)$ la "valeur régularisée" de R au point z_0.

Cela permet de formuler la conjecture suivante :

Conjecture V.2. –

Soit une fonction produit de type L global relatif à ρ

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \,,$$

et soit $x_0 \in |F| - S_\rho$ n'importe quelle place en laquelle le facteur local h_{x_0} de h est sphérique.

Alors :

(i) *La série formelle*

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(h_{x_0}^{N,N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} h_x \right) \right) (\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z.

(ii) *La "valeur régularisée" $S(f)$ de cette fraction rationnelle au point $Z = 1$ ne dépend pas du choix de la place x_0.*

(iii) *La fonctionnelle linéaire induite sur l'espace des fonctions de type L global relatif à ρ sur $G(\mathbb{A})$*

$$h \mapsto S(h)$$

est laissée invariante par la ψ-transformation de Fourier relative à ρ, et il en est donc de même de la fonctionnelle

$$h \mapsto \left(\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma) \right) - S(h) = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma) \text{”} \,.$$

Remarque :

Dès lors que les parties (i) et (ii) de la conjecture impliquent qu'elle est bien définie, la fonctionnelle

$$h \mapsto S(h)$$

est invariante par translation à gauche ou à droite par $G(F)$, et il en est donc de même de la fonctionnelle

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma) \text{”} \,.$$

$\square$

On prouve facilement :

Proposition V.3. –

Si E est une algèbre finie séparable de degré r sur F, qui correspond à une action du groupe de Galois Γ_F sur l'intervalle $\{1, 2, \ldots, r\}$, le tore "linéaire"

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m \,,$$

muni de la représentation standard

$$\rho_E : \widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F = \left(\prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times \right) \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

de son dual $\widehat{T}_E = \prod\limits_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times$, vérifie la conjecture V.2 *ci-dessus.*

Plus précisément, les fonctions localement constantes à support compact sur $\mathbb{A}_E = \mathbb{A} \otimes_F E$ sont les fonctions de type L global relatif à ρ_E sur $T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$, et la fonctionnelle de Poisson standard

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in E} h(\gamma)$$

coïncide avec la fonctionnelle de la conjecture V.2

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}_E(F)} h(\gamma) \text{”} \,.$$

Remarque :

Cette proposition s'applique en particulier au tore linéaire déployé $\mathbb{G}_m^r$. On retrouve alors la fonctionnelle de Poisson

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in F^r} h(\gamma)$$

sur $\mathbb{A}^r$. □

Avec plus de travail, on démontre au paragraphe V de [Lafforgue, 2014] :

Théorème V.4. –

Le groupe linéaire

$$\mathrm{GL}_r \,,$$

muni de la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, vérifie la conjecture V.2 *ci-dessus.*

Plus précisément, les fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(\mathbb{A})$ sont les fonctions "de type L global" relatif à la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r$ sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et la fonctionnelle de Poisson standard

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} h(\gamma)$$

coïncide avec la fonctionnelle de la conjecture V.2

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A})} h(\gamma) \text{”} \,.$$

Remarques :

(i) La démonstration de ce théorème utilise

- le théorème de décomposition spectrale de Langlands,
- les propriétés des fonctions L linéaires globales rappelées dans le théorème III.2.

(ii) Plus généralement, on montre au paragraphe X de [Lafforgue, 2014] que la conjecture de transfert automorphe global par ρ de G à GL_r implique la conjecture V.2 pour le groupe réductif G muni de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. □

On rappelle que, par hypothèse, la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ induit un homomorphisme

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

du tore maximal $\widehat{T}$ de $\widehat{G}$, dual du tore maximal T de G, dans le tore maximal $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Si Γ_F agit dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation des r vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^r$, cette action définit une F-algèbre séparable E de degré r. Le dual $\widehat{T}_E$ du tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m$ s'identifie à $\prod\limits_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times$ muni de l'action par permutation de Γ_F, et l'homomorphisme

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

devient Γ_F-équivariant, donc admet un homomorphisme dual bien défini sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \to T\,.$$

Cet homomorphisme identifie T au tore quotient du tore "linéaire" $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m$ par le sous-tore T_ρ dual du conoyau $\widehat{T}_\rho$ de ρ_T.

Par intégration le long des fibres de

$$T_E(\mathbb{A}) \to T(\mathbb{A})\,,$$

on déduit de la proposition V.3 :

Corollaire V.5. –

Supposons comme ci-dessus que Γ_F agit sur $\mathbb{C}^r$ par permutation de ses r vecteurs de base, définissant une F-algèbre séparable E de degré r.

Et supposons de plus que les homomorphismes

$$\begin{array}{rrcl} & T_E(F_x) & \to & T(F_x)\,, \quad x \in |F|\,, \\ & T_E(\mathbb{A}) & \to & T(\mathbb{A})\,, \\ \textit{et} & T_E(F) & \to & T(F) \end{array}$$

induits par $\rho_T^\vee : T_E \to T$ soient surjectifs.

Alors, associant à la représentation $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ le caractère $\det_{\rho_T} : T \to \mathbb{G}_m$ trivial, on a :

(i) *Les fonctions "de type L" local [resp. global] sur $T(F_x)$ [resp. $T(\mathbb{A})$] sont les fonctions*

$$\overline{h}_x : t_x \mapsto \int_{T_\rho(F_x)} dt_\rho \cdot h_x(t_x\,t_\rho) \qquad [\textit{resp. } \overline{h} : t \mapsto \int_{T_\rho(\mathbb{A})} dt_\rho \cdot h(t\,t_\rho)]$$

déduites par intégration des fonctions h_x [resp. h] localement constantes à support compact sur $E_x = E \otimes_F F_x$ [resp. $\mathbb{A}_E = E \otimes_F \mathbb{A}$].

(ii) *Les fonctions de type L global sur $T(\mathbb{A})$ vérifient la conjecture* V.2.

Remarque :

Pour que les hypothèses de surjectivité de ce corollaire soient vérifiées, il suffit d'après le "théorème 90" de Hilbert que $\rho_T^\vee : T_E \to T$ soit un épimorphisme et que son noyau T_ρ soit de la forme

$$T_\rho \cong \mathrm{Res}_{E'/F}\, \mathbb{G}_m$$

pour une certaine F-algèbre séparable E'. □

À partir de ce corollaire, on démontre au paragraphe IX de [Lafforgue, 2014] :

Théorème V.6. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5 *ci-dessus, le groupe réductif G muni de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ vérifie la conjecture* V.2 *après moyennisation par les opérateurs de coefficients unipotents constants*

$$\int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du\,.$$

Autrement dit, pour toute fonction produit

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est "de type L global relatif à ρ", et pour sa ψ-transformée de Fourier relative à ρ

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widehat{h}_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a :

(i) *Pour toute place $x_0 \in |F| - S_\rho$ en laquelle le facteur local h_x [resp. $\widehat{h}_x$] de h [resp. $\widehat{h}$] est sphérique, la série formelle*

$$\sum_{N,N'\in\mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} \left(h_{x_0}^{N,N'} \otimes \left(\bigotimes_{x\neq x_0} h_x \right) \right) (\gamma u)$$

$$\text{[resp.} \quad \sum_{N,N'\in\mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} \left(\widehat{h}_{x_0}^{N,N'} \otimes \left(\bigotimes_{x\neq x_0} \widehat{h}_x \right) \right) (u^{-1}\,\gamma)\text{]}$$

est une fraction rationnelle, et sa "valeur régularisée" en $Z = 1$ ne dépend pas du choix de la place x_0.

(ii) *Les deux valeurs régularisées en $Z = 1$ associées dans* (i) *à h et $\widehat{h}$ sont égales.*

□

Rappelons que l'on cherche à construire à partir de la fonction "cuspidale"

$$K_\psi^{G,\rho} : (G\times G\times Q_r)(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

une fonction complémentaire "non cuspidale"

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G\times G\times Q_r)(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telle que la somme

$$K_{\psi}^{G,\rho} + K_{\psi}^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

soit invariante à gauche par $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)$ tout entier.

Une telle construction est réalisée dans le chapitre VIII de [Lafforgue, 2012] dans le cas du transfert partout non ramifié, c'est-à-dire lorsque $S_\rho = \emptyset$ et que $K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ est un noyau local du transfert local non ramifié par ρ en toute place $x \in |F|$.

Dans cette construction, la fonction complémentaire

$$K_{\psi}^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est définie à partir des "termes de bord" de la "formule de Poisson non linéaire relative à ρ" pour les fonctions de type L global sur le groupe croisé $G_{r-1}(\mathbb{A})$.

Afin de montrer que cette fonction complémentaire est invariante à gauche par $Q_r(F)$ et "non cuspidale", on a besoin d'en savoir en peu plus sur le support de la fonctionnelle de Poisson "de bord"

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”} - \left(\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma) \right) = \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma) \right) - S(h)\,.$$

La formulation de cette propriété géométrique nécessaire à la construction demande de construire un objet géométrique auxiliaire, déjà introduit par Braverman et Kazhdan, le "semi-groupe dual" de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

On rappelle d'abord la définition des semi-groupes :

Définition V.7. –

Étant donné un groupe réductif G sur un corps k, un semi-groupe $\overline{G}$ de groupe G est une variété affine intègre qui contient G comme ouvert dense et telle que le morphisme de multiplication $G \times G \to G$ se prolonge en

$$\overline{G} \times \overline{G} \to \overline{G}\,.$$

Si G est un groupe réductif quasi-déployé sur un corps k, muni d'un tore maximal T défini sur k, l'adhérence schématique $\overline{T}$ de T dans un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G est une variété torique affine normale de tore T sur laquelle agit le groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$. On montre que, réciproquement, toute variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T sur laquelle agit $\mathfrak{S}_G$ provient d'un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G, unique à unique isomorphisme près. Par combinaison avec la théorie des variétés toriques, on a donc :

Proposition V.8. –

Soit un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps k, muni d'un tore maximal T défini sur k.

Se donner un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G sur k équivaut à se donner, dans le réseau X_T des caractères de T, un cône polyédral saturé $X_{\overline{T}}$ stable par l'action du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$ et par celle du groupe de Galois Γ_k ou, ce qui revient au même, son cône dual $X_{\overline{T}}^\vee$ dans le réseau $X_T^\vee$ des cocaractères de T.

□

Revenons maintenant à notre groupe réductif G quasi-déployé sur le corps de fonctions F, et à notre représentation de tranfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

qui induit un homomorphisme

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r\,.$$

On peut poser :

Définition V.9. –

On appelle "semi-groupe dual de la représentation ρ" le semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G associé au cône saturé $X_{\overline{T}}^{\vee}$ de $X_T^{\vee} = X_{\widehat{T}}$ engendré par les poids $\rho_T^1, \dots, \rho_T^r : \widehat{T} \to \mathbb{C}^\times$ de la représentation ρ ou, ce qui revient au même, par les $\mathfrak{S}_G$-orbites des plus hauts poids des facteurs irréductibles de $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Remarque :

Cette notion avait déjà été introduite par Braverman et Kazhdan, en des termes différents mais équivalents.

□

On note aussitôt :

Lemme V.10. –

(i) *Lorsque $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, le semi-groupe $\overline{G}$ dual de ρ n'est autre que le semi-groupe matriciel M_r.*

(ii) *Dans le cas général, et pour tout degré $r' \geq 2$, le semi-groupe $\overline{G}_{r'}$ dual de la représentation croisée*

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

s'identifie à la normalisation du sous-schéma fermé

$$\{(g, g') \in \overline{G} \times M_{r'} \mid \det_G(g) = \det(g')\}\,.$$

□

Intéressons-nous d'abord à la variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T qui définit le semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G. On a :

Lemme V.11. –

Supposons comme plus haut que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation de ses r vecteurs de base, définissant une F-algèbre séparable E de degré r.

Alors l'homomorphisme de tores

$$\rho_T^\vee : T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m \to T\,,$$

dual de $\rho_T : \widehat{T} \to \prod\limits_{1\leq i\leq r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_E$, se prolonge en un homomorphisme de variétés toriques

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1 \to \overline{T}$$

qui identifie $\overline{T}$ au quotient de $\overline{T}_E$ par le sous-tore T_ρ de T_E dual de $\widehat{T}_\rho = \mathrm{Coker}\left(\widehat{T} \xrightarrow{\rho_T} \widehat{T}_E\right)$.

Remarque :

L'énoncé signifie que les caractères bien définis sur $\overline{T}$ sont exactement les caractères bien définis sur $\overline{T}_E$ que le sous-tore T_ρ de T_E laisse invariants.

Il implique que tout point géométrique de $\overline{T}$ est image d'au moins un point géométrique de $\overline{T}_E$, et que deux points géométriques de $\overline{T}_E$ ont même image dans $\overline{T}$ si et seulement si les adhérences de leurs orbites sous l'action de T_ρ se rencontrent.

□

On déduit de ce lemme et du corollaire V.5 :

Corollaire V.12. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5, *considérons toujours le tore T muni de la représentation ρ_T : $\widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ à laquelle on associe le caractère $\det_{\rho_T} : T \to \mathbb{G}_m$ trivial.*

Alors, si $\overline{T}^{\leq 1}$ désigne l'ouvert de $\overline{T}$ réunion de T et des orbites de codimension 1, *les fonctions "de type L" local [resp. global] relatif à ρ_T*

$$\begin{array}{rcl} T(F_x) & \to & \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,, \\ \textit{[resp.}\quad T(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}\textit{]} \end{array}$$

se prolongent par continuité à $\overline{T}^{\leq 1}(F_x)$ [resp. $\overline{T}^{\leq 1}(\mathbb{A})$].

Remarque :

En fait, ces fonctions se prolongent par continuité à $\overline{T}^{\mathrm{reg}}(F_x)$ [resp. $\overline{T}^{\mathrm{reg}}(\mathbb{A})$] si $\overline{T}^{\mathrm{reg}} \supset \overline{T}^{\leq 1}$ désigne le plus grand ouvert de $\overline{T}$ au-dessus duquel le sous-tore T_ρ de T_E agit librement dans $\overline{T}_E$.

□

On sait d'après la théorie générale des semi-groupes normaux que les orbites de $\overline{G}$ sous la double action de G à gauche et à droite sont en nombre fini, et toutes localement fermées.

Elles sont engendrées par les orbites de $\overline{T}$ sous l'action de T.

Deux orbites de $\overline{T}$ engendrent la même orbite de $\overline{G}$ si et seulement si elles sont images l'une de l'autre par l'action du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$.

En particulier, les orbites de codimension 1 de $\overline{G}$ correspondent aux orbites de codimension 1 de $\overline{T}$, modulo l'action de $\mathfrak{S}_G$.

Utilisant ce fait, on peut démontrer à partir du corollaire V.12 :

Proposition V.13. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5 *ou du corollaire* V.12, *supposons en outre que*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

induit un isomorphisme

$$Z_{\widehat{G}}^F \xrightarrow{\sim} \widehat{Z}_\rho$$

de $Z_{\widehat{G}}^F = \{z \in Z_{\widehat{G}} \mid \sigma(z) = z\,,\ \forall\, \sigma \in \Gamma_F\}$ dans le commutateur $\widehat{Z}_\rho \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ de la représentation ρ.

Choisissons pour

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$$

l'unique caractère défini sur F tel que, pour toute composante ρ_T^i de $\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ qui est le plus haut poids de l'une des composantes irréductibles de $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, on ait

$$\langle \det_\rho, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle$$

où $\delta_B : B \to B/N_B = T \to \mathbb{G}_m$ désigne le caractère modulaire.

Alors, si $\overline{G}^{\leq 1}$ désigne l'ouvert de $\overline{G}$ réunion de G et des orbites de codimension 1, *on a :*

(i) *Les fonctions "de type L" local [resp. global] relatif à ρ*

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) & \to & \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,, \\ \textit{[resp.}\quad G(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}\textit{]} \end{array}$$

se prolongent par continuité à $G^{\leq 1}(F_x)$ [resp. $G^{\leq 1}(\mathbb{A})$].

(ii) *Pour tout degré $r' \geq 2$, les fonctions "de type L" local [resp. global] sur $G_{r'}(F_x)$, $x \in |F|$, [resp. $G_{r'}(\mathbb{A})$] se prolongent par continuité à l'ouvert de*

$$\begin{array}{rcl} \overline{G}_{r'}(F_x) & \subset & \overline{G}(F_x) \times M_{r'}(F_x) \\ \textit{[resp.} \quad \overline{G}_{r'}(\mathbb{A}) & \subset & \overline{G}(\mathbb{A}) \times M_{r'}(\mathbb{A})\textit{]} \end{array}$$

image réciproque de $\overline{G}^{\leq 1}(F_x)$ [resp. $\overline{G}^{\leq 1}(\mathbb{A})$].

Remarque :

Le fait que l'homomorphisme $Z_{\widehat{G}}^F \to \widehat{Z}_\rho$ induit par ρ soit un isomorphisme implique que les facteurs irréductibles de la représentation $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ apparaissent tous avec la multiplicité 1.

□

Cette proposition permet de compléter la conjecture V.2 par la conjecture suivante :

Conjecture V.14. –

Sous les hypothèses de la proposition V.13 *ci-dessus, on a :*

(i) *Pour toute fonction produit de type L global relatif à ρ sur $G(\mathbb{A})$,*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

la différence

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma) \text{”} - \sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$$

dépend linéairement des seules restrictions de chaque facteur h_x, $x \in |F|$, aux orbites de codimension 1 de $\overline{G}(F_x)$.

(ii) *Pour tout degré $r' \geq 2$, et pour toute fonction de type L global relatif à $\rho_{r'}$ sur $G_{r'}(\mathbb{A})$,*

$$h : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

la différence

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}_{r'}(F)} h(\gamma) \text{”} - \sum_{\gamma \in G_{r'}(F)} h(\gamma)$$

dépend linéairement des seules restrictions de h aux points de

$$\overline{G}_{r'}(\mathbb{A}) \subset \overline{G}(\mathbb{A}) \times M_{r'}(\mathbb{A})$$

de la forme

$$(m, \delta)$$

avec $m \in \overline{G}^{\leq 1}(\mathbb{A})$ et $\delta \in M_{r'}(F) - \mathrm{GL}_{r'}(F)$.

□

Le cas $r' = r-1$ de la conjecture V.14(ii) ci-dessus est ce que l'on a besoin de connaître sur la fonctionnelle de Poisson de bord

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}_{r-1}(F)} h(\gamma) \text{”} - \sum_{\gamma \in G_{r-1}(F)} h(\gamma)\,,$$

outre la formule de Poisson sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r-1}(F)} h(\gamma)\text{”} = \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r-1}(F)} \widehat{h}(\gamma)\text{”}$$

pour construire des termes complémentaires “non cuspidaux”

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G\times G\times Q_r)(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho} : (G\times G\times Q_r^{\mathrm{op}})(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

qui réalisent l'égalité

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_\psi^{G,\rho} + \widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}$$

et définissent des noyaux du transfert par ρ de la forme

$$K^{G,\rho} = K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Cette construction est réalisée, dans le cas partout non ramifié, au chapitre VIII de [Lafforgue, 2012].

Bibliographie

• A. Braverman et D. Kazhdan, 2000, “γ-functions of representations and lifting” (avec un appendice par V. Vologodsky), in “Visions in Mathematics”, GAFA 2000 Special Volume, Part I, p. 237-278.

• J.W. Cogdell et I.I. Piatetski-Shapiro, 1994, “Converse theorems for GL_n”, Publications mathématiques de l'IHES, numéro 79, p. 157-214.

• R. Godement et H. Jacquet, 1972, “Zeta functions of simple algebras”, LNM 260, Springer-Verlag.

• H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro et J.A. Shalika, 1983, “Rankin-Selberg convolutions”, American journal of mathematics 105, p. 367-464.

• H. Jacquet et J.A. Shalika, 1985, “A lemma on highly ramified ϵ-factors”, Mathematische Annalen 271, p. 319-332.

• L. Lafforgue, 2012, “Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires”, prépublication de l'IHÉS numéro M/12/28.

• L. Lafforgue, 2014, “Du transfert automorphe de Langlands aux formules de Poisson non linéaires”, texte en préparation bientôt disponible sur le site de l'auteur.

• C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, 1993, “Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein”, Progress in mathematics, volume 113, Birkhäuser.

• J. Tate, 1950, “Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions”, thèse de doctorat (Princeton) reproduite dans : J.W.S. Cassels et A. Fröhlich (éditeurs), “Algebraic number theory”, Academic Press (1967), p. 305-347.