II. Intégrales de Rankin-Selberg, facteurs L locaux et transformation de Fourier

Rappelons qu'on part d'une fonction localement constante

$$W_{(r)}^{\psi} K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

de la forme

$$(g_1, g_2, g) \mapsto W_{(r)}^{\psi}(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g_1^{-1} \gamma \, g_2, g) \, .$$

Les facteurs locaux $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$ sont des noyaux du transfert non ramifié. Le produit $\left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (\bullet, \bullet)$ est à supports compacts dans $G(\mathbb{A})$ en la première variable et de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ en la seconde variable, et il vérifie

$$\left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g, z g') = \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (\mu_G(z) g, g') \cdot \omega_\rho(z) \, , \quad \forall \, z \in \mathbb{A}^\times \, .$$

On cherche à comparer les deux fonctions sommes sur $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$

$$K_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, \delta g) \, ,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, \alpha_r \, \delta g) \, ,$$

et, si possible, à construire deux fonctions complémentaires

$$K_{\psi}^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, ,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, ,$$

vérifiant l'égalité $K_{\psi}^{G,\rho} + K_{\psi}^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho} + \widetilde{K}_{\psi}^{\overline{G},\rho}$.

Dans ce but, on considère une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et on forme les produits scalaires

$$K_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot K_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g' g) \cdot h(g') \, ,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot \widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g)\cdot h(g')\,.$$

Lemme II.1. –

Les produits scalaires $K_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g)$ *et* $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g)$ *se développent en*

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

où

$$W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$$

et

$$\widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$$

sont les produits des fonctions locales

$$G(F_x)\times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)\to\mathbb{C}\,,$$

respectivement définies en chaque place $x\in|F|$ *par les intégrales*

$$W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x\cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x^{-1}g_2, g'_x\, g)\cdot h_x(m_x'^{-1}\,g'_x)$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m_x,m'_x) &= \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x\cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x\,g_2, \alpha_r\, g'_x\, g)\cdot h_x(m'_x\,g'_x)\\ &= \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x\cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x\,g_2, w_r\,{}^t g_x'^{-1} g)\cdot h_x(m'_x\,w_{r-1}\,{}^t g_x'^{-1})\,.\end{aligned}$$

□

En toute place $x\in|F|-S\subset|F|-S_\rho$, le noyau $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ se décompose spectralement sous la forme

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g,g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda\cdot K_{\psi_x,\lambda}^{G,\rho}(g,g')$$

où, pour tout caractère unitaire $\lambda\in\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, $K_{\psi_x,\lambda}^{G,\rho}(\bullet,\bullet)$ est le produit de la fonction sphérique propre normalisée $\varphi_{x,\lambda}^G : G(F_x)\to\mathbb{C}$ et d'une fonction $W_\lambda : \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x)\to\mathbb{C}$ de type $\psi_{(r)}$-type de Whittaker qui vérifie

$$W_\lambda * \varphi'_x = ((\rho_x)_*(\lambda))(\varphi'_x)\cdot W_\lambda\,,\quad \forall\,\varphi'_x\in\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\,,$$

autrement dit qui appartient au $\psi_{(r)}$-modèle de Whittaker du caractère unitaire $(\rho_x)_*(\lambda)$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$.

Si le facteur local h_x en une telle place x de la fonction test h est sphérique, il admet quant à lui une décomposition spectrale de la forme

$$h_x(g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}=U(1)^{r-1}} dz\cdot S_x^{r-1}(h_x)(z)\cdot\varphi_{x,z}^{r-1}(g')\,,\quad g'\in\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)\,.$$

Un résultat fondamental de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika – l'équation fonctionnelle locale des intégrales de Rankin-Selberg – permet de donner des décompositions spectrales de $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ à partir de celles de $K^{G,\rho}_{\psi_x}$ et h_x, et de les relier par une équation fonctionnelle :

Théorème II.2. –

Soit $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$ une place en laquelle le facteur h_x de la fonction test h est sphérique. Alors :

(i) *Les deux fonctions $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ sur $(G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x)$ admettent des décompositions spectrales de la forme*

$$W^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}} dz \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, z^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x)\,,$$

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}} dz \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, z^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x)\,,$$

où

- *chaque fonction $W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ [resp. $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$] sur $G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ est élément de l'espace propre associé à la paire (λ, z) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$,*
- *la dépendance des $W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x)$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x)$, $m_x \in G(F_x)$, $m'_x \in \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$, en les valeurs propres $\lambda \in \widehat{T}^d_x$ et $z \in \widehat{T}_{r-1} = (\mathbb{C}^\times)^{r-1}$ est polynomiale,*
- *si les $(\rho_x)^i_*(\lambda)$, $1 \leq i \leq r$, désignent les r valeurs propres de Hecke du caractère $(\rho_x)_*(\lambda)$ de $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$, et les z_j, $1 \leq j \leq r-1$, désignent les $r-1$ valeurs propres de Hecke du caractère z de $\mathcal{H}^{r-1}_{x,\emptyset}$, $L_x(\rho, \lambda, z, Z)$ est le dénominateur*

$$L_x(\rho, \lambda, z, Z) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r-1}} \frac{1}{1 - (\rho_x)^i_*(\lambda) \cdot z_j \cdot Z}\,.$$

(ii) *On a les équations fonctionnelles*

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda^{-1},z^{-1}}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x) = W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x^{-1}, m_x'^{-1}) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \lambda, z, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où

$$\varepsilon_x(\rho, \lambda, z, \psi_x, Z) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r-1}} \varepsilon_x((\rho_x)^i_*(\lambda) \cdot z_j, \psi_x, Z)\,.$$

□

Afin de généraliser ce résultat au cas d'une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

on doit la décomposer spectralement.

On rappelle :

Proposition II.3. –

En n'importe quel rang $r \geq 1$, on a :

(i) *L'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires* π *de* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *se décompose comme une réunion disjointe de variétés algébriques réelles*

$$\mathrm{Im}\,[\pi_0]/\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$$

indexées par des paires $(\underline{r},\pi_0)$ *où*

- $\underline{r}$ *désigne une partition* $r = r_1 + \ldots + r_k$ *du rang* r*,*
- π_0 *est une représentation lisse admissible irréductible unitaire et de carré intégrable de* $\mathrm{GL}_{\underline{r}}(F_x) = \mathrm{GL}_{r_1}(F_x) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{r_k}(F_x)$*,*
- $[\pi_0]$ *est une variété algébrique complexe sur laquelle le tore complexe* $(\mathbb{C}^\times)^k$ *agit simplement transitivement,*
- $\mathrm{Im}\,[\pi_0]$ *est une sous-variété algébrique réelle compacte de* $[\pi_0]$ *sur laquelle le sous-tore* $U(1)^k$ *agit simplement transitivement,*
- $\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$ *est un groupe fini qui agit sur* $[\pi_0]$ *en respectant* $\mathrm{Im}\,[\pi_0]$.

Cela permet de parler de fonctions polynomiales sur cet espace : ce sont les fonctions nulles en dehors d'un nombre fini de composantes et dont la restriction à chaque composante $\mathrm{Im}\,[\pi_0]/\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$ *est polynomiale et se prolonge donc en un polynôme sur la variété complexe* $[\pi_0]$ *invariant par* $\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$.

(ii) *Cet espace est muni d'une mesure* $d\pi$*, dite "mesure de Plancherel", telle que toute fonction localement constante à support compact*

$$h_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

se décompose spectralement sous la forme

$$h_x(g) = \int d\pi \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in \mathrm{GL}_r(F_x)\,,$$

où

- *chaque* $h_{x,\pi} : \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ *est élément du sous-espace propre associé à* π*, c'est-à-dire est une combinaison linéaire de coefficients matriciels de* π*,*
- *chaque fonction* $\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$*,* $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$*, est un polynôme.*

$\square$

Ce rappel étant fait, on peut déduire de l'équation fonctionnelle locale de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika :

Théorème II.4. –

En n'importe quelle place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$*, considérons la décomposition spectrale*

$$h_x(\bullet) = \int d\pi \cdot h_{x,\pi}(\bullet)$$

de la fonction test localement constante à support compact $h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$*. Alors :*

(i) *Les deux fonctions* $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ *et* $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ *sur* $(G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x)$ *admettent des décompositions spectrales de la forme*

$$W^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho,\lambda^{-1},\pi^\vee,q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)\,,$$

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho,\lambda^{-1},\pi^\vee,q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)\,,$$

où

- *chaque fonction* $W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ *[resp.* $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$*] sur* $G(F_x)\times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ *est élément de l'espace propre associé à la paire* (λ,π) *de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de* $G(F_x)$ *et* $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$*,*
- *la dépendance de* $W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)$ *et* $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)$*,* $m_x\in G(F_x)$*,* $m'_x\in \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$*, en* $\lambda\in\widehat{T}^d_x$ *et* π *est polynomiale,*
- $L_x(\rho,\lambda,\pi,Z)$ *est le dénominateur*

$$L_x(\rho,\lambda,\pi,Z)=\prod_{1\le i\le r} L_x(\pi,(\rho_x)^i_*(\lambda)\cdot Z)\,.$$

(ii) *On a les équations fonctionnelles*

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda^{-1},\pi^\vee}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)=W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x^{-1},m'^{-1}_x)\cdot\varepsilon_x\left(\rho,\lambda,\pi,\psi_x,q_x^{-\frac12}\right)\cdot\chi_\pi(-1)^{r-1}$$

où

$$\varepsilon_x(\rho,\lambda,\pi,\psi_x,Z)=\prod_{1\le i\le r}\varepsilon_x(\pi,\psi_x,(\rho_x)^i_*(\lambda)\cdot Z)\,.$$

L'apparition des facteurs linéaires locaux $L_x(\pi,Z)$ et $\varepsilon_x(\pi,\psi_x,Z)$ dans les équations fonctionnelles de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika, et donc dans notre recherche de "noyaux" du transfert automorphe, incite à revoir rapidement la théorie de ces facteurs L_x et ε_x classiques associés, en tout rang $r\ge 1$, aux représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Les $L_x(\pi,Z)$ sont définis par la proposition suivante, au moyen du plongement de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ dans l'algèbre matricielle $M_r(F_x)$:

Proposition II.5. –

En n'importe quel rang $r\ge1$*, on a :*

(i) *Toute fonction localement constante à support compact*

$$f_x: M_r(F_x)\to\mathbb{C}$$

se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(g)=|\det(g)|_x^{-\frac r2}\cdot\int_\pi d\pi\cdot L_x\left(\pi^\vee,q_x^{-\frac12}\right)\cdot f_{x,\pi}(g)\,,\quad g\in\mathrm{GL}_r(F_x)\,,$$

où

- *chaque* $f_{x,\pi}:\mathrm{GL}_r(F_x)\to\mathbb{C}$ *est élément du sous-espace propre associé à* π*,*
- *chaque fonction* $\pi\mapsto f_{x,\pi}(g)$*,* $g\in\mathrm{GL}_r(F_x)$*, est un polynôme,*
- *sur chaque composante de l'espace des* π*,* $L_x(\pi,Z)$ *est l'inverse d'un polynôme* $L_x(\pi,Z)^{-1}$ *en* π *et* Z*, et vérifie*

$$\begin{aligned}&L_x(\pi,0)^{-1}=1\,,\quad\forall\,\pi\,,\\&L_x(\pi\otimes|\det(\bullet)|^s,Z)=L_x(\pi,q_x^{-s}\cdot Z)\,,\quad\forall\,s\in\mathbb{C}\,,\quad\forall\,\pi\,.\end{aligned}$$

(ii) *Pour toute famille de polynômes* $L'_x(\pi,Z)^{-1}$ *en* π *et* Z *qui vérifie les propriétés de* (i)*, les polynômes* $L_x(\pi,Z)^{-1}$ *divisent les polynômes* $L'_x(\pi,Z)^{-1}$*.* □

Le choix du caractère additif continu non trivial $\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$ définit un opérateur

$$f_x \mapsto \widehat{f_x} = \left[m' \mapsto \widehat{f_x}(m') = \int_{M_r(F_x)} dm \cdot f_x(m) \cdot \psi_x \left(\mathrm{Tr}\,(m\,m') \right) \right]$$

de ψ_x-transformation de Fourier dans l'espace des fonctions localement constantes à support compact $f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$.

Modulo multiplication par le caractère $g \mapsto |\det(g)|_x^r$ et changement de variable $g \mapsto g^{-1}$, cet opérateur commute avec les translations à gauche ou à droite par tout élément de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Il doit donc agir par multiplication par un scalaire sur l'espace des coefficients matriciels de toute représentation lisse admissible irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Tate dans le cas $r = 1$, puis Godement et Jacquet dans le cas $r \geq 2$, ont montré que ce scalaire a la forme

$$\frac{L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)}{L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)} \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, dans toute composante de l'espace des π,

$$\pi \mapsto \varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$$

est un polynôme inversible, autrement dit un monôme, en π et Z. Ce monôme est égal à 1 si π est non ramifiée et que le conducteur N_{ψ_x} de ψ_x est 0, et il vérifie

$$\varepsilon_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|^s, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi, \psi_x, q_x^{-s} \cdot Z)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, \pi\,.$$

Ainsi on a :

Proposition II.6. –

Pour toute fonction localement constante à support compact

$$f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

décomposée spectralement en

$$f_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot f_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$$

comme dans la proposition II.5(i)*, sa ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{f_x}$ admet la décomposition spectrale*

$$\widehat{f_x}(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot f_{x,\pi}(g^{-1})\,.$$

□

Revenons maintenant au groupe réductif quasi-déployé G sur F et à la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

Le conjecture I.2 de transfert par ρ peut être reformulée en la partie (i) de la conjecture suivante que l'on complète habituellement par la partie (ii) :

Conjecture II.7. –

(i) *Pour toute représentation automorphe* $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ *de* $G(\mathbb{A})$ *non ramifiée en dehors du sous-ensemble fini* $S \supset S_\rho$ *de* $|F|$*, il existe une représentation automorphe* $\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *telle que, en toute place* $x \in |F| - S$*, le facteur* π'_x *est non ramifié et s'identifie au caractère de* $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$ *image par* $(\rho_x)_*$ *du caractère* π_x *de* $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$*.*

(ii) *De plus, même en les places éventuellement ramifiées* $x \in S$*, le facteur* π'_x *de* π' *ne dépend que de* ρ *et du facteur* π_x *de* π*, si bien que, en toute place* $x \in |F|$*, on devrait pouvoir associer aux représentations locales* π_x *des facteurs* L_x *et* ε_x *non linéaires*

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\pi'_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi'_x, \psi_x, Z)\,.$$

□

Les facteurs $L_x(\rho, \pi_x, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$ ne sont pas faciles à définir a priori sur l'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires π_x de $G(F_x)$. Rappelons que, comme dans le cas linéaire, cet espace se décompose naturellement comme la réunion disjointe de variétés algébriques, quotients de tores par l'action de groupes finis. On s'attend certainement à ce que, sur chaque composante, $L_x(\rho, \pi_x, Z)^{-1}$ soit un polynôme en π_x et Z qui vaut 1 en $Z = 0$, et que $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$ soit un monôme en π_x et Z égal à 1 si $x \notin S_\rho$, π_x est non ramifié et $N_{\psi_x} = 0$.

Il n'est pas restrictif de supposer, comme nous le ferons toujours, que le groupe réductif G est muni d'un caractère bien défini sur F

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m$$

dont le cocaractère central correspondant du groupe dual

$$\widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \subset \widehat{G}\,,$$

composé avec $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, est égal à

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Alors les facteurs locaux non linéaires $L_x(\rho, \pi_x, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$ devront nécessairement vérifier

$$\begin{aligned} &L_x(\rho, \pi_x \otimes |\det_G(\bullet)|^s, Z) = L_x(\rho, \pi_x, q_x^{-s} \cdot Z)\,, \\ &\varepsilon_x(\rho, \pi_x \otimes |\det_G(\bullet)|^s, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, q_x^{-s} \cdot Z)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, \pi_x\,. \end{aligned}$$

Proposons la définition de travail suivante :

Définition II.8. –

En n'importe quelle place $x \in |F|$*, appelons ensemble des "représentations de type L (relatif à* ρ*) de* $G(F_x)$*" une réunion de composantes de l'espace des représentations lisses admissibles* π_x *de* $G(F_x)$ *sur lesquelles on sait définir a priori les facteurs non linéaires* $L_x(\rho, \pi_x, Z)$ *et* $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$*. On demande que cet ensemble soit stable par le passage aux représentations contragrédientes* $\pi_x \mapsto \pi_x^\vee$*.*

Remarque :

La règle de transfert de Langlands impose de ranger parmi les représentations de type L, en toute place non ramifiée $x \in |F| - S_\rho$, les représentations de $G(F_x)$ qui sont sphériques, c'est-à-dire correspondent à un caractère z_x de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$. Via l'homomorphisme $\rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ induit par ρ, tout tel caractère z_x induit un caractère $(\rho_x)_*(z_x)$ de $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$, de valeurs propres de Hecke les $(\rho_x)^i_*(z_x)$, $1 \leq i \leq r$, et on pose naturellement

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\rho, z_x, Z) = L_x((\rho_x)_*(z_x), Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x((\rho_x)^i_*(z_x), Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \varepsilon_x, Z) = \varepsilon_x(\rho, z_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x((\rho_x)_*(z_x), \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x((\rho_x)^i_*(z_x), \psi_x, Z)\,.$$

□

En dehors du cas central des représentations sphériques de $G(F_x)$ en les places non ramifiées $x \in |F| - S_\rho$, donnons d'autres exemples de types de représentations locales qu'il est possible de classer comme "représentations de type L".

Voyons d'abord les cas où le groupe de Galois Γ_F de F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation de ses r vecteurs de base. Cette action définit une F-algèbre E séparable de degré r dont le dual $\widehat{T}_E$ du tore multiplicatif $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m$ s'identifie à $\prod\limits_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_r$. L'homomorphisme Γ_F-équivariant induit par ρ

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = \prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_E$$

admet un homomorphisme dual bien défini sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

qui induit en toute place $x \in |F|$ un homomorphisme

$$T_E(F_x) \to T(F_x)$$

du groupe multiplicatif $T_E(F_x) = E_x^\times$ de la F_x-algèbre séparable $E_x = E \otimes_F F_x$ vers $T(F_x)$. On note enfin qu'en toute telle place $x \in |F|$, l'algèbre E_x est munie de la ψ_x-transformation de Fourier définie par le caractère $E_x \to \mathbb{C}^\times$ composé de $\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$ et de l'homomorphisme de trace $\mathrm{Tr} : E_x \to F_x$. Cela permet de définir les facteurs $L_x(\chi'_x, Z)$ et $\varepsilon_x(\chi'_x, \psi_x, Z)$ de tout caractère continu $\chi'_x : E_x^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Lemme II.9. –

Supposons comme ci-dessus que Γ_F agit sur $\mathbb{C}^r$ par permutation de ses r vecteurs de base, définissant ainsi une F-algèbre E et un homomorphisme $\rho_T^\vee : T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m \to T$.

Alors :

(i) *En toute place $x \in |F|$, tout caractère continu $\chi_x : T(F_x) \to \mathbb{C}^\times$ peut être considéré comme "de type L" relativement à la représentation de transfert $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, en posant*

$$L_x(\rho_T, \chi_x, Z) = L_x(\chi'_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi'_x, \psi_x, Z)\,,$$

si $\chi'_x : T_E(F_x) = E_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ désigne le composé de χ_x avec $T_E(F_x) \to T(F_x)$.

(ii) *En toute place $x \in |F|$, toute représentation lisse admissible π_x de $G(F_x)$ qui est l'induite normalisée d'un caractère χ_x du tore maximal $T(F_x)$, peut être considérée comme "de type L" relativement à ρ, en posant*

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\rho_T, \chi_x, Z)\,,$$
$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, Z)\,.$$

Pour l'exemple suivant, on a besoin de remplacer G par ses "groupes croisés" de degré $r' \geq 2$ que permet de définir le caractère $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$ déjà introduit.

Définition II.10. –

Soit un entier $r' \geq 2$.

(i) *Le "groupe croisé" de degré r' de G est défini comme le sous-groupe algébrique*

$$G_{r'} = \{(g, g') \in G \times \mathrm{GL}'_r \mid \det_G(g) = \det(g')\}\,.$$

C'est un groupe réductif dont le dual s'identifie au quotient

$$\widehat{G}_{r'} = (\widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}))/\mathbb{C}^\times$$

de $\widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})$ par le cocaractère central

$$\mathbb{C}^\times \ni z \mapsto (\widehat{\det}_G(z), z^{-1})\,.$$

(ii) *Le dual $\widehat{G}_{r'}$ de $G_{r'}$ est muni de la "représentation croisée"*

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

produit tensoriel de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et de la représentation standard de $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_{r'}$.

□

Nous pouvons énoncer :

Lemme II.11. –

Considérons un degré $r' \geq 2$ comme dans la définition II.10 *ci-dessus.*

(i) *En toute place $x \in |F|$, les représentations lisses admissibles irréductibles de $G_{r'}(F_x)$ sont les produits $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ d'une représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ et d'une représentation lisse admissible irréductible π'_x de $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$.*

(ii) *Si $x \in |F| - S_\rho$ est une place non ramifiée, et que π_x est sphérique et correspond donc à un caractère z_x de $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ dont le transfert $(\rho_x)_*(z_x)$ admet pour valeurs propres de Hecke les $(\rho_x)^i_*(z_x) \in \mathbb{C}^\times$, $1 \leq i \leq r$, on peut classer $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ parmi les représentations "de type L" relativement à $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$, en posant*

$$L_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x(\pi'_x, (\rho_x)^i_*(z_x) \cdot Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x(\pi'_x, \psi_x, (\rho_x)^i_*(z_x) \cdot Z)\,.$$

Remarque :

Cet exemple est particulièrement important lorsque $r' = r-1$. Dans ce cas en effet, les facteurs L_x et ε_x simples introduits ci-dessus coïncident avec les facteurs L_x et ε_x de paires

$$L_x(\rho, z_x, \pi'_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, z_x, \pi'_x, \psi_x, Z)\,,$$

qui apparaissent d'après Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika dans les équations fonctionnelles locales du théorème II.4.

□

Le lemme II.11 ci-dessus est naturellement complété par le lemme suivant :

Lemme II.12. –

Supposons comme dans le lemme II.9 *que* Γ_F *agit sur* $\mathbb{C}^r$ *par permutation de ses* r *vecteurs de base.*

Et considérons, en une place arbitraire $x \in |F|$*, les représentations lisses admissibles irréductibles* $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ *de* $G_{r'}(F_x)$ *telles que* π_x *est l'induite normalisée d'un caractère* χ_x *du tore maximal* $T(F_x)$*, et que la représentation* π'_x *de* $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ *est sphérique, avec pour valeurs propres de Hecke* $z'_1, \ldots, z'_r \in \mathbb{C}^\times$.

Alors on peut classer ces représentations $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ *parmi les représentations "de type* L*" relativement à* $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$ *en posant*

$$L_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, Z) = \prod_{1\le j\le r'} L_x(\rho_T, \chi_x, z'_j \cdot Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, \psi_x, Z) = \prod_{1\le j\le r'} \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, z'_j \cdot Z)\,.$$

□

Nous allons donner une dernière série importante de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$ (ou $G_{r'}(F_x)$, $r' \ge 2$), $x \in |F|$, qu'il est possible de classer a priori parmi les représentations "de type L" relativement à ρ (ou $\rho_{r'}$).

Pour cela, rappelons le résultat local fondamental suivant de Jacquet et Shalika :

Proposition II.13. –

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π'_x *de* $\mathrm{GL}_r(F_x)$*, de caractère central* $\chi_{\pi'_x} : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$*, et pour tout caractère* $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ *suffisamment ramifié en fonction de la ramification de* π'_x*, on a*

$$\begin{aligned}
&L_x(\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det), Z) = 1\,,\\
&\varepsilon_x(\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det), \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi'_x}\, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1}\,.
\end{aligned}$$

□

Rappelons que nous avons noté $\mu_G : \mathbb{G}_m \to Z_G \hookrightarrow G$ le cocaractère central de G dont le dual est le caractère composé

$$\widehat{\mu}_G : \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times\,,$$

et $\omega_\rho : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ le caractère automorphe qui correspond, via la théorie du corps de classes, au déterminant de l'action par ρ du groupe de Galois Γ_F sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$, notons $\chi_{\pi_x} : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ le caractère induit par π_x via le cocaractère central $\mu_G : F_x^\times \to G(F_x)$.

Selon la conjecture II.7(ii), on devrait pouvoir transférer par ρ toute telle représentation locale π_x de $G(F_x)$ en une représentation lisse admissible irréductible π'_x de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Si $x \in |F| - S_\rho$ et que π_x est non ramifiée, π'_x est déjà définie comme la représentation non ramifiée image de π_x par $\rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$, et on connaît d'après le corollaire I.10 la formule

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho \, .$$

Par compatibilité avec le transfert global de la conjecture II.7(i), l'hypothétique transfert local π'_x de toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ en n'importe quelle place $x \in |F|$ doit nécessairement vérifier la même formule

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho \, .$$

Enfin, la ramification de π'_x devrait être bornée en fonction de celle de π_x.

On parvient ainsi à l'énoncé suivant :

Corollaire II.14. –

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ en une place arbitraire $x \in |F|$, et pour tout caractère $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ suffisamment ramifié en fonction de la ramification de π_x, on peut classer le produit

$$\pi_x \otimes \omega_x = \pi_x \otimes (\omega_x \circ \det_G)$$

parmi les représentations "de type L" relativement à ρ, en posant

$$\begin{aligned} &L_x(\rho, \pi_x \otimes \omega_x, Z) = 1 \, , \\ &\varepsilon_x(\rho, \pi_x \otimes \omega_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi_x}\, \omega_\rho\, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1} \, . \end{aligned}$$

Remarque :

Tout comme la remarque qui suit la définition II.8 et comme le lemme II.9, le corollaire II.14 ci-dessus s'applique aux groupes croisés $G_{r'}$, $r' \geq 2$, aussi bien qu'à G.

□

Une fois que l'on a précisé en chaque place $x \in |F|$ ce que l'on entendra par "représentation de type L relativement à ρ [resp. $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$] sur $G(F_x)$ [resp. $G_{r'}(F_x)$, $r' \geq 2$]", on est en mesure de définir une ψ_x-transformation de Fourier locale relative à ρ [resp. $\rho_{r'}$] en chaque telle place x :

Définition II.15. –

Considérons un caractère algébrique bien défini sur F

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m \, .$$

En n'importe quelle place $x \in |F|$, on pose :

(i) *Appelons fonction "de type L" (relatif à ρ) sur $G(F_x)$ toute fonction*

$$h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

telle que :

(1) *h_x est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*

(2) *la restriction de h_x à*

$$\{g \in G(F_x) \mid v_x(\det_G(g)) = N\}$$

est à support compact pour tout $N \in \mathbb{Z}$, et elle est nulle si $N \ll 0$,

(3) *h_x admet une décomposition spectrale de la forme*

$$h_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

où

- *π décrit l'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ qui sont "de type L" (relativement à ρ) et admettent donc des facteurs $L_x(\rho,\pi,Z)$ et $\varepsilon_x(\rho,\pi,\psi_x,Z)$ bien définis a priori,*
- *cet espace est muni de la mesure de Plancherel $d\pi$,*
- *pour toute π, la fonction $h_{x,\pi} : G(F_x) \to \mathbb{C}$ est élément de l'espace propre associé à π, autrement dit, c'est une combinaison linéaire de coefficients matriciels de π,*
- *pour tout $g \in G(F_x)$, la fonction $\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$ est polynomiale sur l'espace des représentations π.*

(ii) *Pour toute fonction h_x de type L comme dans* (i),

$$h_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

on appelle ψ_x-transformée de Fourier de h_x (relativement à ρ) la fonction

$$\widehat{h}_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$\widehat{h}_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g^{-1})\,, \quad g \in G(F_x)\,.$$

(iii) *Si $x \in |F| - S_\rho$ est une place non ramifiée, on appelle "fonction de type L standard (relatif à ρ) sur $G(F_x)$" l'unique fonction sphérique*

$$G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$g \mapsto |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varphi_{x,\lambda}^G(g)\,.$$

Elle est sa propre ψ_x-transformée de Fourier si le conducteur N_{ψ_x} de ψ_x est 0.

Remarques :

(i) La ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{h}_x$ d'une fonction "de type L" h_x vérifie par définition les propriétés (1) et (3) de (i). On peut montrer qu'elle vérifie aussi la propriété (2), ce qui signifie qu'elle est elle-même "de type L".

(ii) Le caractère $\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$ sera choisi plus tard en fonction de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, il faut prendre

$$\det_\rho = (\det)^{r-1}$$

pour que les fonctions localement constantes à support compact

$$f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

soient les fonctions "de type L" au sens de (i) et que leur ψ_x-transformation de Fourier linéaire coïncide avec la ψ_x-transformation de Fourier de (ii). La "fonction de type L standard" au sens de (iii) n'est alors autre que la fonction caractéristique de $M_r(O_x)$.

(iii) La présente définition II.15 s'applique aux groupes croisés $G_{r'}$, $r' \geq 2$, aussi bien qu'à G. On prendra

$$\det_{\rho_{r'}}(g, g') = \det_\rho(g) \cdot \det(g')^{r'-1}\,, \quad \forall\,(g, g') \in G_{r'}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r'}(F_x)\,.$$