

### III. Principe de functorialité et formules de Poisson non linéaires

Commençons par rappeler la formule de Poisson linéaire sur l'espace matriciel adélique  $M_r(\mathbb{A})$ ,  $r \geq 1$ , et ses conséquences pour les fonctions  $L$  linéaires globales des représentations automorphes de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ .

Le choix du caractère additif continu non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

a permis de définir en toute place  $x \in |F|$  l'automorphisme de  $\psi_x$ -transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

de l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur  $M_r(F_x)$ .

Le produit de ces transformations

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto \widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x$$

définit l'automorphisme de  $\psi$ -transformation de Fourier des fonctions localement constantes à support compact sur  $M_r(\mathbb{A})$ .

La propriété globale essentielle de cet opérateur est qu'il laisse invariante la "fonctionnelle de Poisson"

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma).$$

Autrement dit, on a :

**Proposition III.1.** –

*Toute fonction localement constante à support compact*

$$f : M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

*satisfait la "formule de Poisson"*

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

□

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , on pose

$$L(\pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien définie a priori en tant que série formelle en  $Z$ . En presque toute place  $x$ , le facteur local  $\pi_x$  de  $\pi$  est une représentation non ramifiée et on a  $\varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z) = 1$ . Il en résulte que le produit

$$\varepsilon(\pi, \psi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)})$$

est bien défini en tant que monôme en  $Z$ .

Cette théorie des facteurs  $L$  et  $\varepsilon$  globaux s'applique en particulier aux représentations automorphes irréductibles de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ .

Tate en rang  $r = 1$ , puis Godement et Jacquet en rang  $r \geq 2$ , ont montré que la formule de Poisson sur  $M_r(\mathbb{A})$  implique :

**Théorème III.2.** –

Pour toute représentation automorphe irréductible cuspidale  $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , on a :

(i) Le produit

$$L(\pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, q_x^{-s})$$

est absolument convergent dès que la partie réelle  $\mathrm{Re}(s)$  de  $s \in \mathbb{C}$  est assez grande.

(ii) La fonction holomorphe que ce produit définit dans sa zone de convergence se prolonge analytiquement à  $\mathbb{C}$  tout entier. Dans le cas présent où  $F$  est un corps de fonctions, c'est même une fraction rationnelle en  $q^{-s}$ .

(iii) Cette fonction analytique satisfait l'équation fonctionnelle

$$L(\pi^\vee, q^{-(1-s)}) = L(\pi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\pi, \psi, q^{-s}).$$

(iv) Cette fonction analytique ne peut admettre de pôles que si  $r = 1$  et  $\pi$  est un caractère automorphe

$$\mathbb{A}^\times / F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui se factorise à travers l'homomorphisme de degré

$$\mathrm{deg} : a = (a_x)_{x \in |F|} \mapsto \sum_{x \in |F|} \mathrm{deg}(x) \cdot v_x(a_x),$$

autrement dit qui est de la forme

$$a \mapsto |a|^{s_0}.$$

Les pôles d'un tel caractère sont simples.

□

Pour passer des représentations automorphes cuspidales de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$  aux représentations automorphes arbitraires, on a besoin de la proposition suivante :

**Proposition III.3.** –

(i) (Langlands) Pour toute représentation automorphe irréductible  $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , il existe une

partition  $r = r_1 + \dots + r_k$  du rang  $r$  et des représentations automorphes irréductibles cuspidales  $\pi_1 = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_{1,x}, \dots, \pi_k = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_{k,x}$  de  $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}), \dots, \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$  telles que  $\pi$  soit un sous-quotient de l'induite normalisée de la représentation automorphe  $\pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k$  de  $(\mathrm{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{r_k})(\mathbb{A})$ .

De plus, la ramification de  $\pi_{1,x}, \dots, \pi_{k,x}$  en n'importe quelle place  $x \in |F|$  est bornée en fonction de celle de  $\pi_x$  et, en particulier,  $\pi_{1,x}, \dots, \pi_{k,x}$  sont non ramifiées si  $\pi_x$  est non ramifiée.

(ii) (Godement, Jacquet) Dans la situation de (i), la fraction rationnelle en n'importe quelle place  $x \in |F|$

$$L_x(\pi_x, Z)$$

est le produit de la fraction rationnelle

$$\prod_{1 \leq i \leq k} L_x(\pi_{i,x}, Z)$$

et d'un polynôme en  $Z$  qui vaut 1 lorsque  $\pi_x$  et donc aussi les  $\pi_{i,x}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sont non ramifiées.

De plus, le quotient

$$\frac{L_x(\pi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi_x^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)}$$

est toujours égal au produit de quotients

$$\prod_{1 \leq i \leq k} \frac{L_x(\pi_{i,x}, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi_{i,x}^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)}.$$

□

On déduit de cette proposition et du théorème III.2 :

**Corollaire III.4.** –

Toute représentation automorphe irréductible  $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$  vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème III.2.

Si de plus le facteur  $\pi_x$  de  $\pi$  en au moins une place  $x$  est le produit

$$\pi_x = \pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det)$$

d'une représentation lisse admissible irréductible de  $\mathrm{GL}_r(F_x)$  de ramification bornée et d'un caractère  $\mathrm{GL}_r(F_x) \xrightarrow{\det} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$  suffisamment ramifié en fonction de cette borne, la fonction  $L$  globale de  $\pi$

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\pi, q^{-s})$$

n'a pas de pôle.

□

Revenons maintenant au groupe réductif quasi-déployé  $G$  sur  $F$  et à la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de  $G(\mathbb{A})$  dont tous les facteurs locaux  $\pi_x$ ,  $x \in |F|$ , sont “de type  $L$ ” relativement à  $\rho$ , on pose

$$L(\rho, \pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien définie a priori en tant que série formelle en  $Z$ . En presque toute place  $x$ , le facteur local  $\pi_x$  de  $\pi$  est une représentation non ramifiée et on a  $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = 1$ . Il en résulte que le produit

$$\varepsilon(\rho, \pi, \psi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)})$$

est bien défini en tant que monôme en  $Z$ .

Cette théorie des facteurs  $L$  et  $\varepsilon$  globaux relatifs à  $\rho$  s'applique en particulier aux représentations automorphes irréductibles de  $G(\mathbb{A})$  dont tous les facteurs locaux sont “de type  $L$ ” relativement à  $\rho$ .

Le corollaire III.4 ci-dessus implique :

**Corollaire III.5.** –

*Supposons que la conjecture II.7 de transfert automorphe global par  $\rho$  et de compatibilité avec les transferts locaux en toutes les places soit connue.*

*On en déduit alors que, pour toute représentation automorphe irréductible  $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $G(\mathbb{A})$  dont tous les facteurs locaux  $\pi_x$  sont “de type  $L$ ” relativement à  $\rho$ , on a :*

(i) *Le produit*

$$L(\rho, \pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, q_x^{-s})$$

*est absolument convergent dès que la partie réelle  $\operatorname{Re}(s)$  de  $s \in \mathbb{C}$  est assez grande.*

(ii) *La fonction holomorphe que ce produit définit dans sa zone de convergence se prolonge analytiquement à  $\mathbb{C}$  tout entier. Dans le cas présent où  $F$  est un corps de fonctions, c'est même une fraction rationnelle en  $q^{-s}$ .*

(iii) *Cette fonction analytique satisfait l'équation fonctionnelle*

$$L(\rho, \pi^\vee, q^{-(1-s)}) = L(\rho, \pi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\rho, \pi, \psi, q^{-s}).$$

(iv) *Si de plus le facteur  $\pi_x$  de  $\pi$  en au moins une place  $x$  est le produit*

$$\pi_x = \pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det_G)$$

*d'une représentation lisse admissible irréductible de  $G(F_x)$  de ramification bornée et d'un caractère  $G(F_x) \xrightarrow{\det_G} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$  suffisamment ramifié en fonction de cette borne, la fonction  $L$  globale relative à  $\rho$  de  $\pi$*

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\rho, \pi, q^{-s})$$

*n'a pas de pôle.*

□

Le but principal de ce paragraphe est de montrer, via le corollaire III.5 ci-dessus, que la conjecture II.7 de transfert automorphe par  $\rho$  implique une sorte de “formule de Poisson non linéaire relative à  $\rho$  sur  $G(\mathbb{A})$ ” qui généralise au moins partiellement la formule de Poisson linéaire classique de la proposition III.1.

Pour cela, nous devons d'abord introduire la notion de “fonction de type  $L$  global (relatif à  $\rho$ ) sur  $G(\mathbb{A})$ ” et la  $\psi$ -transformation de Fourier de ces fonctions.

**Définition III.6.** –

*Considérant un caractère algébrique bien défini sur  $F$*

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

*comme dans la définition II.15, on pose :*

(i) On appelle fonction “de type  $L$ ” (relatif à  $\rho$ ) sur  $G(\mathbb{A})$  toute combinaison linéaire de fonctions produits

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont tous les facteurs locaux  $h_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$  sont “de type  $L$ ” (relatif à  $\rho$ ) sur  $G(F_x)$  au sens de la définition II.15(i) et dont presque tous les facteurs  $h_x$ ,  $x \in |F| - S_\rho$ , sont égaux à “la fonction de type  $L$  standard” de la définition II.15(iii).

(ii) On appelle  $\psi$ -transformation de Fourier relative à  $\rho$  l’unique opérateur linéaire de l’espace des fonctions de type  $L$  global, qui transforme toute fonction produit élément de cet espace

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$$

en le produit des  $\psi_x$ -transformées de Fourier (relativement à  $\rho$ ) de ses facteurs  $h_x$ , au sens de la définition II.15(ii),

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{h}_x.$$

**Remarque :**

Il résulte de la définition II.15 que toute fonction de type  $L$  global

$$h = G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A})$ .

Sa restriction à

$$\{g \in G(\mathbb{A}) \mid \deg(\det_G(g)) = N\}$$

est à support compact pour tout  $N \in \mathbb{Z}$ , et elle est nulle si  $N \ll 0$ .

Enfin, la  $\psi$ -transformée de Fourier (relative à  $\rho$ )  $\widehat{h}$  de  $h$  est elle-même de type  $L$  global. □

D’après cette remarque, les sommes  $\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$  et  $\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma)$  associées à toute fonction de type  $L$  global sur  $G(\mathbb{A})$  sont finies. Dans le but de les relier, nous avons besoin de rappeler l’expression spectrale de la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$$

qu’implique, pour toute fonction localement constante à support compact  $h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ , le théorème de décomposition spectrale de Langlands.

Le groupe réductif quasi-déployé  $G$  est muni d’une paire de Borel  $(T, B)$  bien définie sur  $F$ . Un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  défini sur  $F$  est dit “standard” s’il contient  $B$  ; il possède un unique sous-groupe de Levy  $M = M_P$  contenant  $T$ . Les sous-groupes de Levy  $M \supset T$  obtenus de cette façon sont dits “standard” ; chacun est le sous-groupe de Levy  $M_P$  d’un unique sous-groupe parabolique standard  $P = P_M$ .

La décomposition spectrale de Langlands sur  $G(F) \backslash G(\mathbb{A})$  est paramétrée par les “paires discrètes”  $(M, \pi)$  constituées de

- un sous-groupe de Levy standard  $M$ ,

- une représentation automorphe irréductible unitaire “discrète”  $\pi$  de  $M(\mathbb{A})$ , c’est-à-dire une représentation lisse admissible irréductible de  $M(\mathbb{A})$  dont le caractère central

$$\chi_\pi : Z_M(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

est unitaire, et qui apparaît comme facteur direct de l’espace de Hilbert

$$L^2_{\chi_\pi}(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$$

des fonctions

$$\varphi : M(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

invariantes à gauche par le sous-groupe discret  $M(F)$  et qui vérifient

$$\varphi(\mu g) = \chi_\pi(\mu) \cdot \varphi(g), \quad \forall \mu \in Z_M(\mathbb{A}), \quad \forall g \in M(\mathbb{A}).$$

Pour une telle paire discrète  $(M, \pi)$ , la représentation  $\pi$  apparaît avec une multiplicité finie dans l’espace  $L^2_{\chi_\pi}(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ . On note  $L^2_\pi(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$  le sous-espace correspondant.

Si  $P = P_M$  est le sous-groupe parabolique standard associé à  $M$ , si

$$\delta_P : P \rightarrow P/N_P \cong M_P = M \rightarrow \mathbb{G}_m$$

désigne le caractère modulaire par lequel  $P$  ou  $M$  agissent sur la puissance extérieure maximale de l’espace Lie  $(N_P)$ , et si  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$  est un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A})$ , on note encore

$$L^2_\pi(M(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K)$$

l’espace des fonctions de carré intégrable

$$\varphi : M(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que, pour tout  $g \in G(\mathbb{A})$ , la fonction induite

$$M(F)\backslash M(\mathbb{A}) \ni m \mapsto |\delta_P(m)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \varphi(mg)$$

soit élément de l’espace  $L^2_\pi(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ .

Cet espace

$$L^2_\pi(M(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K)$$

est nécessairement de dimension finie. On peut le munir d’une base orthonormée  $\mathcal{B}_K(M, \pi)$ .

Pour tout sous-groupe de Levy standard  $M$ , on note  $\Lambda_M$  le réseau des caractères algébriques bien définis sur  $F$

$$M \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

$\Lambda_M^\vee$  son réseau dual et  $\widehat{\Lambda}_M$  le tore complexe dont le réseau des caractères est égal à  $\Lambda_M^\vee$ .

Il existe un unique homomorphisme

$$\deg_M : M(\mathbb{A}) \rightarrow \Lambda_M^\vee$$

tel que, pour tout élément  $\chi : M \rightarrow \mathbb{G}_m$  de  $\Lambda_M$ , on ait

$$\langle \chi, \deg_M(m) \rangle = \deg(\chi(m)), \quad \forall m \in M(\mathbb{A}).$$

L’image de  $\deg_M$  est d’indice fini dans  $\Lambda_M^\vee$  et son noyau contient le sous-groupe discret  $M(F)$  de  $M(\mathbb{A})$ .

On note  $\text{Im } \widehat{\Lambda}_M$  le plus grand sous-tore réel compact de  $\widehat{\Lambda}_M$ . Il est constitué des éléments  $z \in \widehat{\Lambda}_M$  qui sont unitaires au sens que

$$|\mu(z)| = 1, \quad \forall \mu \in \Lambda_M^\vee.$$

En toute place  $x \in |F|$  où  $G$  est non ramifié, notons

$$K_x^0 = G(O_x).$$

En les places  $x$  où  $G$  est ramifié, choisissons un sous-groupe ouvert compact  $K_x^0$  de  $G(F_x)$  tel que

$$G(F_x) = B(F_x) \cdot K_x^0,$$

puis notons  $K^0 = \prod_{x \in |F|} K_x^0$ .

Tout élément  $z \in \widehat{\Lambda}_M$  définit un caractère composé

$$M(\mathbb{A}) \xrightarrow{\text{deg}_M} \Lambda_M^\vee \xrightarrow{z} \mathbb{C}^\times$$

invariant à la fois par le sous-groupe discret  $M(F)$  et par n'importe quel sous-groupe ouvert compact de  $M(\mathbb{A})$ .

Comme  $G(\mathbb{A}) = B(\mathbb{A}) \cdot K^0 = P_M(\mathbb{A}) \cdot K^0$ , il se prolonge de manière unique en une fonction

$$N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K^0 \rightarrow \mathbb{C}$$

que l'on notera encore  $z$ . Cette fonction est invariante à gauche par  $M(F)$ .

Si  $(M, \pi)$  est une paire discrète, on note

$$\pi_z$$

les représentations obtenues comme produit tensoriel de  $\pi$  et d'un caractère  $z \in \widehat{\Lambda}_M$ . Les  $(M, \pi_z)$  sont encore des paires discrètes et, si  $K$  est un sous-groupe ouvert de  $K^0$ , chaque

$$\varphi \mapsto z \cdot \varphi$$

définit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$L_\pi^2(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K) \xrightarrow{\sim} L_{\pi_z}^2(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K).$$

Si  $\pi$  est unitaire,  $\pi_z$  est unitaire si et seulement si  $z$  est élément de  $\text{Im } \widehat{\Lambda}_M$ . On note  $[\pi]$  la variété complexe des représentations de la forme  $\pi_z$  et, si  $\pi$  est unitaire, on note  $\text{Im } [\pi]$  la sous-variété réelle compacte de  $[\pi]$  constituée des représentations unitaires.

Deux paires discrètes  $(M, \pi)$  et  $(M', \pi')$  sont dites "équivalentes" si elles sont transformées l'une dans l'autre par un élément du groupe de Weyl  $F$ -rationnel  $\mathfrak{S}_G^F$  de  $G$ .

Elles sont dites "faiblement équivalentes" s'il existe  $z \in \widehat{\Lambda}_M$  tel que les paires discrètes  $(M, \pi_z)$  et  $(M', \pi')$  soient équivalentes.

Pour toute paire discrète  $(M, \pi)$ , on note

$$\text{Fixe}(M, \pi)$$

le groupe fini des paires  $(\sigma, z) \in \mathfrak{S}_G^F \times \widehat{\Lambda}_M$  telles que

$$w \cdot M \cdot w^{-1} = M \quad \text{et} \quad \pi_z \cong w(\pi).$$

Rappelons enfin la construction des séries d'Eisenstein.

Si  $M$  est un sous-groupe de Levy standard de  $G$ , notons  $\Delta_{B,M}^\vee$  l'ensemble des éléments non nuls de  $\Lambda_M^\vee$ , c'est-à-dire des formes linéaires non triviales sur  $\Lambda_M \subset X_T$  qui sont induites par une coracine simple  $\alpha^\vee \in \Delta_B^\vee$ .

Pour toute paire discrète  $(M, \pi)$ , tout sous-groupe ouvert  $K$  de  $K^0$ , toute fonction

$$\varphi \in L_\pi^2(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K)$$

et tout élément  $g \in G(\mathbb{A})$ , la série

$$\sum_{\gamma \in P_M(F) \backslash G(F)} (z \cdot \varphi)(\gamma g)$$

converge absolument pour tout élément  $z \in \widehat{\Lambda}_M$  tel que les modules

$$|\alpha^\vee(z)|, \quad \alpha^\vee \in \Delta_{B,M}^\vee,$$

soient assez grands (indépendamment de  $g$ ).

Elle converge vers une limite

$$E(z \cdot \varphi)(g)$$

qui est une fraction rationnelle en  $z \in \widehat{\Lambda}_M$ , appelée série d'Eisenstein, que l'on peut aussi noter

$$E_{\pi_z}(\varphi)(g).$$

Ces fractions rationnelles sur  $[\pi]$  peuvent s'écrire comme le quotient de deux polynômes dont le second, le dénominateur, ne dépend pas de  $g \in G(\mathbb{A})$  et ne s'annule pas sur la sous-variété réelle  $\text{Im}[\pi]$  de  $[\pi]$  constituée des représentations unitaires ni, plus généralement, en les représentations de la forme

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|^s, \quad \pi' \in \text{Im}[\pi], \quad s \in \mathbb{C}.$$

Nous avons maintenant rappelé tous les ingrédients nécessaires à l'énoncé du théorème de décomposition spectrale de Langlands :

### **Théorème III.7.** –

Soit un sous-groupe ouvert  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$  du sous-groupe ouvert compact  $K^0 = \prod_{x \in |F|} K_x^0$  de  $G(\mathbb{A})$ .

Alors les paires discrètes  $(M, \pi)$  telles que l'espace

$$L_\pi^2(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K)$$

ne soit pas nul forment un ensemble fini de classes d'équivalence faible, et on peut choisir un ensemble fini de paires discrètes unitaires  $(M, \pi_0)$  qui représentent ces classes.

Pour toute fonction à support compact

$$h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

invariante à gauche et à droite par  $K$ , et pour tous éléments  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ , on a

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M, \pi_0)} \frac{1}{|\text{Fixe}(M, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1)$$

où  $d\pi$  désigne la mesure de volume 1 sur chaque  $\text{Im}[\pi_0]$  qui est invariante par le tore réel compact  $\text{Im} \widehat{\Lambda}_M$ .



**Remarque :**

Plus synthétiquement, la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2)$$

a la forme

$$\sum_{(M, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2)$$

où chaque  $(g_1, g_2) \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$  est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes  $\pi^\vee$  et  $\pi$ , et chaque  $\pi \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$  est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de  $g_1$  et  $g_2$  et ne s'annule pas en les représentations de la forme

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|^s, \quad \pi' \in \text{Im}[\pi_0], \quad s \in \mathbb{C}.$$

□

Si  $h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction de type  $L$  global (relatif à  $\rho$ ) au sens de la définition III.6, la somme finie

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$$

ne change pas si l'on multiplie la fonction  $h$  par le caractère  $|\det_G(\bullet)|^s$  pour n'importe quel  $s \in \mathbb{C}$ .

Pour toute famille d'entiers presque nulle  $(N_x \in \mathbb{Z})_{x \in |F|}$ , la restriction de la fonction  $h \cdot |\det_G(\bullet)|^s$  à

$$\{g \in G(\mathbb{A}) \mid v_x(\det_G(g)) = N_x, \forall x \in |F|\}$$

est à support compact, et on peut lui appliquer le théorème III.7 ci-dessus. En faisant la somme sur toutes les familles presque nulles d'entiers  $(N_x)_{x \in |F|}$ , on obtient différentes séries, qui sont toutes convergentes si  $\text{Re}(s)$  est assez grande. On démontre ainsi :

**Corollaire III.8. –**

*Soit une fonction de type  $L$  global (relatif à  $\rho$ )*

$$h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

*qui est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$  de  $K^0 = \prod_{x \in |F|} K_x^0$ .*

*Faisant décrire à  $(M, \pi_0)$  l'ensemble fini de représentants associé à  $K$  dans le théorème III.7, on a :*

(i) *Pour tous  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ , la somme*

$$|\det_G(g_1^{-1} g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_1^{-1} g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2)$$

*s'écrit, pour n'importe quel  $s \in \mathbb{C}$  de partie réelle  $\text{Re}(s)$  assez grande,*

$$\sum_{(M, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

où

- *chaque  $(g_1, g_2) \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$  est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes  $\pi^\vee$  et  $\pi$ ,*

- chaque  $\pi \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$  est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de  $g_1$  et  $g_2$  et ne s'annule pas en les représentations de la forme

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|, \quad \pi' \in \text{Im}[\pi_0], \quad s \in \mathbb{C}.$$

(ii) De même, pour tous  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ , la somme

$$|\det_G(g_2^{-1}g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_2^{-1}g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(g_2^{-1}\gamma g_1)$$

s'écrit, pour n'importe quel  $s \in \mathbb{C}$  de partie réelle  $\text{Re}(s)$  assez petite

$$\sum_{(M, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi, q^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot \widehat{h}_{\pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s}(g_2, g_1)$$

où

- chaque  $(g_2, g_1) \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1)$  est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes  $\pi$  et  $\pi^\vee$ ,
- chaque  $\pi \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1)$  est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de  $g_1$  et  $g_2$  et ne s'annule pas en les représentations de la forme

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|, \quad \pi' \in \text{Im}[\pi_0], \quad s \in \mathbb{C}.$$

**Remarque :**

Il résulte de la définition de la  $\psi$ -transformation de Fourier relative à  $\rho$  que, pour tous  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$  et tout représentant  $(M, \pi_0)$ , les fractions rationnelles sur  $[\pi_0]$

$$\pi \mapsto h_\pi(g_1, g_2)$$

et

$$\pi \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1)$$

sont reliées par la formule

$$h_{\pi^\vee}(g_2, g_1) = h_\pi(g_1, g_2) \cdot \varepsilon\left(\rho, \pi, \psi, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

□

On déduit du corollaire III.8 ci-dessus, de la remarque qui le suit et du corollaire III.5, la forme faible suivante de formule de Poisson non linéaire relative à  $\rho$  :

**Proposition III.9. –**

Supposons que la conjecture II.7 de transfert automorphe global par  $\rho$  et de compatibilité avec les transferts globaux en toutes les places soit connue.

On en déduit alors que, pour toute fonction de type  $L$  global (relatif à  $\rho$ )

$$h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et sa  $\psi$ -transformée de Fourier relative à  $\rho$

$$\widehat{h} : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a :

(i) Avec les notations du corollaire III.8(i), la somme

$$|\det_G(g_1^{-1}g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_1^{-1}g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1}\gamma g_2)$$

s'écrit

$$\sum_{(M, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

pour n'importe quel  $s \in \mathbb{C}$  de partie réelle  $\text{Re}(s) \gg 0$ , tandis que la somme

$$|\det_G(g_2^{-1}g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_2^{-1}g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(g_2^{-1}\gamma g_1)$$

s'écrit

$$\sum_{(M, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

pour n'importe quel  $s \in \mathbb{C}$  de partie réelle  $\text{Re}(s) \ll 0$ .

Autrement dit, on passe de l'une à l'autre somme par un simple déplacement de contours d'intégration, et leur différence est une somme de résidus calculés le long des pôles des fonctions

$$(\pi, s) \mapsto L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right).$$

(ii) Supposons en outre que, en au moins une place  $x$ , la fonction  $h$  ait un facteur local  $h_x$  qui s'écrit comme le produit

$$h_x = h'_x \cdot \omega_x \circ \det_G(\bullet)$$

d'une fonction  $h'_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$  de ramification bornée et d'un caractère  $G(F_x) \xrightarrow{\det_G} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$  suffisamment ramifié en fonction de cette borne.

Alors les deux sommes de (i) sont égales, avec en particulier

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma) = \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma).$$

### Remarque :

La formule de (ii), qui s'applique aux fonctions de type  $L$  global suffisamment ramifiées en au moins une place, sera appelée "formule de Poisson sans terme de bord" (relative à  $\rho$  sur  $G(\mathbb{A})$ ).