IV. Formules de Poisson non linéaires et noyaux du transfert automorphe

On considère toujours le groupe réductif quasi-déployé G sur F muni de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et, pour tout degré $r' \geq 2$, le groupe croisé associé $G_{r'}$ muni de la représentation de transfert croisée $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$.

Le but du présent paragraphe est de montrer, en sens inverse du paragraphe précédent, que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$" permet de construire, pour toute partie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ, suffisamment de "S-noyaux du transfert" pour en déduire le transfert automorphe global par ρ de G à GL_r.

On reprend donc la construction de S-noyaux du transfert par ρ là où nous l'avions laissée aux paragraphes I et II.

On est parti d'une famille de "noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ" en les places $x \in |F| - S$,

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

complétée en les places $x \in S$ par une famille de fonctions

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

astreintes à certaines conditions automatiquement vérifiées en les places $x \in |F| - S$: En toute place $x \in |F|$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, elle est à support compact en la variable $g \in G(F_x)$, et elle satisfait l'équation

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Le produit

$$\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est donc de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, il est à support compact en la variable $g \in G(\mathbb{A})$, et il satisfait l'équation

$$\left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g, z\, g') = \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{A}^\times\,.$$

On a posé pour tous $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$

$$W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma \in G(\mathbb{A})} \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g_1^{-1} \gamma\, g_2, g)\,,$$

$$K_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, \delta g)\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^\psi K(g_1,g_2,\alpha_r\,\delta g)\,.$$

Les fonctions $K_\psi^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ sur $(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ sont respectivement invariantes à gauche par les sous-groupes discrets $(G\times G\times Q_r)(F)$ et $(G\times G\times Q_r^{\mathrm{op}})(F)$.

Afin de les comparer, on a introduit une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

et formé les produits scalaires

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg'\cdot K_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g)\cdot h(g')\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg'\cdot \widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g)\cdot h(g')\,.$$

Ceux-ci s'écrivent

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)}\ \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash\mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)}\ \sum_{\delta\in\mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)$$

où

$$W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G\times\mathrm{GL}_{r-1})(\mathbb{A})\to\mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G\times\mathrm{GL}_{r-1})(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$$

sont deux fonctions produits dont les facteurs locaux $W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ et $\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ en les places $x\in|F|-S\subset |F|-S_\rho$ sont analysés spectralement dans les théorèmes II.2 et II.4.

Afin de reformuler le lien entre fonctions $W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ et $\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ que ces théorèmes établissent en toutes les places $x\in|F|-S$, on pose la définition suivante :

Définition IV.1. –

Considérons un degré arbitraire $r'\geq 2$.

Une fonction locale en une place $x\in|F|$ [resp. globale]

$$W_x : G_{r'}(F_x)\to\mathbb{C}\quad [\text{resp. } W: G_{r'}(\mathbb{A})\to\mathbb{C}]$$

qui est de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker, sera dite "de type L local sur $G_{r'}(F_x)$ [resp. global sur $G_{r'}(\mathbb{A})$] relativement à $\rho_{r'}$" s'il existe une fonction "de type L local [resp. global] relatif à ρ" au sens de la définition II.15(i) *[resp.* III.6(i)*]*

$$H_x : G_{r'}(F_x)\to\mathbb{C}\quad [\text{resp. } H: G_{r'}(\mathbb{A})\to\mathbb{C}]$$

telle que

$$W_x = W_{(r')}^\psi H_x\quad [\text{resp. } W = W_{(r')}^\psi H]\,.$$

On appelle alors ψ_x-transformée de Fourier de W_x [resp. ψ-transformée de Fourier de W] relativement à ρ la fonction

$$\begin{array}{rrcl} & \widehat{W}_x : (g,g') & \mapsto & \displaystyle\int_{N_{r'}(F_x)} du'_x \cdot \psi^{-1}_{(r')}(u'_x) \cdot \widehat{H}_x(g, g' u'^{-1}_x) \\ \textit{[resp.} & \widehat{W} : (g,g') & \mapsto & \displaystyle\int_{N_{r'}(\mathbb{A})} du' \cdot \psi^{-1}_{(r')}(u') \cdot \widehat{H}(g, g' u'^{-1})\textit{]}. \end{array}$$

Elle ne dépend pas du choix du relèvement H_x [resp. H] de W_x [resp. W].

Remarque :

En toute place $x \in |F| - S_\rho$, on appelle "fonction de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker de type L standard" (relatif à ρ) le $\psi_{(r')}$-coefficient unipotent

$$W_x = W^{\psi}_{(r')} H_x$$

de la "fonction de type L standard" (relatif à ρ)

$$H_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$$

au sens de la définition II.15(iii).

Une fonction produit de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker

$$W = \bigotimes_{x \in |F|} W_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est de type L global relatif à ρ lorsque tous ses facteurs W_x, $x \in |F|$, sont de type L local relatif à ρ et que presque tous sont la fonction standard.

$\square$

On déduit immédiatement de cette définition :

Lemme IV.2. –

Étant donné un degré $r' \geq 2$, supposons que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à $\rho_{r'}$ sur $G_{r'}(\mathbb{A})$" est connue.

Cela signifie que pour toute fonction produit de type L global relatif à $\rho_{r'}$

$$H = \bigotimes_{x \in |F|} H_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont un facteur local H_x au moins est le produit

$$G_{r'}(F_x) \ni (g,g') \mapsto H_x(g,g') = H'_x(g,g') \cdot \omega_x(\det_G(g))$$

d'une fonction $H'_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$ de ramification bornée et d'un caractère $\omega_x \circ \det_G = \omega_x \circ \det$ suffisamment ramifié en fonction de cette borne, on connaît la formule

$$\sum_{(\gamma,\gamma') \in G_{r'}(F)} H(\gamma,\gamma') = \sum_{(\gamma,\gamma') \in G_{r'}(F)} \widehat{H}(\gamma,\gamma')\,.$$

Alors, pour toute fonction produit de type de Whittaker de type L global relatif à $\rho_{r'}$

$$W = \bigotimes_{x \in |F|} W_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont un facteur local W_x au moins est le produit

$$W_x = W'_x \cdot \omega_x \circ \det_G$$

d'une fonction $W'_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$ de ramification bornée et d'un caractère $\omega_x \circ \det_G = \omega_x \circ \det$ suffisamment ramifié en fonction de cette borne, on connaît la formule

$$\sum_{(\gamma,\gamma')\in N_{r'}(F)\backslash G_{r'}(F)} W(\gamma,\gamma') = \sum_{(\gamma,\gamma')\in G_{r'}(F)/N_{r'}(F)} \widehat{W}(\gamma,\gamma')\,.$$

□

Revenant aux noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

et aux fonctions $W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$, $\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ sur $G(F_x)\times\mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \supset G_{r-1}(F_x)$ qui s'en déduisent par intégration contre des fonctions tests arbitraires $h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$, les théorèmes II.2 et II.4 impliquent :

Théorème IV.3. –

Modulo multiplication par le caractère $(m,m') \mapsto |\det_G(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(m')|_x^{-\frac{r-2}{2}}$, la restriction à

$$G_{r-1}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$$

de la fonction de $\psi_{(r-1)}$-type de Whittaker

$$W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x) \to \mathbb{C}$$

est "de type L local relatif à ρ_{r-1}" en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, et elle se confond avec la fonction standard en presque toute telle place.

De plus, sa ψ_x-transformée de Fourier relative à ρ_{r-1} n'est autre que la restriction à

$$G_{r-1}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)\,,$$

multipliée par le même caractère $|\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r-2}{2}}$, de la fonction

$$G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \ni (m,m') \mapsto \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m,(-1)^{r-1}\,m')$$

en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$.

□

Considérons maintenant les places $x \in S$.

Jusqu'à présent, on n'a demandé aux fonctions de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker $K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ en ces places $x \in S$ que de satisfaire l'équation

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\,g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\,g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Autrement dit, la décomposition spectrale de ces fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ ne doit faire apparaître que des paires (π_x,π'_x) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ telles que

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho\,.$$

Un lemme inspiré de [Cogdell, Piatetski-Shapiro] permet d'imposer aux fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ des conditions supplémentaires qui seront suffisantes pour étendre partiellement la conclusion du théorème IV.3 ci-dessus aux places $x \in S$:

Lemme IV.4. –

En une place $x \in S$, considérons l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ des paires de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui vérifient

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho$$

et dont la ramification n'excède pas une borne donnée.

Soit $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caractère unitaire suffisamment ramifié pour que tout élément (π_x, π'_x) de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ vérifie les conditions suivantes :

- *D'une part, la représentation $\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det) = \pi'_x \, \omega_x$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ satisfait la double conclusion de la proposition* II.13
$$L_x(\pi'_x \, \omega_x, Z) = 1 \, ,$$
$$\varepsilon_x(\pi'_x \, \omega_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi'_x} \, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1} \, .$$
- *D'autre part, pour toute représentation non ramifiée irréductible z de $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ de valeurs propres de Hecke $z_1, \ldots, z_{r-1}$, la représentation $(\pi_x \boxtimes z) \otimes (\omega_x \circ \det_G) = (\pi_x \boxtimes z) \otimes (\omega_x \circ \det) = (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x$ de $G_{r-1}(F_x)$ satisfait la conclusion du corollaire* II.14*, au sens qu'elle est "de type L" relativement à ρ_{r-1} avec*
$$L_x(\rho_{r-1}, (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x, Z) = 1 \, ,$$
$$\varepsilon_x(\rho_{r-1}, (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x, \psi_x, 1) = \prod_{1 \le j \le r-1} \varepsilon_x(\chi_{\pi_x} \, \omega_\rho \, \omega_x, \psi_x, z_j \, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, z_j \, Z)^{r-1} \, .$$

Alors, si $N_x \in \mathbb{N}$ est un entier assez grand en fonction de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ et du caractère très ramifié $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$, il est possible de construire une fonction de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$$

telle que :

- $K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z \, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z) \, g, g') \, , \quad \forall \, z \in F_x^\times ,$
- *chaque $K_{\psi_x}^{G,\rho}(\bullet, g')$, $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, est à support compact dans $G(F_x)$,*
- *en la première variable $g \in G(F_x)$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est invariante à gauche et à droite par un certain sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*
- *en la seconde variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est invariante à droite par le sous-groupe ouvert compact*
$$\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \subset \mathrm{GL}_r(O_x) \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$$
des matrices entières inversibles dont la réduction modulo $\varpi_x^{N_x}$ a la forme
$$\begin{pmatrix} * & \ldots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \ldots & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

- *la décomposition spectrale de $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ ne fait apparaître que des paires de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ de la forme*

$$(\pi_x\,\omega_x, \pi'_x\,\omega_x) \quad \textit{avec} \quad (\pi_x, \pi'_x) \in \{(\pi_x, \pi'_x)\}\,,$$

et la composante de $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ dans l'espace propre associé à toute première projection $\pi_x\,\omega_x$ d'une telle paire ne s'annule pas uniformément sur $G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)_{N_x}$.

Remarque :

Le sous-groupe ouvert compact $\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ introduit ci-dessus contient comme sous-groupe $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$.

□

L'équation fonctionnelle locale de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika permet de compléter le théorème IV.3 ci-dessus de la manière suivante :

Théorème IV.5. –

En n'importe quelle place $x \in S$, supposons que la fonction

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

satisfait toutes les conditions du lemme IV.4 *ci-dessus relativement à la famille donnée $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$, à un caractère unitaire $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de cette famille, et à un entier $N_x \in \mathbb{N}$ assez grand en fonction de cette famille et de ω_x.*

Soit une fonction test localement constante à support compact

$$h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est sphérique ou, plus généralement, dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations non ramifiées z.

Alors, modulo multiplication par le caractère

$$(m, m') \mapsto |\mathrm{det}_G(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\mathrm{det}_\rho(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(m')|_x^{-\frac{r-2}{2}}\,,$$

la restriction à $G_{r-1}(F_x)$ de la fonction de $\psi_{(r-1)}$-type de Whittaker

$$W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x) \to \mathbb{C}$$

est "de type L local relatif à ρ_{r-1}", et sa ψ_x-transformée de Fourier relative à ρ_{r-1} n'est autre que la restriction à $G_{r-1}(F_x)$ de la fonction

$$G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \ni (m, m') \mapsto \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m, (-1)^{r-1}\,m')\,,$$

multipliée par le même caractère $|\mathrm{det}_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\mathrm{det}_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r-2}{2}}$.

De plus, sa décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G_{r-1}(F_x)$ de la forme

$$(\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x\,,$$

où π_x est la première projection d'un élément (π_x, π'_x) de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ et z est une représentation non ramifiée de $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$.

□

Si la partie finie $S \supset S_\rho$ de $|F|$ n'est pas vide et que les fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$, $x \in S$, satisfont les propriétés du lemme IV.4, toutes les conditions nécessaires pour appliquer la “formule de Poisson sans terme de bord” relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$ sont satisfaites. On obtient d'après le lemme IV.2 :

Corollaire IV.6. –

Supposons que la “formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$” est connue.

Étant donnée une partie finie non vide S de $|F|$ qui contient S_ρ, complétons la famille de noyaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S$

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

par une famille de fonctions en les places $x \in S$

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \to \mathbb{C}$$

qui satisfont les conditions du lemme IV.4.

Soient des éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Soit enfin une fonction test localement constante à support compact

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont les facteurs h_x en les places $x \in S$ sont sphériques ou, plus généralement, ne font apparaître dans leur décomposition spectrale que des représentations non ramifiées.

Alors on a

$$\sum_{(\gamma,\delta)\in N_{r-1}(F)\backslash G_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta) = \sum_{(\gamma,\delta)\in G_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,(-1)^{r-1}\,\delta)\,.$$

Remarque :

La conclusion du corollaire s'applique également aux translatées à gauche ${}^{\delta_0'}h$ de h par tous les éléments $\delta_0' \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)$.

En faisant la somme sur toutes les classes $\delta_0' \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/\mathrm{SL}_{r-1}(F)$, on obtient

$$\sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,.$$

□

De la remarque qui suit ce corollaire, combinée avec le lemme II.1, on déduit :

Corollaire IV.7. –

Étant donnée une partie finie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ, considérons une famille de fonctions

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : (G \times \mathrm{GL}_r)(F_x) \to \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,,$$

qui sont des noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S$, et satisfont les conditions du lemme IV.4 *en les places $x \in S$.*

Alors :

(i) *Pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et pour toute fonction test localement constante à support compact*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante à gauche et à droite par $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$ en toute place $x \in S$, le produit scalaire

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot K_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \cdot h(g')$$

est égal au produit scalaire

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot \widetilde{K}_h^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \cdot h(g')\,.$$

(ii) *Si $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ désigne le sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ image réciproque du sous-groupe ouvert*

$$\prod_{x \in S} \mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \subset \prod_{x \in S} \mathrm{GL}_r(F_x)\,,$$

les fonctions $K_\psi^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ ont même restriction à $G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

(iii) *La restriction commune de $K_\psi^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ à $G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ est invariante à gauche par le sous-groupe discret*

$$G(F) \times G(F) \times \mathrm{GL}_r(F)_{N_S}$$

si l'on note $\mathrm{GL}_r(F)_{N_S} = \mathrm{GL}_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

Démonstration :

(ii) résulte de (i) puisque, pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$, les fonctions

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \ni g' & \mapsto & K_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \\ \text{et} & g' & \mapsto & \widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \end{array}$$

sont invariantes à droite par $\prod_{x \in S} \mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$.

(iii) Par construction, $K_\psi^{G,\rho}$ est invariante à gauche par $G(F) \times G(F) \times Q_r(F)$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ est invariante à gauche par $G(F) \times G(F) \times Q_r^{\mathrm{op}}(F)$.

La conclusion résulte du lemme suivant tiré de [Cogdell, Piatetski-Shapiro] :

Lemme IV.8. –

Le sous-groupe discret

$$\mathrm{GL}_r(F)_{N_S} = \mathrm{GL}_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$$

de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ est engendré par ses sous-groupes

$$Q_r(F)_{N_S} = Q_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$$

et

$$Q_r^{\mathrm{op}}(F)_{N_S} = Q_r^{\mathrm{op}}(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}\,.$$

$\square$

De plus, on a :

Lemme IV.9. –

Le sous-groupe $\mathrm{GL}_r(F)$ *est dense dans le produit fini* $\prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(F_x)$.

Par conséquent, l'image réciproque $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *dans* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *du sous-groupe ouvert* $\prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ *de* $\prod_{x\in S} \mathrm{GL}_r(F_x)$ *vérifie*

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(F)\cdot \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}\,,$$

et l'inclusion

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S} \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$$

définit un isomorphisme

$$\mathrm{GL}_r(F)_{N_S}\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})\,.$$

Cet isomorphisme est compatible avec les actions à droite des $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *en toutes les places* $x \in |F| - S$, *et avec celles des sous-groupes* $\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ *en les places* $x \in S$.

□

On déduit de ce lemme et du corollaire IV.7 :

Corollaire IV.10. –

Dans les conditions du corollaire IV.7, *la restriction commune à* $G(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})\times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *des fonctions* $K_\psi^{G,\rho}$ *et* $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ *peut être vue comme une fonction*

$$K : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Cette fonction est un "S-noyau du transfert automorphe par ρ*" au sens de la définition* I.3.

De plus, on a pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ *et* $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *la formule*

$$W_{(r)}^\psi K(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \left(\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g_1^{-1}\gamma\, g_2, g)\,.$$

Démonstration :

La dernière formule résulte de ce qu'il est possible de relever le quotient compact

$$N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})$$

en une partie compacte de $N_r(\mathbb{A})$ dont la projection dans $\prod_{x\in|F|} N_r(F_x)$ est contenue dans $\prod_{x\in|F|} \mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$.

□

On a enfin :

Théorème IV.11. –

Supposons toujours que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} *sur* $G_{r-1}(\mathbb{A})$*" est connue.*

Alors la construction des corollaires IV.7 *et* IV.10 *ci-dessus fournit suffisamment de "S-noyaux du transfert automorphe par* ρ*"*

$$K : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

pour réaliser le transfert automorphe global de G *à* GL_r *par* ρ.

Démonstration :

Considérons une représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$ et une partie finie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ et les places x où π_x est ramifiée.

Il existe des caractères automorphes unitaires

$$\omega = \bigotimes_{x \in |F|} \omega_x : \mathbb{A}^\times / F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

qui sont non ramifiés en les places $x \in |F| - S$ et arbitrairement ramifiés en les places $x \in S$.

Si les facteurs $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$, $x \in S$, sont suffisamment ramifiés, on peut réaliser les conditions du lemme IV.4 de telle façon que la composante dans l'espace propre de $\pi \otimes \omega$ de la fonction

$$(g_1, g_2, g) \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g_1^{-1} \gamma \, g_2, g)$$

ne s'annule par uniformément sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

On conclut d'après le corollaire IV.10. $\square$