V. Nouvelle construction de la fonctionnelle de Poisson linéaire et généralisation non linéaire conjecturale

Il est intéressant de chercher à raffiner la construction du paragraphe précédent et à définir des termes complémentaires "non cuspidaux"

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

permettant de réaliser l'égalité

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_\psi^{G,\rho} + \widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}$$

sur $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ tout entier, et donc de définir directement un noyau automorphe

$$(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

comme prévu dans la conjecture I.11.

On doit impérativement trouver un tel raffinement si l'on cherche à construire des noyaux du transfert global par ρ qui soient compatibles avec le transfert local en toute place $x \in |F|$ sans exception. On part alors d'une famille de fonctions locales de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$K_\psi^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui sont des "noyaux locaux" du transfert par ρ en toute place $x \in |F|$: cela signifie que leur décomposition spectrale ne fait apparaître que des paires (π_x, π'_x) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ telles que π'_x soit le transfert local de π_x par ρ en un sens déjà connu sans ambiguïté.

Afin de réaliser ce programme, on a besoin d'une "formule de Poisson non linéaire avec termes de bord" relative à ρ (ou $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$) qui s'applique à toutes les fonctions "de type L global" sur $G(\mathbb{A})$ (ou $G_{r'}(\mathbb{A})$). Autrement dit, on a besoin de définir sur l'espace des fonctions de type L global une fonctionnelle linéaire, complémentaire de l'évaluation

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)\,,$$

telle que leur somme, notée par convention

$$h \mapsto \text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”}\,,$$

vérifie la formule de Poisson

$$\text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”} = \text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{h}(\gamma)\text{”}\,, \quad \forall\, h\,.$$

Dans le but de proposer une définition conjecturale d'une telle "fonctionnelle de Poisson non linéaire relative à ρ (ou $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$)", on pose la définition suivante :

Définition V.1. –

En n'importe quelle place $x \in |F| - S_\rho$, considérons une fonction sphérique

$$h_x : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

qui est "de type L local" relativement à $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Autrement dit, elle se décompose spectralement sous la forme

$$h_x(g) = |\det{}_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det{}_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\lambda}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

où $d\lambda$ désigne toujours la mesure de Plancherel sur l'espace $\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d/\mathfrak{S}_G^x$ des caractères unitaires λ de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ de $G(F_x)$, et chaque $g \mapsto h_{x,\lambda}(g)$ est une fonction sphérique, vecteur propre de valeur propre λ, et dont la dépendance en $\lambda \in \widehat{T}_x^d$ est polynomiale.

Alors, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on note h_x^N la fonction sur $G(F_x)$ définie par la décomposition spectrale

$$h_x^N(g) = |\det{}_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det{}_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^N\left(\rho, \lambda, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\lambda}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

où $I_x^N(\rho, \lambda, Z)$ désigne le polynôme en $\lambda \in \widehat{T}_x^d$ et Z qui est le produit du polynôme

$$L_x(\rho, \lambda, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N qui figure dans le développement en série formelle de l'inverse

$$L_x(\rho, \lambda, Z)\,.$$

Remarques :

(i) On note l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_x^N(\rho, \lambda, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en Z à coefficients dans $\mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$.

Elle implique que, pour tout $g \in G(F_x)$, la série

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} h_x^N(g)$$

converge vers $h_x(g)$.

(ii) Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, la ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{h_x^N}$ de h_x^N relativement à ρ est à support compact dans $G(F_x)$.

(iii) Il est possible de généraliser la définition ci-dessus à toutes les fonctions de type L sur $G(F_x)$ en n'importe quelle place $x \in |F|$, mais nous n'en aurons pas besoin.

□

Cette définition permet de formuler la conjecture suivante :

Conjecture V.2. –

(i) *Pour toute fonction produit*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est de type L global relatif à ρ, et pour toute place $x_0 \in |F| - S_\rho$ en laquelle le facteur local h_{x_0} de h est sphérique, la série

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in G(F)} \left(h_{x_0}^N \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} h_x \right) \right) (\gamma)$$

est convergente, et sa somme $S(h)$ ne dépend pas du choix de la place x_0.

(ii) *La fonctionnelle linéaire induite sur l'espace des fonctions de type L global relatif à ρ sur $G(\mathbb{A})$*

$$h \mapsto S(h)$$

est laissée invariante par la ψ-transformation de Fourier relative à ρ, et il en est donc de même de la fonctionnelle

$$h \mapsto \left(\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma) \right) - S(h) = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma) \text{”} \,.$$

Remarque :

Dès lors que la partie (i) de la conjecture implique qu'elle est bien définie, la fonctionnelle

$$h \mapsto S(h)$$

est invariante par translation à gauche ou à droite par $G(F)$, et il en est donc de même de la fonctionnelle

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma) \text{”} \,.$$

□

On prouve facilement :

Proposition V.3. –

Si E est une algèbre finie séparable de degré r sur F, qui correspond à une action du groupe de Galois Γ_F sur l'intervalle $\{1, 2, \dots, r\}$, le tore “linéaire”

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m \,,$$

muni de la représentation standard

$$\rho_E : \widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F = \left(\prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times \right) \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

de son dual $\widehat{T}_E = \prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times$, vérifie la conjecture V.2 *ci-dessus.*

Plus précisément, les fonctions localement constantes à support compact sur $\mathbb{A}_E = \mathbb{A} \otimes_F E$ sont les fonctions de type L global relatif à ρ_E sur $T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$, et la fonctionnelle de Poisson standard

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in E} h(\gamma)$$

coïncide avec la fonctionnelle de la conjecture V.2

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}_E(F)} h(\gamma) \text{”} .$$

Remarque :

Cette proposition s'applique en particulier au tore linéaire déployé $\mathbb{G}_m^r$. On retrouve alors la fonctionnelle de Poisson

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in F^r} h(\gamma)$$

sur $\mathbb{A}^r$. □

Avec plus de travail, on démontre au paragraphe VII.2 de [Lafforgue, 2012] :

Théorème V.4. –

Le groupe linéaire

$$\mathrm{GL}_r \, ,$$

muni de la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, vérifie la conjecture V.2 *ci-dessus.*

Plus précisément, les fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(\mathbb{A})$ sont les fonctions “de type L global” relatif à la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r$ sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et la fonctionnelle de Poisson standard

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in M^r(F)} h(\gamma)$$

coïncide avec la fonctionnelle de la conjecture V.2

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A})} h(\gamma) \text{”} .$$

Remarques :

(i) La démonstration de ce théorème utilise
- le théorème de décomposition spectrale de Langlands,
- la description par Moeglin et Waldspurger du spectre automorphe discret de GL_r,
- les propriétés des fonctions L linéaires globales rappelées dans le théorème III.2,
- les estimées de Jacquet et Shalika pour les modules des valeurs propres de Hecke des facteurs locaux non ramifiés des représentations automorphes cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

(ii) Bien que nous ne l'ayons pas vérifié par écrit, on devrait pouvoir généraliser la démonstration de ce théorème jusqu'à montrer que la conjecture de transfert automorphe global par ρ de G à GL_r implique la conjecture V.2 pour le groupe réductif G muni de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. □

On rappelle que, par hypothèse, la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ induit un homomorphisme

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

du tore maximal $\widehat{T}$ de $\widehat{G}$, dual du tore maximal T de G, dans le tore maximal $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Si Γ_F agit dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation des r vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^r$, cette action définit une F-algèbre séparable E de degré r. Le dual $\widehat{T}_E$ du tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m$ s'identifie à $\prod\limits_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times$ muni de l'action par permutation de Γ_F, et l'homomorphisme

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

devient Γ_F-équivariant, donc admet un homomorphisme dual bien défini sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \to T\,.$$

Cet homomorphisme identifie T au tore quotient du tore "linéaire" $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m$ par le sous-tore T_ρ dual du conoyau $\widehat{T}_\rho$ de ρ_T.

Par intégration le long des fibres de

$$T_E(\mathbb{A}) \to T(\mathbb{A})\,,$$

on déduit de la proposition V.3 :

Corollaire V.5. –

Supposons comme ci-dessus que Γ_F agit sur $\mathbb{C}^r$ par permutation de ses r vecteurs de base, définissant une F-algèbre séparable E de degré r.

Et supposons de plus que les homomorphismes

$$\begin{array}{rrcl} & T_E(F_x) & \to & T(F_x)\,, \quad x \in |F|\,, \\ & T_E(\mathbb{A}) & \to & T(\mathbb{A})\,, \\ \textit{et} & T_E(F) & \to & T(F) \end{array}$$

induits par $\rho_T^\vee : T_E \to T$ soient surjectifs.

Alors, associant à la représentation $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ le caractère $\det_{\rho_T} : T \to \mathbb{G}_m$ trivial, on a :

(i) *Les fonctions "de type L" local [resp. global] sur $T(F_x)$ [resp. $T(\mathbb{A})$] sont les fonctions*

$$\overline{h}_x : t_x \mapsto \int_{T_\rho(F_x)} dt_\rho \cdot h_x(t_x\, t_\rho) \qquad \textit{[resp. } \overline{h} : t \mapsto \int_{T_\rho(\mathbb{A})} dt_\rho \cdot h(t\, t_\rho)\textit{]}$$

déduites par intégration des fonctions h_x [resp. h] localement constantes à support compact sur $E_x = E \otimes_F F_x$ [resp. $\mathbb{A}_E = E \otimes_F \mathbb{A}$].

(ii) *Les fonctions de type L global sur $T(\mathbb{A})$ vérifient la conjecture* V.2.

Remarque :

Pour que les hypothèses de surjectivité de ce corollaire soient vérifiées, il suffit d'après le "théorème 90" de Hilbert que le noyau T_ρ de l'épimorphisme $\rho_T^\vee : T_E \to T$ soit de la forme

$$T_\rho \cong \mathrm{Res}_{E'/F}\, \mathbb{G}_m$$

pour une certaine F-algèbre séparable E'. □

À partir de ce corollaire, on démontre dans le paragraphe VII.5 de [Lafforgue, 2012] :

Théorème V.6. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5 *ci-dessus, le groupe réductif G muni de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ vérifie la conjecture* V.2 *après moyennisation par les opérateurs de coefficients unipotents constants*

$$\int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du\,.$$

Autrement dit, pour toute fonction produit

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est "de type L global relatif à ρ", et pour sa ψ-transformée de Fourier relative à ρ

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widehat{h}_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a :

(i) *Pour toute place $x_0 \in |F| - S_\rho$ en laquelle le facteur local h_x [resp. $\widehat{h}_x$] de h [resp. $\widehat{h}$] est sphérique, la série*

$$\sum_{N\in\mathbb{N}} \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} \left(h_{x_0}^N \otimes \left(\bigotimes_{x\neq x_0} h_x \right)\right)(\gamma u)$$

$$\textit{[resp.}\quad \sum_{N\in\mathbb{N}} \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} \left(\widehat{h}_{x_0}^N \otimes \left(\bigotimes_{x\neq x_0} \widehat{h}_x \right)\right)(u^{-1}\,\gamma)\textit{]}$$

est convergente, et sa somme ne dépend pas du choix de la place x_0.

(ii) *Les deux sommes associées dans* (i) *à h et $\widehat{h}$ sont égales.*

□

Rappelons que l'on cherche à construire à partir de la fonction "cuspidale"

$$K_\psi^{G,\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

une fonction complémentaire "non cuspidale"

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telle que la somme

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

soit invariante à gauche par $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)$ tout entier.

Une telle construction est réalisée dans le chapitre VIII de [Lafforgue, 2012] dans le cas du transfert partout non ramifié, c'est-à-dire lorsque $S_\rho = \emptyset$ et que $K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ est un noyau local du transfert local non ramifié par ρ en toute place $x \in |F|$.

Dans cette construction, la fonction complémentaire

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est définie à partir des "termes de bord" de la "formule de Poisson non linéaire relative à ρ" pour les fonctions de type L global sur le groupe croisé $G_{r-1}(\mathbb{A})$.

Afin de montrer que cette fonction complémentaire est invariante à gauche par $Q_r(F)$ et "non cuspidale", on a besoin d'en savoir en peu plus sur le support de la fonctionnelle de Poisson "de bord"

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”} - \left(\sum_{\gamma\in G(F)} h(\gamma)\right) = \left(\sum_{\gamma\in G(F)} \widehat{h}(\gamma)\right) - S(h)\,.$$

La formulation de cette propriété géométrique nécessaire à la construction demande d'introduire un objet géométrique auxiliaire, déjà introduit par Braverman et Kazhdan, le "semi-groupe dual" de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

On rappelle d'abord la définition des semi-groupes :

Définition V.7. –

Étant donné un groupe réductif G sur un corps k, un semi-groupe $\overline{G}$ de groupe G est une variété affine intègre qui contient G comme ouvert dense et telle que le morphisme de multiplication $G\times G \to G$ se prolonge en

$$\overline{G} \times \overline{G} \to \overline{G}\,.$$

Si G est un groupe réductif quasi-déployé sur un corps k, muni d'un tore maximal T défini sur k, l'adhérence schématique $\overline{T}$ de T dans un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G est une variété torique affine normale de tore T sur laquelle agit le groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$. On montre que, réciproquement, toute variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T sur laquelle agit $\mathfrak{S}_G$ provient d'un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G, unique à unique isomorphisme près. Par combinaison avec la théorie des variétés toriques, on a donc :

Proposition V.8. –

Soit un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps k, muni d'un tore maximal T défini sur k.

Se donner un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G sur k équivaut à se donner, dans le réseau X_T des caractères de T, un cône polyédral saturé $X_{\overline{T}}$ stable par l'action du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$ et par celle du groupe de Galois Γ_k ou, ce qui revient au même, son cône dual $X_{\overline{T}}^\vee$ dans le réseau $X_T^\vee$ des cocaractères de T.

□

Revenons maintenant à notre groupe réductif G quasi-déployé sur le corps de fonctions F, et à notre représentation de tranfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

qui induit un homomorphisme

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r\,.$$

On peut poser :

Définition V.9. –

On appelle "semi-groupe dual de la représentation ρ" le semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G associé au cône saturé $X_{\overline{T}}^\vee$ de $X_T^\vee = X_{\widehat{T}}$ engendré par les poids $\rho_T^1, \dots, \rho_T^r : \widehat{T} \to \mathbb{C}^\times$ de la représentation ρ ou, ce qui revient au même, par les $\mathfrak{S}_G$-orbites des plus hauts poids des facteurs irréductibles de $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Remarque :

Cette notion avait déjà été introduite par Braverman et Kazhdan, en des termes différents mais équivalents.

□

On note aussitôt :

Lemme V.10. –

(i) *Lorsque* $G = \mathrm{GL}_r$ *et* ρ *est la représentation standard de* $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$*, le semi-groupe* $\overline{G}$ *dual de* ρ *n'est autre que le semi-groupe matriciel* M_r*.*

(ii) *Dans le cas général, et pour tout degré* $r' \geq 2$*, le semi-groupe* $\overline{G}_{r'}$ *dual de la représentation croisée*

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

s'identifie à la normalisation du sous-schéma fermé

$$\{(g, g') \in \overline{G} \times M_{r'} \mid \det_G(g) = \det(g')\}\,.$$

$\square$

Intéressons-nous d'abord à la variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T qui définit le semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G. On a :

Lemme V.11. –

Supposons comme plus haut que Γ_F *agit sur l'espace* $\mathbb{C}^r$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *par permutation de ses* r *vecteurs de base, définissant une* F*-algèbre séparable* E *de degré* r*.*

Alors l'homomorphisme de tores

$$\rho_T^\vee : T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m \to T\,,$$

dual de $\rho_T : \widehat{T} \to \prod\limits_{1\leq i\leq r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_E$*, se prolonge en un homomorphisme de variétés toriques*

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1 \to \overline{T}$$

qui identifie $\overline{T}$ *au quotient de* $\overline{T}_E$ *par le sous-tore* T_ρ *de* T_E *dual de* $\widehat{T}_\rho = \mathrm{Coker}\left(\widehat{T} \xrightarrow{\rho_T} \widehat{T}_E\right)$*.*

Remarque :

L'énoncé signifie que les caractères bien définis sur $\overline{T}$ sont exactement les caractères bien définis sur $\overline{T}_E$ que le sous-tore T_ρ de T_E laisse invariants.

Il implique que tout point géométrique de $\overline{T}$ est image d'au moins un point géométrique de $\overline{T}_E$, et que deux points géométriques de $\overline{T}_E$ ont même image dans $\overline{T}$ si et seulement si les adhérences de leurs orbites sous l'action de T_ρ se rencontrent.

$\square$

On déduit de ce lemme et du corollaire V.5 :

Corollaire V.12. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5*, considérons toujours le tore* T *muni de la représentation* $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *à laquelle on associe le caractère* $\det_{\rho_T} : T \to \mathbb{G}_m$ *trivial.*

Alors, si $\overline{T}^{\leq 1}$ *désigne l'ouvert de* $\overline{T}$ *réunion de* T *et des orbites de codimension* 1*, les fonctions "de type L" local [resp. global] relatif à* ρ_T

$$\begin{array}{rrcl} & T(F_x) & \to & \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,, \\ \textit{[resp.} & T(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}\textit{]} \end{array}$$

se prolongent par continuité à $\overline{T}^{\leq 1}(F_x)$ *[resp.* $\overline{T}^{\leq 1}(\mathbb{A})$*].*

Remarque :

En fait, ces fonctions se prolongent par continuité à $\overline{T}^{\mathrm{reg}}(F_x)$ [resp. $\overline{T}^{\mathrm{reg}}(\mathbb{A})$] si $\overline{T}^{\mathrm{reg}} \supset \overline{T}^{\leq 1}$ désigne le plus grand ouvert de $\overline{T}$ au-dessus duquel le sous-tore T_ρ de T_E agit librement dans $\overline{T}_E$.

□

On sait d'après la théorie générale des semi-groupes normaux que les orbites de $\overline{G}$ sous la double action de G à gauche et à droite sont en nombre fini, et toutes localement fermées.

Elles sont engendrées par les orbites de $\overline{T}$ sous l'action de T.

Deux orbites de $\overline{T}$ engendrent la même orbite de $\overline{G}$ si et seulement si elles sont images l'une de l'autre par l'action du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$.

En particulier, les orbites de codimension 1 de $\overline{G}$ correspondent aux orbites de codimension 1 de $\overline{T}$, modulo l'action de $\mathfrak{S}_G$.

Utilisant ce fait, on peut démontrer à partir du corollaire V.12 :

Proposition V.13. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5 *ou du corollaire* V.12*, supposons en outre que*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

induit un isomorphisme

$$Z_{\widehat{G}}^F \xrightarrow{\sim} \widehat{Z}_\rho$$

de $Z_{\widehat{G}}^F = \{z \in Z_{\widehat{G}} \mid \sigma(z) = z\,,\ \forall\,\sigma \in \Gamma_F\}$ *dans le commutateur* $\widehat{Z}_\rho \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *de la représentation* ρ*.*

Choisissons pour

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$$

l'unique caractère défini sur F *tel que, pour toute composante* ρ_T^i *de* $\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ *qui est le plus haut poids de l'une des composantes irréductibles de* $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$*, on ait*

$$\langle \det_\rho, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle$$

où $\delta_B : B \to B/N_B = T \to \mathbb{G}_m$ *désigne le caractère modulaire.*

Alors, si $\overline{G}^{\leq 1}$ *désigne l'ouvert de* $\overline{G}$ *réunion de* G *et des orbites de codimension* 1*, on a :*

(i) *Les fonctions "de type L" local [resp. global] relatif à* ρ

$$\begin{array}{rrcl} & G(F_x) & \to & \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,, \\ \textit{[resp.} & G(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}\textit{]} \end{array}$$

se prolongent par continuité à $G^{\leq 1}(F_x)$ *[resp.* $G^{\leq 1}(\mathbb{A})$*].*

(ii) *Pour tout degré* $r' \geq 2$*, les fonctions "de type L" local [resp. global] sur* $G_{r'}(F_x)$*,* $x \in |F|$*, [resp.* $G_{r'}(\mathbb{A})$*] se prolongent par continuité à l'ouvert de*

$$\begin{array}{rrcl} & \overline{G}_{r'}(F_x) & \subset & \overline{G}(F_x) \times M_{r'}(F_x) \\ \textit{[resp.} & \overline{G}_{r'}(\mathbb{A}) & \subset & \overline{G}(\mathbb{A}) \times M_{r'}(\mathbb{A})\textit{]} \end{array}$$

image réciproque de $\overline{G}^{\leq 1}(F_x)$ *[resp.* $\overline{G}^{\leq 1}(\mathbb{A})$*].*

Remarque :

Le fait que l'homomorphisme $Z^F_{\widehat{G}} \to \widehat{Z}_\rho$ induit par ρ soit un isomorphisme implique que les facteurs irréductibles de la représentation $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ apparaissent tous avec la multiplicité 1.

$\square$

Cette proposition permet de compléter la conjecture V.2 par la conjecture suivante :

Conjecture V.14. –

Sous les hypothèses de la proposition V.13 *ci-dessus, on a :*

(i) *Pour toute fonction produit de type L global relatif à ρ sur $G(\mathbb{A})$,*

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

la différence

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”} - \sum_{\gamma\in G(F)} h(\gamma)$$

dépend linéairement des seules restrictions de chaque facteur h_x, $x \in |F|$, aux orbites de codimension 1 de $\overline{G}(F_x)$.

(ii) *Pour tout degré $r' \geq 2$, et pour toute fonction de type L global relatif à $\rho_{r'}$ sur $G_{r'}(\mathbb{A})$,*

$$h : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

la différence

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r'}(F)} h(\gamma)\text{”} - \sum_{\gamma\in G_{r'}(F)} h(\gamma)$$

dépend linéairement des seules restrictions de h aux points de

$$\overline{G}_{r'}(\mathbb{A}) \subset \overline{G}(\mathbb{A}) \times M_{r'}(\mathbb{A})$$

de la forme

$$(m, \delta)$$

avec $m \in \overline{G}^{\leq 1}(\mathbb{A})$ et $\delta \in M_{r'}(F) - \mathrm{GL}_{r'}(F)$.

$\square$

Le cas $r' = r-1$ de la conjecture V.14(ii) ci-dessus est ce que l'on a besoin de connaître sur la fonctionnnelle de Poisson de bord

$$h \mapsto \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r-1}(F)} h(\gamma)\text{”} - \sum_{\gamma\in G_{r-1}(F)} h(\gamma)\,,$$

outre la formule de Poisson sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r-1}(F)} h(\gamma)\text{”} = \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r-1}(F)} \widehat{h}(\gamma)\text{”}$$

pour construire des termes complémentaires “non cuspidaux”

$$K^{\overline{G},\rho}_\psi : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\rm op})(F)\backslash(G \times G \times {\rm GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

qui réalisent l'égalité

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_\psi^{G,\rho} + \widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}$$

et définissent des noyaux du transfert par ρ de la forme

$$K^{G,\rho} = K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times {\rm GL}_r)(F)\backslash(G \times G \times {\rm GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Cette construction est réalisée, dans le cas partout non ramifié, au chapitre VIII de [Lafforgue, 2012].