Exposé I.

Propriétés attendues des transformations de Fourier non linéaires

(Laurent Lafforgue, IHES, 19 juin 2014)

1 Situation

On se place sur un corps global F.

On note $|F|$ l'ensemble des places de F et F_x la complétion de F en toute place $x \in |F|$.

En toute place ultramétrique x, on note O_x l'anneau des entiers de F_x, ϖ_x une uniformisante, q_x le cardinal fini du corps résiduel $\kappa_x = O_x/\varpi_x \cdot O_x$ et

$$v_x : F_x^\times \to \mathbb{Z}$$

la valuation associée à x.

Notant

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$$

l'anneau topologique des adèles de F, on choisit une fois pour toutes un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times \, .$$

En toute place $x \in |F|$, le caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$$

définit sur F_x une unique mesure additive da_x dite la mesure "auto-duale" relative à ψ_x. Le groupe multiplicatif $F_x^\times$ agit sur les mesures additives de F_x, et en particulier sur da_x, par un caractère continu

$$| \bullet |_x : F_x^\times \to \mathbb{R}_+^\times \, .$$

Si x est une place ultramétrique, ce caractère $| \bullet |_x$ n'est autre que la norme ultramétrique

$$| \bullet |_x = q_x^{-v_x(\bullet)} \, .$$

Si $F_x \cong \mathbb{R}$, $| \bullet |_x$ n'est autre que la valeur absolue usuelle des nombres réels.

Enfin, si $F_x \cong \mathbb{R}$, $| \bullet |_x$ est le carré du module usuel des nombres complexes.

On considère d'autre part un groupe réductif connexe et quasi-déployé G sur F, muni d'une paire de Borel (T, B) définie sur F.

On appelle "standard" les sous-groupes paraboliques [resp. de Levy] de G qui contiennent B [resp. T]. Il existe une unique injection

$$P \mapsto M_P$$

de l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques standard dans celui des sous-groupes de Levy standard, telle que chaque P soit le produit

$$P = M_P \cdot N_P = N_P \cdot M_P$$

de son sous-groupe de Levy M_P et de son radical unipotent $N_P \subset N_B$.

Pour tout tel P, on notera

$$\delta_P : P \to P/N_P \cong M_P \to \mathbb{G}_m$$

le caractère modulaire par lequel P ou M_P agissent par la conjugaison $(m, u) \mapsto m \cdot u \cdot m^{-1}$ sur la puissance extérieur maximale de Lie (N_P).

On dispose du dual $\widehat{G}$ de G. C'est un groupe réductif sur $\mathbb{C}$, muni d'une paire de Borel $(\widehat{T}, \widehat{B})$ et d'une action continue du groupe de Galois Γ_F de F. Son tore maximal $\widehat{T}$ s'identifie au dual du tore maximal T de G, ce qui signifie que le réseau $X_{\widehat{T}}$ des caractères $\widehat{T}$ s'identifie à celui $X_T^\vee$ des cocaractères de T ou, ce qui revient au même, que $X_{\widehat{T}}^\vee = X_T$.

On suppose enfin que G est muni d'un caractère défini sur F

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m$$

ou, ce qui revient au même, d'un cocaractère central

$$\widehat{\det_G} : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$$

fixé par l'action de Γ_F.

Définition I.1. –

On appellera "représentation de transfert" de G tout morphisme algébrique continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

tel que :

(1) *Le composé de*

$$\widehat{\det_G} : \mathbb{C}^\times \to \widehat{G}$$

et de ρ n'est autre que

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

(2) *Le morphisme ρ envoie $\widehat{T}$ dans le tore maximal $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\widehat{\mathrm{GL}}_r$ et induit donc un morphisme de tores*

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r.$$

(3) *Le noyau de $\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r$ est trivial.*

(4) *Considérant le sous-groupe de Borel B de G, il existe un (unique) caractère de G défini sur F*

$$\det_B : G \to \mathbb{G}_m$$

tel que

$$\langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle$$

pour tout poids $\rho_T^i \in X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$ de $\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r$ qui est le poids dominant d'un facteur irréductible de ρ.

Remarques :

(i) L'unicité du caractère $\det_B$ de (4) résulte de (3).
Son existence est assurée si ρ induit un isomorphisme

$$Z_{\widehat{G}}^F \xrightarrow{\sim} \widehat{Z}_\rho$$

de

$$Z_{\widehat{G}}^F = \{z \in Z_{\widehat{G}} \mid \sigma(z) = z\,, \quad \forall\, \sigma \in \Gamma_F\}$$

vers le centre $\widehat{Z}_\rho$ du sous-groupe des automorphismes de ρ dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

(ii) Pour tout sous-groupe de Levy standard M de G, son dual $\widehat{M}$ s'identifie à un sous-groupe de Levy standard de $\widehat{G}$ fixé par l'action de Γ_F, et toute représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

induit une représentation

$$\rho_M : \widehat{M} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

qui n'est pas nécessairement une représentation de transfert au sens de la définition mais qui s'écrit comme une somme directe de telles représentations.

Exemple :

Pour n'importe quel entier $k \geq 1$, considérons la représentation de transfert définie par la représentation irréductible sym^k de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Cela signifie que

$$\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k\,,$$

où $\mu_k = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$, est muni de la représentation

$$\begin{aligned} \rho : \widehat{G} \quad &\to \quad \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C}) \\ g \quad &\mapsto \quad \mathrm{sym}^k(g)\,. \end{aligned}$$

Le groupe réductif complexe $\widehat{G}$ admet pour tore maximal

$$\widehat{T} = T_2(\mathbb{C})/\mu_k = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k$$

avec donc

$$X_{\widehat{T}} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1 + n_2 \in k\,\mathbb{Z}\}$$

et

$$X_{\widehat{T}}^\vee = \left\{(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid r_1, r_2 \in \frac{1}{k}\,\mathbb{Z} \ \wedge \ r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les poids de la représentation irréductible ρ sont les

$$(i, k-i) \in X_{\widehat{T}}\,, \qquad 0 \leq i \leq k\,.$$

Le groupe réductif $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C}$ est le dual d'un unique groupe réductif G déployé sur F.

L'homomorphisme de passage au quotient par $\mu_k \subset Z_{\widehat{\mathrm{GL}}_2}$

$$\widehat{\mathrm{GL}}_2 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \widehat{G}$$

est dual d'un homomorphisme

$$G \to \mathrm{GL}_2\,.$$

Si T est le tore dual de $\widehat{T}$ sur F, identifié au tore maximal de G, le morphisme induit

$$T \to T_2 = \mathbb{G}_m^2$$

identifie $X_T^\vee = X_{\widehat{T}}$ à

$$\left\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 = X_{T_2}^\vee \mid n_1 + n_2 \in k\,\mathbb{Z}\right\}\,.$$

Cela signifie que G s'inscrit dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\det"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

et ses points pourront être notés commes des paires

$$(g, \det(g)^{1/k}) \qquad \text{avec} \quad g \in \mathrm{GL}_2\,.$$

En particulier, T s'inscrit dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & T_2 = \mathbb{G}_m^2 \arrow[d, "{\substack{(\lambda_1,\lambda_2) \\ \downarrow \\ \lambda_1\lambda_2}}"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

et ses points pourront être notés comme des triplets

$$(\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1\,\lambda_2)^{1/k}) \qquad \text{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{G}_m\,.$$

□

2 Forme et propriétés générales attendues

Commençons par introduire les caractères suivants :

Définition I.2. –

Étant donné un groupe réductif G quasi-déployé sur F muni d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,,$$

on définit les caractères algébriques

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$$

et, pour tout sous-groupe de Levy standard M de G tel que $\rho_M : \widehat{M} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ soit une représentation de transfert au sens de la définition I.1*,*

$$\det_{\rho_M} : M \to \mathbb{G}_m$$

par les formules

$$\det_\rho = \det_G \cdot \det_B$$
$$\det_{\rho_M} = \det_G \cdot \det_{B\cap M}\,.$$

Remarque :

Si $M = T$, on a simplement

$$\det_{\rho_T} = \det_G : T \to \mathbb{G}_m\,.$$

Exemples :

(i) Si $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, on a

$$\det{}_G = \det\,, \quad \det{}_B = (\det)^{r-1}\,, \quad \det{}_\rho = (\det)^r\,.$$

(ii) Si $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$ et $\rho = \mathrm{sym}^k$ pour un entier $k \geq 1$, on a

$$\det{}_G(g, \det(g)^{1/k}) = \det(g)^{1/k}\,,$$

$$\det{}_B(g, \det(g)^{1/k}) = \det(g)$$

d'où

$$\det{}_B = (\det{}_G)^k\,,$$
$$\det{}_\rho = (\det{}_G)^{k+1}\,.$$

□

En n'importe quelle place $x \in |F|$, on s'intéresse aux opérateurs linéaires

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

de l'espace des fonctions continues à support compact sur $G(F_x)$ vers l'espace des fonctions continues sur $G(F_x)$, qui sont compatibles avec les translations à droite $f_x \mapsto f_x^g = f_x(\bullet\, g)$ et à gauche $f_x \mapsto {}^g f_x = f_x(g\, \bullet)$ au sens du lemme suivant :

Lemme I.3. –

En n'importe quelle place $x \in |F|$, un opérateur linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

vérifie la double propriété

$$\begin{cases} \widehat{f_x^g} &= \;|\deg_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \ {}^{g^{-1}}\widehat{f}_x \\ \widehat{{}^g f_x} &= \;|\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{\,g^{-1}} \end{cases}$$

pour toute fonction continue à support compact $f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ et tout élément $g \in G(F_x)$, si et seulement si il s'écrit sous la forme

$$\widehat{f}_x(g') = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x(gg')$$

où

- *$d_\rho\, g$ est une mesure sur $G(F_x)$ que les translations à gauche ou à droite transforment par le caractère*

$$g \mapsto |\det{}_\rho(g)|_x\,,$$

- *$g \mapsto k_x(g)$ est une fonction sur $G(F_x)$ qui est localement intégrable et invariante par conjugaison.*

□

Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G, et pour toute place $x \in |F|$, on munit le radical unipotent $N_P(F_x)$ de la mesure invariante induite par la mesure autoduale da_x de F_x.

Cela permet d'associer à toute fonction continue à support compact

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

son “terme constant” le long de P

$$\begin{array}{rcl} f_{x,N_P} : M_P(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ m & \mapsto & |\delta_P(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \displaystyle\int_{N_P(F_x)} du \cdot f_x(u \cdot t) = |\delta_P(m)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_P(F_x)} du \cdot f_x(t \cdot u) \end{array}$$

qui est une fonction continue à support compact sur $M_P(F_x)$.

Voici une formulation générale du problème de définition de transformations de Fourier “non linéaires” sur les groupes réductifs :

Problème I.4. –

On voudrait associer à tout groupe réductif quasi-déployé G sur F, à toute représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

et à toute place $x \in |F|$, un opérateur linéaire de la forme du lemme I.3

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, \bullet)\,,$$

appelé “ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$”, de telle façon que soient vérifiées au moins les deux propriétés suivantes :

(1) *Pour toute fonction continue à support compact*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

et tout sous-groupe parabolique standard P de G égal à B ou, plus généralement, tel que $\rho_{M_P} : \widehat{M}_P \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ est une représentation de transfert, le produit

$$|\det{}_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\det{}_{B\cap M_P}(\bullet)|_x^{-1/2} \cdot f_{x,N_P} : M_P(F_x) \to \mathbb{C}$$

admet pour ρ_{M_P}-transformation de Fourier sur $M_P(F_x)$ le produit

$$|\det{}_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\det{}_{B\cap M_P}(\bullet)|_x^{-1/2} \cdot (\widehat{f}_x)_{N_P} : M_P(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

(2) *L’opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

est unitaire, c’est-à-dire préserve le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}\,.$$

Remarque :

La propriété (2) équivaut à demander que les deux opérateurs

$$f_x \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, \bullet)$$

et

$$f_x \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot \overline{k_x^\rho(g\, \bullet)}$$

sont inverses l'un de l'autre.

Elle fait de la ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ un automorphisme de l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure $d_\rho\, g$.

Si l'on munit G du cocaractère central $\mathbb{G}_m \to G$ qui correspond au caractère composé $\widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times$ et que l'on suppose, comme on fera toujours,

$$\overline{k_x^\rho(g)} = k_x^\rho(-g)\,, \qquad \forall\, g \in G(F_x)\,,$$

la propriété (2) est encore équivalente à

$$\hat{\hat{f}}_x(g) = f_x(-g)\,, \qquad \forall\, g \in G(F_x)\,, \qquad \forall\, f_x\,.$$

□

3 Décomposition spectrale locale

Considérons une place ultramétrique x de F.

Munissant $G(F_x)$ d'une mesure invariante dg, on note $\mathcal{H}_x^G$ l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact $h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$. Elle est la réunion filtrante des sous-algèbres unitaires $\mathcal{H}_{x,K}^G$ des fonctions invariantes à droite et à gauche par les sous-groupes ouverts compacts $K \subset G(F_x)$.

On note $\{\pi\}_x^G$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses admissibles irréductibles de $\mathcal{H}_x^G$. Il est la réunion filtrante des sous-ensembles $\{\pi\}_{x,K}^G$ de représentations π qui admettent des vecteurs non nuls invariants par les $K \subset G(F_x)$. Chaque $\{\pi\}_{x,K}^G$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathcal{H}_{x,K}^G$.

On dit qu'une fonction

$$\mathcal{H}_{x,K}^G \to \mathbb{C}$$

est polynomiale si elle appartient à l'algèbre $A_{x,K}^G$ engendrée par les fonctions

$$\{\pi\}_{x,K}^G \ni \pi \mapsto \mathrm{Tr}_\pi(h_x)$$

associées aux éléments $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$. On sait que chaque $A_{x,K}^G$ est un produit fini d'algèbres intègres et de type fini sur $\mathbb{C}$, et que l'ensemble correspondant $\{\pi\}_{x,K}^G$ s'identifie à un ouvert de Zariski de la variété algébrique complexe $\mathrm{Spec}\,(A_{x,K}^G)$. Enfin, si $K \subset K'$ sont deux sous-groupes ouverts compacts emboîtés de $G(F_x)$, l'inclusion

$$\{\pi\}_{x,K'}^G \hookrightarrow \{\pi\}_{x,K}^G$$

est une immersion ouverte et fermée entre variétés algébriques.

Pour tout $K \subset G(F_x)$, on note $\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G$ la sous-variété algébrique réelle de $\{\pi\}_{x,K}^G$ qui classifie les représentations π qui sont unitaires et tempérées. Elle est munie d'une unique mesure $d\pi$, appelée mesure de Plancherel, telle que, pour toute $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$, on ait

$$h_x(1) = \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot \mathrm{Tr}_\pi(h_x)\,.$$

Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, on note $\pi^\vee$ la représentation "contragrédiente" de π constituée des formes linéaires sur π qui sont invariantes par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$. On appelle "coefficients matriciels" de π les fonctions

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

de la forme
$$g \mapsto \langle v^\vee, g\cdot v\rangle = \langle g^{-1}\cdot v^\vee, v\rangle$$
avec $v \in \pi$, $v^\vee \in \pi^\vee$, ou plus généralement les combinaisons linéaires (finies) de telles fonctions.

On connaît le théorème de décomposition spectrale des fonctions localement constantes à support compact sur $G(F_x)$:

Théorème I.5. –

Pour tout $K \subset G(F_x)$, toute fonction $h_x \in \mathcal{H}^G_{x,K}$ s'écrit de manière unique sous la forme
$$h_x(g) = \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}^G_{x,K}} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \qquad \forall\, g \in G(F_x)\,,$$
où :

- *pour tout $g \in G(F_x)$,*
$$\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$$
est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}^G_{x,K}$,
- *pour toute $\pi \in \{\pi\}^G_{x,K}$, la fonction*
$$G(F_x) \ni g \mapsto h_{x,\pi}(g)$$
est un coefficient matriciel de π invariant à gauche et à droite par K. □

On dit que G est non ramifié en la place ultramétrique x si l'action sur $\widehat{G}$ du groupe de Galois local Γ_{F_x} est non ramifiée. On sait que G est non ramifié en presque toute place.

Si G est non ramifié en x, l'élément de Frobenius σ_x agit sur $\widehat{G}$ et on peut noter $\widehat{G}_x$ la fibre du produit semi-direct
$$\widehat{G} \rtimes \sigma_x^{\mathbb{Z}}$$
au-dessus de σ_x, munie de sa structure de variété algébrique sur $\mathbb{C}$ et de l'action par conjugaison de $\widehat{G}$.

De plus, G admet une structure de schéma en groupes réductifs sur $\mathrm{Spec}\,(O_x)$ et $G(O_x)$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F_x)$. Notant $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset} = \mathcal{H}^G_{x,G(O_x)}$ et $A^G_{x,\emptyset} = A^G_{x,G(O_x)}$, on a le théorème de Satake :

Théorème I.6. –

Si G est non ramifié en x, on a un isomorphisme canonique d'algèbres
$$S^G_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}\,.$$
En particulier, $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ est commutative et s'identifie à $A^G_{x,\emptyset}$.

Remarque :

Si G est déployé sur F_x, c'est-à-dire si Γ_{F_x} agit trivialement sur $\widehat{G}$, l'algèbre $\mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$ est l'algèbre $\mathbb{C}\,[\widehat{G}]^{\widehat{G}}$ des polynômes invariants sur $\widehat{G}$. Elle s'identifie à l'algèbre $\mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{W_G}$ des polynômes sur $\widehat{T}$ invariants par l'action du groupe de Weyl W_G.

C'est en particulier le cas si $G = \mathrm{GL}_r$. On note alors $\mathcal{H}^{\mathrm{GL}_r}_{x,\emptyset} = \mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r}$.

□

On dit qu'une représentation de transfert
$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

est non ramifiée en la place ultramétrique x si G est non ramifié en x et, de plus, l'action de Γ_{F_x} sur l'espace de ρ est non ramifiée. On sait que ρ est non ramifiée en presque toute place.

Si ρ est non ramifiée en x, elle définit un homomorphisme

$$\widehat{G} \rtimes \sigma_x^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

qui induit un morphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}\,[\widehat{\mathrm{GL}}_r]^{\widehat{\mathrm{GL}}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

et donc, via les isomorphismes de Satake,

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G\,.$$

Nous pouvons maintenant compléter le problème I.4 de définition de transformations de Fourier "non linéaires" sur les groupes réductifs :

Problème I.7. –

On voudrait associer à tout groupe réductif quasi-déployé G sur F, à toute représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

et à toute place ultramétrique x de F, un sous-espace de fonctions

$$G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

appelées les "ρ-fonctions", qui satisfasse les propriétés suivantes :

(1) *Les ρ-fonctions sont de carré intégrable pour la mesure $d_\rho\, g$, et chacune est invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$.*

(2) *L'espace des ρ-fonctions est invariant par les translations à droite $f_x \mapsto f_x^g = f_x(\bullet\, g)$ et à gauche $f_x \mapsto {}^g f_x = f_x(g\,\bullet)$, ainsi que par la ρ-transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ et son inverse $f_x \mapsto \widehat{f}_x(-\bullet)$. D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$.*

(3) *Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, les intégrales*

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot \varphi_x(g) \cdot |\det{}_G(g)|_x^{s-\frac{1}{2}} \cdot |\det{}_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}}$$

associées aux ρ-fonctions

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

et aux coefficients matriciels de π

$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ assez grande, vers une fraction rationnelle en $Z = q_x^{-s}$.

De plus, ces fractions rationnelles en $Z = q_x^{-s}$ engendrent un idéal fractionnaire qui admet un unique générateur

$$L_x(\rho, \pi, Z)$$

dont l'inverse $L_x(\rho,\pi,Z)^{-1}$ est un polynôme en Z et π dont la spécialisation en $Z = 0$ est égale à 1.

(4) *Une fonction invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert compact* K

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une ρ*-fonction si et seulement si ses restrictions aux fibres de l'homomorphisme*

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \to q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qu'elle se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où :

- *pour tout* $g \in G(F_x)$,

$$\pi \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

  est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^G$,
- *pour toute* $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, *la fonction sur* $G(F_x)$

$$g \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

  est un coefficient matriciel de π *invariant à droite et à gauche par* K.

(5) *Il existe une famille (nécessairement unique) de polynômes inversibles en* π *et* $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_x\left(\rho, \pi \otimes |\det_G(\bullet)|^s,\, q_x^s \cdot Z\right)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G\,,$$

telle que, pour toute ρ*-fonction* f_x *décomposée spectralement comme ci-dessus, on ait*

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)\,.$$

(6) *Pour tout sous-groupe parabolique standard* $P = M_P \cdot N_P$ *de* G *tel que* $\rho_{M_P} : \widehat{M}_P \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ *est une représentation de transfert, et pour toute* ρ*-fonction sur* $G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

le produit

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\det_{B\cap M_P}(\bullet)|_x^{-1/2} \cdot f_{x,N_P} : M_P(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une ρ_{M_P}*-fonction sur* $M_P(F_x)$.
En particulier, le produit

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une ρ_T*-fonction sur* $T(F_x)$.
Réciproquement, si une fonction invariante à droite et à gauche par $K \subset G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

admet une décomposition spectrale qui ne fait apparaître que des représentations $\pi \in \mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G$ *induites normalisées de représentations* $\pi_P \in \mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{M_P}$, *alors* f_x *est une* ρ*-fonction si les*

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\det_{B\cap M_P}(\bullet)|_x^{-1/2} \cdot ({}^g f_x^{g'})_{N_P} : M_P(F_x) \to \mathbb{C}\,, \qquad g, g' \in G(F_x)\,,$$

sont des ρ_{M_P}*-fonctions sur* $M_P(F_x)$.

(7) *Si G et ρ sont non ramifiés en la place ultramétrique x, et $K = G(O_x)$, les fractions rationnelles*

$$L_x(\rho,\pi,Z)\,, \qquad \pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G = \{\pi\}_{x,G(O_x)}^G\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho,\pi,Z)\,, \qquad \pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G\,,$$

sont les transformées par l'homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathbb{C}\left[Z_1^{\pm 1},\ldots,Z_r^{\pm 1}\right]^{\mathfrak{S}_r} \cong \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

des fractions rationnelles

$$\prod_{1\le i\le r} \frac{1}{1 - Z_i\cdot Z} = \prod_{1\le i\le r} L_x(\chi_0, Z_i\cdot Z)$$

et

$$\prod_{1\le i\le r} \varepsilon_x(\chi_0, Z_i\cdot Z,\psi_x)$$

où χ_0 désigne le caractère trivial de $\mathbb{G}_m(F_x) = F_x^\times$.

Remarques :

(i) Si F est un corps de nombres, on voudrait aussi définir un espace analogue de ρ-fonctions en toute place archimédienne x de F. Sa connaissance devrait être équivalente à celle de facteurs

$$L_x(\rho,\pi,Z) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho,\pi,Z)$$

associés aux représentations admissibles irréductibles π de $G(F_x)$.

(ii) Compte tenu des propriétés (3), (4) et (5), la propriété (6) équivaut à demander que, pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui est l'induite normalisée d'une représentation $\pi_P \in \{\pi\}_x^{M_P}$ d'un sous-groupe de Levy standard P de G tel que $\rho_{M_P} : \widehat{M_P} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ est une représentation de transfert, on a

$$L_x(\rho,\pi,Z) = L_x(\rho_{M_P},\pi_P,Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho,\pi,Z) = \varepsilon_x(\rho_{M_P},\pi_P,Z)\,.$$

(iii) À partir du moment où, comme il est demandé dans la propriété (2), l'espace des ρ-fonctions est stable par translations à droite et à gauche ainsi que par l'opérateur de ρ-transformation de Fourier qui est compatible avec ces translations au sens du lemme I.3, cet espace et sa ρ-transformation de Fourier doivent admettre des expressions spectrales. Les propriétés (3), (4) et (5) ne font que préciser la forme attendue de ces expressions spectrales.

(iv) La propriété d'unitarité de l'opérateur de ρ-transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f_x}$ s'exprime par le fait que, pour toute représentation lisse admissible irréductible unitaire et tempérée $\pi \in \{\pi\}_x^G$, les fractions rationnelles

$$L_x(\rho,\pi^\vee,Z) \qquad \text{et} \qquad L_x(\rho,\pi,Z)$$

doivent être conjuguées l'une de l'autre, tandis que les polynômes inversibles

$$\varepsilon_x(\rho,\pi^\vee,Z) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho,\pi,Z)$$

doivent vérifier la relation

$$\varepsilon_x(\rho,\pi^\vee,Z^{-1})\cdot\overline{\varepsilon_x(\rho,\pi,Z)} = 1\,.$$

$\square$

4 Formule de Poisson

On considère toujours les groupes réductifs G quasi-déployés sur F munis d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

Dans ce paragraphe, on suppose résolus le problème I.4 de définition d'une ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ en chaque place $x \in |F|$ ainsi que le problème I.7 de définition d'un sous-espace de ρ-fonctions sur $G(F_x)$ en toute place x.

On rappelle que G et ρ sont non ramifiés en presque toute place ultramétrique x. Si G est non ramifié en une place x, les fonctions sur $G(F_x)$ invariantes à gauche et à droite par $G(O_x)$ sont appelées "sphériques", et l'ensemble des caractères de l'algèbre commutative $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ des fonctions sphériques à support compact est noté $\{\pi\}^G_{x,\emptyset}$.

Définition I.8. –

Dans les conditions ci-dessus, on pose :

(i) *En toute place ultramétrique $x \in |F|$ où G et ρ sont non ramifiés, on appelle "ρ-fonction standard" (ou "spéciale") la fonction sphérique*

$$G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$|\det\nolimits_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}^G_{x,\emptyset}} d\pi \cdot \varphi_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, pour tout $\pi \in \{\pi\}^G_{x,\emptyset}$, $\varphi_{x,\pi}(\bullet)$ désigne l'unique coefficient matriciel de π qui est sphérique et vérifie $\varphi_{x,\pi}(1) = 1$.

(ii) *On appellera ρ-fonctions sur $G(\mathbb{A})$ les combinaisons linéaires de produits*

$$f = \bigotimes_{x\in|F|} f_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

de ρ-fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

égales aux "ρ-fonctions standard" de (i) *en presque toute place ultramétrique x où G et ρ sont non ramifiés.*

(iii) *On appellera ρ-transformation de Fourier des ρ-fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ l'opérateur linéaire qui associe à toute ρ-fonction produit*

$$f = \bigotimes_{x\in|F|} f_x$$

le produit des ρ-transformées de Fourier locales

$$\widehat{f} = \bigotimes_{x\in|F|} \widehat{f}_x\,.$$

Il admet pour inverse le produit $f \mapsto \widehat{f}(-\bullet)$ des opérateurs $f_x \mapsto \widehat{f}_x(-\bullet)$.

Remarque :

Il résulte des conditions du problème I.7 que l'on doit avoir, en presque toute place ultramétrique x de F où G et ρ sont non ramifiés, la propriété

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = 1\,, \qquad \forall\, \pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G\,,$$

qui entraîne que la ρ-fonction standard sur $G(F_x)$ est sa propre ρ-transformée de Fourier.

Par conséquent, la ρ-transformée de Fourier d'une ρ-fonction globale sur $G(\mathbb{A})$ est encore une ρ-fonction globale.

□

Pour énoncer une formule de Poisson susceptible d'être vérifiée par la ρ-transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$, nous avons besoin d'introduire une nouvelle notation :

Définition I.9. –

Soit x une place ultramétrique de F en laquelle le groupe réductif G et la représentation ρ sont non ramifiés.

Soit une ρ-fonction sur $G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est sphérique et dont la décomposition spectrale s'écrit

$$f_x(\bullet) = |\det{}_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)\,.$$

Alors, pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, on note

$$f_x^{N,N'} : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

la ρ-fonction définie par l'expression spectrale

$$f_x^{N,N'}(\bullet) = |\det{}_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^N\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^{N'}\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où $I_x^N(\rho, \pi, Z)$ désigne le polynôme en Z et π produit de

$$L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N en Z qui apparaît dans le développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_x(\rho, \pi, Z)\,.$$

Remarques :

(i) Comme le polynôme $L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$ divise les $I_x^N(\rho, \pi, Z)$ par construction, les fonctions $f_x^{N,N'}$, $N, N' \in \mathbb{N}$, et leurs ρ-transformées de Fourier $\widehat{f_x^{N,N'}}$ sont éléments de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$. Autrement dit, elles sont supportées par des parties compactes de $G(F_x)$.

(ii) Pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$, on a l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_x^N(\rho, \pi, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en Z. De plus, les sommes

$$\sum_{N \geq N_0} \left| I_x^N \left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}} \right) \right|$$

convergent uniformément vers 0 si $\pi \in \operatorname{Im} \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ et N_0 devient arbitrairement grand.

Il en résulte que, pour tout $g \in G(F_{x_0})$, on a

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} f_x^{N,N'}(g) = f_x(g)\,.$$

□

Pour tout élément $z_0 \in \mathbb{C}$, toute fraction rationnelle à coefficients complexes $R \in \mathbb{C}(Z)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$R = R_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{a_i}{(Z - z_0)^i}$$

où les a_i, $1 \leq i \leq k$, sont des constantes et R_0 est une fraction rationnelle en Z dont le dénominateur ne s'annule pas en z_0. On peut appeler $R_0(z_0)$ la "valeur régularisée" de R au point z_0.

Cela permet de proposer l'énoncé suivant de formule de Poisson pour la ρ-transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$:

Problème I.10. –

On voudrait que pour toute ρ-fonction globale

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on ait :

(1) *Pour toute place ultramétrique $x \in |F|$ en laquelle G et ρ sont non ramifiés et f se factorise en*

$$f = f_x \otimes f^x\,,$$

avec pour facteur une ρ-fonction sphérique sur $G(F_x)$

$$f_x : G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

alors la série formelle

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} (f_x^{N,N'} \otimes f^x)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z dont la "valeur régularisée en $Z = 1$", notée $S(f)$, ne dépend pas du choix de la place x.

(2) *On a la formule de Poisson*

$$S(f) = S(\widehat{f})$$

qui s'écrit encore

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{f}(\gamma) \text{”}$$

en notant

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \left(\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f)\,.$$

(3) *On a*

$$“\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} f(\gamma)\,” = \sum_{\gamma\in G(F)} f(\gamma)$$

si f se factorise en au moins une place ultramétrique x sous la forme

$$f = f_x \otimes f^x\,,$$

avec pour facteur une ρ-fonction locale

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est supportée par une partie compacte de $G(F_x)$.

Remarque :

En toute place ultramétrique x de F, pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$ et pour tout caractère unitaire continu

$$\omega : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$$

assez ramifié en fonction de K, on s'attend à ce que

$$L_x(\rho, \pi', Z) = 1$$

pour toute représentation $\pi' \in \{\pi\}_x^G$ de la forme

$$\pi' = \pi \otimes (\omega \circ \det_G(\bullet))\,, \qquad \text{avec} \quad \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G\,.$$

Cela implique que toute ρ-fonction sur $G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations $\pi' = \pi \otimes (\omega \circ \det_G(\bullet))$ comme ci-dessus, est supportée par une partie compacte de $G(F_x)$, ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{f}_x$.

Pour toute ρ-fonction globale qui admet en facteur une telle f_x en au moins une place,

$$f = f_x \otimes f^x$$

la formule de Poisson doit donc s'écrire

$$\sum_{\gamma\in G(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in G(F)} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

Exemple :

Si $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, la ψ_x-transformation de Fourier linéaire définie en toute place x par

$$k_x^\rho(g) = \psi_x(\mathrm{Tr}(g))$$

répond aux conditions du problème I.4.

Alors, en toute place ultramétrique x, l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(F_x) \supset \mathrm{GL}_r(F_x)$ répond aux conditions du problème I.7.

On a vérifié dans le cas des corps de fonctions que les conditions du problème I.10 sont également remplies, avec pour toute ρ-fonction globale sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui se prolonge donc en une fonction continue (et même localement constante à support compact) sur $M_r(\mathbb{A})$

$$f : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \subset M_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

l'identité

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”} = \sum_{\gamma\in M_r(F)} f(\gamma)\,.$$

□

On a démontré dans le cas des corps de fonctions :

Théorème I.11. –

Le transfert automorphe de Langlands de G vers GL_r *via la représentation* $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ *fournit une réponse positive aux problèmes* I.4, I.7 *et* I.10. □

Pour formuler une réciproque, on a besoin de la définition suivante :

Définition I.12. –

Pour tout entier $r' \geq 1$, on appelle "groupe croisé de degré r' de G" et on note $G_{r'}$ le groupe réductif quasi-déployé sur F défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} G_{r'} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_{r'} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \det} \\ G & \xrightarrow{\det_G} & \mathbb{G}_m \end{array}$$

et dont le dual $\widehat{G}_{r'}$ s'identifie au conoyau du cocaractère central

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^\times & \to & \widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})\,, \\ z & \mapsto & \left(\widehat{\det}_G(z), z^{-1}\right). \end{array}$$

Si G est muni de la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,,$$

on note

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F = \Big[(\widehat{G} \rtimes \Gamma_F) \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})\Big] / \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

la représentation de transfert déduite de ρ par produit tensoriel avec l'identité de $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{rcl} \Big[(\widehat{G} \rtimes \Gamma_F) \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})\Big] / \mathbb{C}^\times & \to & \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})\,, \\ (g, g') & \mapsto & \rho(g) \otimes g'\,. \end{array}$$

□

Les "théorèmes réciproques", ou bien la construction plus directe et un peu plus fine de "noyaux du transfert", permettent de prouver :

Théorème I.13. –

La solution des problèmes I.4, I.7 *et* I.10 *dans le cas de la représentation de transfert*

$$\rho_{r-1} : \widehat{G}_{r-1} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_{r(r-1)}$$

du groupe croisé G_{r-1} de degré $r-1$ implique le transfert automorphe de Langlands de G à GL_r *via ρ.*

□