Exposé II.
Le cas des tores
(Laurent Lafforgue, IHES, 26 juin 2014)

1 Construction de noyaux des transformations de Fourier

On considère toujours un groupe réductif quasi-déployé G sur F, muni d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

Par définition d'une représentation de transfert, ρ induit un morphisme de tores complexes

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r\,.$$

Lemme II.1. –

Faisons l'hypothèse que le groupe de Galois Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base.

Soit E l'extension séparable de degré r de F qui est associée à l'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots, r\}$ muni de l'action de Γ_F, et soit

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m$$

le tore algébrique de rang r sur F déduit de $\mathbb{G}_m$ par restriction des scalaires à la Weil de E à F.

Alors :

(i) *Le dual $\widehat{T}_E$ de T_E s'identifie au produit*

$$(\mathbb{C}^\times)^r$$

muni de l'action par permutation de Γ_F.

(ii) *L'homomorphisme Γ_F-équivariant de tores complexes*

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un morphisme de tores

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

bien défini sur F.

(iii) *Le composé*

$$\det_E : T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \xrightarrow{\det_G} \mathbb{G}_m$$

n'est autre que l'homomorphisme de norme, c'est-à-dire le déterminant de l'action de T_E sur l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1\,.$$

En particulier, la restriction de ce déterminant au noyau

$$T_\rho = \mathrm{Ker}\left(T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T\right)$$

est triviale.

Remarque :

Par définition d'une représentation de transfert, le noyau de

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

est trivial. Il en résulte que l'on a une suite exacte de tores algébriques sur F

$$1 \longrightarrow T_\rho \longrightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \longrightarrow 1\,.$$

Exemple :

Si G est déployé sur F et l'action de Γ_F sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ est triviale, on a $T_E = \mathbb{G}_m^r$ et T_ρ est un tore déployé sur F comme T et T_E.

C'est en particulier le cas si

$$\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})/\mu_k$$

et

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

pour n'importe quel entier $k \geq 1$.

Dans ce cas, on a

$$T_E = T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1}$$

et l'homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1} \to T = \mathbb{G}_m^2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

est

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \left(\lambda_1\, \lambda_2^2 \ldots \lambda_k^k = \mu_1\,, \quad \lambda_0^k\, \lambda_1^{k-1} \ldots \lambda_{k-1} = \mu_2\,, \quad \lambda_0\, \lambda_1 \ldots \lambda_k = (\mu_1\, \mu_2)^{\frac{1}{k}}\right).$$

$\square$

L'espace linéaire $\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{A}^1$ est muni du morphisme F-linéaire

$$\mathrm{Tr} : \overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$$

qui, pour toute F-algèbre A, associe à tout élément $a \in \overline{T}_E\,(A) = E \otimes_F A$ sa trace comme endomorphisme du A-module $E \otimes_F A$ libre de rang r.

En particulier, pour toute place x de F, le F_x-espace vectoriel $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$, qui est de dimension r, est muni de la forme linéaire

$$\mathrm{Tr} : \overline{T}_E\,(F_x) \to F_x\,.$$

On peut composer celle-ci avec la composante

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$$

du caractère additif unitaire continu non trivial

$$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$$

pour définir

$$\begin{array}{rcl} k_x^E : T_E\,(F_x) \subset \overline{T}_E\,(F_x) & \to & \mathbb{C}\,, \\ t_x & \mapsto & \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_x))\,. \end{array}$$

On connaît l'existence et les propriétés de la ψ_x-transformation de Fourier linéaire sur $\overline{T}_E\,(F_x) \supset T_E\,(F_x)$:

Théorème II.2. –

Pour toute place $x \in |F|$, il existe sur $\overline{T}_E\,(F_x) \supset T_E\,(F_x)$ une unique mesure additive dt_x, dite la "mesure autoduale", telle que la ψ_x-transformation de Fourier sur $T_E\,(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \int_{T_E\,(F_x)} dt_x \cdot f_x(t_x) \cdot k_x^E(t_x\, \bullet)$$

définisse un opérateur unitaire, c'est-à-dire qui respecte le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{T_E\,(F_x)} dt_x \cdot f_1(t_x) \cdot \overline{f_2(t_x)}\,.$$

Remarque :

Les mesures additives sur $T_E\,(F_x) \subset \overline{T}_E\,(F_x)$ sont transformées par les translations multiplicatives suivant le caractère

$$|\det_E(\bullet)|_x : T_E\,(F_x) \to F_x^\times \to \mathbb{R}_+^\times\,.$$

Par conséquent, on a pour toute fonction f_x sur $T_E\,(F_x)$ et tout élément $t \in T_E\,(F_x)$

$$\widehat{f_x^t} = |\det_E(t)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{t^{-1}}\,.$$

En particulier, si $t \in T_\rho(F_x)$, on a

$$\widehat{f_x^t} = \widehat{f}_x^{t^{-1}}\,.$$

□

Lemme II.3. –

En toute place $x \in |F|$, on a :

(i) *La suite exacte de tores algébriques sur F*

$$1 \longrightarrow T_\rho \longrightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \longrightarrow 1$$

induit un homomorphisme

$$T_E\,(F_x) \to T(F_x)$$

dont le noyau est $T_\rho(F_x)$ et dont l'image est un sous-groupe ouvert de $T(F_x)$.

(ii) *Si l'on munit $T_\rho(F_x)$ d'une mesure invariante dt_ρ, il existe sur $T(F_x)$ une unique mesure dt qui se transforme suivant le caractère*

$$|\det_G(\bullet)|_x$$

et dont la restriction à l'image de $T_E\,(F_x) \to T(F_x)$ est le quotient de la mesure autoduale de $T_E\,(F_x)$ par la mesure invariante dt_ρ de $T_\rho(F_x)$.

□

Pour toute fonction $f_x : T_E\,(F_x) \to \mathbb{C}$, on peut noter

$$\begin{array}{rcl} (\rho_T^\vee)_*(f_x) : T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho) \end{array}$$

quand cette intégrale est bien définie en presque tout $t \in T(F_x)$.

On déduit du théorème II.2 et du lemme II.3 :

Corollaire II.4. –

En toute place $x \in |F|$ comme ci-dessus, on a :

(i) *Le sous-espace des fonctions de carré intégrable sur $T_E\,(F_x)$*

$$f_x : T_E\,(F_x) \to \mathbb{C}$$

telles que

$$(\rho_T^\vee)_*(f_x) : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

soit bien définie et de carré intégrable sur $T(F_x)$, est stable par la ψ_x-transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x\,.$$

(ii) *Il existe un unique opérateur unitaire sur $T(F_x)$*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$$

tel que :

- *pour toute fonction $f_x : T_E\,(F_x) \to \mathbb{C}$ comme dans* (i), *on a*

$$\widehat{(f_T^\vee)_*(f_x)} = (f_T^\vee)_*(\widehat{f}_x)\,,$$

- *pour toute fonction φ_x et tout $t \in T(F_x)$, on a*

$$\widehat{\varphi_x^t} = |\det{}_G(t)|_x^{-1} \cdot \widehat{\varphi}_x^{\,t^{-1}}\,.$$

(iii) *Cette transformation de Fourier sur $T(F_x)$*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$$

a la forme

$$\widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(\bullet\, t) \cdot \varphi_x(t)$$

où

$$k_x^{\rho_T} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une fonction localement intégrable telle que

$$k_x^{\rho_T}(t) = \lim_{a \mapsto 0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot k_x^E(t_\rho) \cdot \mathbb{I}_x(a \cdot t_\rho)$$

pour n'importe quelle fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est une place archimédienne]

$$\mathbb{I}_x : \overline{T}_E\,(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est égale à 1 dans un voisinage du point $0 \in \overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$.

Remarque :

L'inverse de l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier défini par le noyau $t \mapsto k_x^{\rho_T}(t)$ est l'opérateur défini par le noyau $t \mapsto \overline{k_x^{\rho_T}}(t) = k_x^{\rho_T}(-t)$. □

2 Espaces de ρ_T-fonctions locales

Comme au paragraphe précédent, on suppose que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

par permutation de ses r vecteurs de base, ce qui permet d'introduire E, T_E, $\rho_T^\vee$, T_ρ, $\overline{T}_E$ et les opérateurs unitaires de ρ_T-transformation de Fourier locale sur les $T(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(\bullet\, t) \cdot f_x(t)\,.$$

On connaît :

Théorème II.5. –

En toute place ultramétrique x de F, appelons ρ_E-fonctions les fonctions sur $T_E\,(F_x)$ qui se prolongent (de manière nécessairement unique) en des fonctions localement constantes à support compact sur $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$.

Alors l'espace des ρ_E-fonctions sur $T_E\,(F_x)$ satisfait toutes les conditions du problème I.7 *(excepté la condition* (6) *qui est vide dans ce cas) relativement à la ψ_x-transformation de Fourier linéaire sur $T_E\,(F_x)$*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{T_E\,(F_x)} dt_x \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(\bullet\, t_x)) \cdot f_x(t_x)\,.$$

En particulier, cet espace des ρ_E-fonctions est respecté par la ψ_x-transformation de Fourier, et sa connaissance plus celle de l'action sur lui de la transformation de Fourier équivalent à celle des fractions rationnelles

$$L_x(\rho_E, \chi, Z) = L_x(\chi, Z)$$

$$\varepsilon_x(\rho_E, \chi, Z) = \varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z)$$

associées à tout élément $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$ c'est-à-dire à tout caractère localement constant

$$\chi : T_E\,(F_x) \to \mathbb{C}^\times\,.$$

□

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F, $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$ est un produit fini de facteurs $E_{x'}$ tous isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Nous allons introduire des espaces de ρ_E-fonctions sur ces facteurs $E_{x'}$ et leur produit $\overline{T}_E\,(F_x)$.

Pour cela, nous allons introduire des notations nouvelles.

Tout d'abord, considérant les 2 fonctions

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto \begin{cases} G_1(s) &=& \pi^{-\frac{1}{2}s} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\,s\right)\,, \\ G_2(s) &=& (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s)\,, \end{cases}$$

on appelle "facteur eulérien réel" [resp. "facteur eulérien complexe"] les fonctions de la forme

$$P(s) \cdot G_1(s + s_0)$$

$$[\text{resp.} \qquad P(s) \cdot G_2(s + s_0)\ ]$$

où P est un polynôme en $s \in \mathbb{C}$ et $s_0 \in \mathbb{C}$ est une constante.

Le théorème II.5 est complété par le théorème suivant :

Théorème II.6. –

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F, considérons la décomposition

$$\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x = \prod_{x'} E_{x'}$$

en facteurs $E_{x'}$ isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lorsque $E_{x'} \cong \mathbb{R}$ [resp. $E_{x'} \cong \mathbb{C}$] et le caractère unitaire $\psi_x \circ \mathrm{Tr}$ restreint à $E_{x'}$ est écrit sous la forme

$$a \mapsto \exp\,(2\,\pi\, i\, c_{x'}\, a)\,, \quad \textit{avec} \quad c_{x'} \in \mathbb{R}^\times\,,$$

$$\textit{[resp.} \qquad a \mapsto \exp\,(2\,\pi\, i\,(c_{x'}\, a + \overline{c}_{x'}\, \overline{a}))\,, \quad \textit{avec} \quad c_{x'} \in \mathbb{C}^\times \ \textit{]},$$

on appelle ρ_E-fonctions sur $E_{x'}$ les fonctions de la forme

$$a \mapsto P(a) \cdot \exp\,(-\pi\,|c_{x'}|\,a^2)$$

$$\textit{[resp.} \qquad a \mapsto P(a,\overline{a}) \cdot \exp\,(-2\,\pi\,|c_{x'}|\,|a|^2) \ \textit{]}$$

où P est un polynôme arbitraire de $\mathbb{C}\,[Z]$ [resp. $\mathbb{C}\,[Z_1,Z_2]$].

Et on appelle ρ_E- fonctions sur $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x = \prod\limits_{x'} E_{x'}$ les combinaisons linéaires de produits

$$\bigotimes_{x'} f_{x'}$$

de ρ_E- fonctions sur les facteurs $E_{x'}$.

Alors :

(i) *L'espace des ρ_E-fonctions sur chaque facteur $E_{x'}$ [resp. sur leur produit $\overline{T}_E\,(F_x)$] est stable par translation par les éléments du sous-groupe compact maximal de $E_{x'}^\times$ [resp. de $T_E\,(F_x)$] (mais pas par les éléments en dehors de ce sous-groupe).*

Il est également stable par la ψ_x-transformation de Fourier et par son inverse.

D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $E_{x'}$ [resp. $\overline{T}_E\,(F_x)$].

(ii) *Pour tout caractère continu $\chi : E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times$ [resp. $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$], les intégrales*

$$\int_{E_{x'}} dt_{x'} \cdot f_{x'}(t_{x'}) \cdot \chi(t_{x'}) \cdot |\mathrm{det}_E(t_{x'})|_x^{s-1}$$

$$\textit{[resp.} \qquad \int_{\overline{T}_E\,(F_x)} dt_x \cdot f_x(t_x) \cdot \chi(t_x) \cdot |\mathrm{det}_E(t_x)|_x^{s-1} \ \textit{]}$$

associées aux ρ_E-fonctions $f_{x'}$ sur $E_{x'}$ [resp. f_x sur $\overline{T}_E\,(F_x)$], convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ assez grande, vers une fonction analytique en s.

De plus, ces fonctions analytiques forment un module libre sur $\mathbb{C}\,[Z]$ qui possède un unique générateur de la forme

$$L_{x'}\left(\chi, s + \frac{1}{2}\right) \cdot |c_{x'}|^{-\frac{1}{2}(s+1)} \quad \textit{si} \quad F_{x'} \cong \mathbb{R}$$

$$\textit{[resp.} \qquad L_{x'}\left(\chi, s + \frac{1}{2}\right) \cdot |c_{x'}|^{-(s+1)} \quad \textit{si} \quad F_{x'} \cong \mathbb{C} \ \textit{]}$$

$$\textit{[resp.} \qquad L_x\left(\chi, s + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\prod_{F_{x'} \cong \mathbb{R}} |c_{x'}|^{-\frac{1}{2}(s+1)}\right) \cdot \left(\prod_{F_{x'} \cong \mathbb{C}} |c_{x'}|^{-(s+1)}\right) \ \textit{]}$$

où les $L_{x'}(\chi,\bullet)$ sont des facteurs eulériens réels [resp. complexes] et

$$L_x(\chi,\bullet)=\prod_{x'} L_{x'}(\chi,\bullet)\,.$$

(iii) *Les ρ_E-fonctions sur chaque facteur $E_{x'}$ [resp. sur $\overline{T}_E\,(F_x)$] admettent une décomposition spectrale de la forme*

$$f_{x'}(\bullet)=|\det_E(\bullet)|_x^{-\frac12}\cdot\int_{\{\chi\,:\,E_{x'}^\times\to\mathbb{C}^\times\text{ unitaire}\}} d\chi\cdot\chi(\bullet)\cdot L_{x'}\left(\chi^{-1},\frac12\right)\cdot p_{x'}(\chi)$$

$$\text{[resp.}\qquad f_x(\bullet)=|\det_E(\bullet)|_x^{-\frac12}\cdot\int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi\cdot\chi(\bullet)\cdot L_x\left(\chi^{-1},\frac12\right)\cdot p_x(\chi)\ \text{]}$$

où, pour tout caractère continu $\chi:E_{x'}^\times\to\mathbb{C}^\times$, la fonction

$$\mathbb{C}\ni s\mapsto p_{x'}\left(\chi\otimes|\det_E(\bullet)|_x^s\right)$$

est le produit d'un polynôme en s et de

$$\begin{cases} s & \mapsto\quad |c_{x'}|^{-\frac12 s}\qquad si\qquad F_{x'}\cong\mathbb{R}\,,\\ s & \mapsto\quad |c_{x'}|^{-s}\qquad si\qquad F_{x'}\cong\mathbb{C}\,,\end{cases}$$

et où la fonction p_x est une somme de produits de telles fonctions $p_{x'}$.

(iv) *Il existe une famille (nécessairement unique) de fonctions exponentielles en $s\in\mathbb{C}$*

$$\varepsilon_{x'}(\chi,s,\psi_x)$$

$$\text{[resp.}\qquad \varepsilon_x(\chi,s,\psi_x)=\prod_{x'}\varepsilon_{x'}(\chi,s,\psi_x)\ \text{]}$$

indexées par les caractères continus $\chi:E_{x'}^\times\to\mathbb{C}^\times$ [resp. $\chi\in\{\pi\}_x^{T_E}$], telles que

$$\varepsilon_{x'}(\chi,s,\psi_x)=\varepsilon_{x'}\left(\chi\otimes|\det_E(\bullet)|^s,0,\psi_x\right)$$

$$\text{[resp.}\qquad \varepsilon_x(\chi,s,\psi_x)=\varepsilon_x\left(\chi\otimes|\det_E(\bullet)|^s,0,\psi_x\right)\ \text{]}$$

et que, pour toute ρ_E-fonction $f_{x'}$ sur $E_{x'}$ [resp. f_x sur $\overline{T}_E\,(F_x)$] décomposée spectralement comme ci-dessus, on ait

$$\widehat{f}_{x'}(\bullet)=|\det_E(\bullet)|_x^{-\frac12}\cdot\int_{\{\chi\,:\,E_{x'}^\times\to\mathbb{C}^\times\text{ unitaire}\}} d\chi\cdot\chi^{-1}(\bullet)\cdot L_{x'}\left(\chi,\frac12\right)\cdot\varepsilon_{x'}\left(\chi,\frac12,\psi_x\right)\cdot p_{x'}(\chi)$$

$$\text{[resp.}\qquad \widehat{f}_x(\bullet)=|\det_E(\bullet)|_x^{-\frac12}\cdot\int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi\cdot\chi^{-1}(\bullet)\cdot L_x\left(\chi,\frac12\right)\cdot\varepsilon_x\left(\chi,\frac12,\psi_x\right)\cdot p_x(\chi)\ \text{]}.$$

□

Remplaçons maintenant cette notion de ρ_E-fonctions sur $E_{x'}$ ou $\overline{T}_E\,(F_x)$ par une notion très proche mais encore provisoire de ρ_E-fonctions sur $E_{x'}^\times$ ou $T_E\,(F_x)$, qui est davantage analogue à celle en les places ultramétriques et mieux adaptée à la structure multiplicative de $E_{x'}^\times$ ou $T_E\,(F_x)$:

Définition provisoire II.7. –

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F, considérons la décomposition

$$T_E\,(F_x)=\prod_{x'} E_{x'}^\times$$

en facteurs $E_{x'}^\times$ isomorphes à $\mathbb{R}^\times$ ou $\mathbb{C}^\times$.

(i) *On appelle ρ_E-fonctions sur chaque facteur $E_{x'}^\times$ les fonctions*

$$f_{x'} : E_{x'}^\times \to \mathbb{C}$$

qui admettent une décomposition spectrale de la forme

$$f_{x'}(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi \,:\, E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_{x'}(\chi)$$

où

- *la fonction $p_{x'}$ des caractères continus $\chi : E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times$ est supportée par un nombre fini de classes modulo l'action de*
$$\mathbb{C} \ni s \mapsto |\det_E(\bullet)|_x^s\,,$$
- *pour tout représentant χ d'une telle classe, la fonction*
$$\mathbb{C} \ni s \mapsto p_{x'}\left(\chi \otimes |\det_E(\bullet)|_x^s\right)$$
est le produit d'un polynôme en s et d'une exponentielle de la forme
$$s \mapsto \exp(c \cdot s) \qquad \text{avec} \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) *On appelle ρ_E-fonctions sur $T_E(F_x)$ les combinaisons linéaires (finies) de produits*

$$\bigotimes_{x'} f_{x'}$$

de ρ_E-fonctions sur les facteurs $E_{x'}^\times$.

Remarques :

(i) L'espace des ρ_E-fonctions sur chaque facteur $E_{x'}^\times$ [resp. sur $T_E(F_x)$] est stable par translation par des éléments arbitraires de $E_{x'}^\times$ [resp. $T_E(F_x)$], ainsi que par la ψ_x-transformation de Fourier et son inverse.
D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $E_{x'}^\times$ [resp. $T_E(F_{x'})$].

(ii) La connaissance de l'espace des ρ_E-fonctions sur les $E_{x'}^\times$ et $T_E(F_x)$ équivaut à celle des facteurs

$$L_{x'}(\chi, \bullet)$$

et

$$L_x(\chi, \bullet) = \prod_{x'} L_{x'}(\chi, \bullet)\,.$$

(iii) La ψ_x-transformation de Fourier des ρ_E-fonctions sur les $E_{x'}^\times$ et $T_E(F_x)$ consiste à associer à une fonction décomposée spectralement sous la forme

$$f_{x'}(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi \,:\, E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_{x'}(\chi)$$

$$\text{[resp.} \qquad f_x(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)\ \text{]}$$

la fonction définie spectralement par la formule

$$\widehat{f}_{x'}(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi\,:\,E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_{x'}\left(\chi, \frac{1}{2}, \psi_x\right) \cdot p_{x'}(\chi)$$

$$[\text{resp.} \qquad \widehat{f}_x(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_x\left(\chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\chi, \frac{1}{2}, \psi_x\right) \cdot p_x(\chi)\ ]\,.$$

Sa connaissance est équivalente à celle des facteurs

$$\varepsilon_{x'}\,(\chi, \bullet, \psi_x)$$

$$[\text{resp.} \qquad \varepsilon_x\,(\chi, \bullet, \psi_x) = \prod_{x'} \varepsilon_{x'}\,(\chi, \bullet, \psi_x)\ ]\,.$$

□

On déduit du théorème II.5 :

Corollaire II.8. –

Supposant toujours que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

par permutation de ses r vecteurs de base, on considère une place ultramétrique x de F.

Appelons ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ les combinaisons linéaires de fonctions images directes

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_*\, f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de ρ_E-fonctions f_x sur $T_E\,(F_x)$ et de leurs translatées par des éléments de $T(F_x)$.

Alors :

(i) *L'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ satisfait toutes les conditions du problème* I.7 *(excepté la condition* (6) *qui est vide dans ce cas) relativement à la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet) \cdot \varphi_x(t)\,.$$

En particulier, cet espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ est respecté par la ρ_T-transformation de Fourier et son inverse, et il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable.

(ii) *La connaissance de cet espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ et de l'action sur lui de la ρ_T-transformation de Fourier équivaut à celle des fractions rationnelles*

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = L_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, Z)$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, Z)$$

associées à tout élément $\chi \in \{\pi\}_x^T$, c'est-à-dire à tout caractère localement constant

$$\chi : T(F_x) \to \mathbb{C}^\times\,.$$

□

De manière analogue, on déduit du théorème II.6 réinterprété grâce à la définition II.7 :

Corollaire II.9. –

Sous les mêmes hypothèses, supposons de plus que F est un corps de nombres, et considérons une place archimédienne x de F.

Appelons provisoirement (c'est-à-dire dans le cadre du présent exposé II*) ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ les combinaisons linéaires de fonctions images directes*

$$\varphi_x = (\varphi_T^\vee)_* \, f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de ρ_E-fonctions f_x sur $T_E\,(F_x)$ et de leurs translatées par des éléments de $T(F_x)$.

Alors :

(i) *L'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ est stable par translation par des éléments arbitraires de $T(F_x)$, ainsi que par la ρ_T-transformation de Fourier*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet) \cdot \varphi_x(t)$$

et son inverse.

D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $T(F_x)$.

(ii) *Posant pour tout $\chi \in \{\pi\}_x^T$*

$$L_x(\rho_T, \chi, s) = L_x(\chi \circ \rho_T^\vee, s) = \prod_{x'} L_{x'}(\chi \circ \rho_T^\vee, s)\,,$$

les ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ sont les fonctions

$$f_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui admettent une décomposition spectrale de la forme

$$f_x(\bullet) = |\mathrm{det}_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^T} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)$$

où

- *la fonction p_x des caractères continus $\chi : T(F_x) \to \mathbb{C}^\times$ est supportée par un nombre fini de composantes connexes de $\{\pi\}_x^T$,*
- *sachant que chaque composante connexe de $\{\pi\}_x^T$ a une structure naturelle d'espace affine sur $\mathbb{R}$, avec des coordonnées affines $s_1, \ldots, s_k$, la restriction de p_x à chaque telle composante est le produit d'un polynôme en $s_1, \ldots, s_k$ et d'une exponentielle de la forme*

$$(s_1, \ldots, s_k) \mapsto \exp\left(c_1 \cdot s_1 + \ldots + c_k \cdot s_k\right) \quad \textit{avec} \quad c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\,.$$

(iii) *Posant pour tout $\chi \in \{\pi\}_x^T$*

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, s) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T^\vee, \psi_x, s) = \prod_{x'} \varepsilon_{x'}(\chi \circ \rho_T^\vee, \psi_x, s)\,,$$

la ρ_T-transformation de Fourier des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ consiste à associer à une fonction décomposée spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\mathrm{det}_G\,(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^T} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)$$

la fonction définie spectralement par la formule

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^T} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho_T, \chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho_T, \chi, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)\,.$$

□

3 Formule de Poisson pour les tores et conséquence

On considère toujours une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

telle que Γ_F agisse sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base.

On a défini en toute place x de F un opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet) \cdot f_x(t)$$

ainsi qu'un espace de ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$. Cet espace est stable par translation, par la ρ_T-transformation de Fourier et par son inverse, et il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable. Sa connaissance équivaut à celle des facteurs

$$L_x(\rho_T, \chi, \bullet) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, \bullet)\,, \qquad \chi \in \{\pi\}_x^T\,,$$

qui sont des fractions rationnelles en toute place ultramétrique x.

En toute place ultramétrique x en laquelle G et ρ sont non ramifiés, on dispose de la "ρ_T-fonction standard" au sens de la définition I.8(i). Cela permet comme dans la définition I.8(ii) d'introduire l'espace des ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$. Comme on a en presque toute place ultramétrique de F non ramifiée pour G et ρ

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, \bullet) = 1\,, \qquad \forall\, \chi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^T\,,$$

les ρ_T-fonctions standard sont leur propre ρ_T-transformée de Fourier en presque toute place, et l'espace des ρ_T-fonctions globales est muni d'un opérateur unitaire inversible de ρ_T-transformation de Fourier globale.

On a démontré dans le cas des corps de fonctions (et prouverait de la même façon dans le cas des corps de nombres) que la ρ_T-transformation de Fourier globale sur $T(\mathbb{A})$ satisfait toutes les conditions du problème I.10 :

Théorème II.10. –

On suppose toujours que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation de ses r vecteurs de base.

Alors, pour toute ρ_T-fonction globale

$$f : T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a :

(i) *Pour toute place ultramétrique $x \in |F|$ en laquelle G et ρ sont non ramifiés et f se factorise en*

$$f = f_x \otimes f^x\,,$$

avec pour facteur une ρ_T-fonction sphérique sur $T(F_x)$

$$f_x : T(F_x)/T(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

la série formelle

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(f_x^{N,N'} \otimes f^x \right)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z.
De plus, elle est absolument convergente dans la zone

$$|Z| < q_x^{1/2} \,,$$

donc n'y admet pas de pôle, et sa valeur en $Z = 1$, notée $S(f)$, ne dépend pas du choix de la place x.

(ii) *On a la formule de Poisson*

$$S(f) = S(\widehat{f})$$

qui s'écrit encore

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \widehat{f}(\gamma) \text{”}$$

en notant

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”} = \left(\sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f) \,.$$

(iii) *On a*

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”} = \sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma)$$

si f se factorise en au moins une place ultramétrique x sous la forme

$$f = f_x \otimes f^x \,,$$

avec pour facteur une ρ_T-fonction locale

$$f_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est supportée par une partie compacte de $T(F_x)$. $\square$

On a également prouvé (dans le cas des corps de fonctions) que cette formule de Poisson pour le tore T implique pour le groupe réductif G muni de la représentation de transfert ρ la forme approchée suivante de formule de Poisson :

Théorème II.11. –

Sous les mêmes hypothèses, considérons deux fonctions

$$f_1, f_2 : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telles que

- *en toute place ultramétrique x de F, f_1 et f_2 sont invariantes à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$ qui, de plus, est égal à $G(O_x)$ en presque toute place x où G et ρ sont non ramifiés,*
- *en toute place archimédienne x de F, f_1 et f_2 sont des fonctions de classe C^∞ de la variable $g_x \in G(F_x)$,*

- *pour tout élément k de tout sous-groupe compact de $G(\mathbb{A})$, les deux fonctions*

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\det_B(t)|^{1/2} \cdot (f_1^k)_{N_B}(t) = |\det_B(t)|^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|^{-1/2} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} f_1(u \cdot t \cdot k) \cdot du$$

et

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\det_B(t)|^{1/2} \cdot ({}^{k^{-1}}f_2)_{N_B}(t) = |\det_B(t)|^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|^{1/2} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} f_2(k^{-1} \cdot t \cdot u) \cdot du$$

sont bien définies et sont deux ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$ dont la seconde est la ρ_T-transformée de Fourier de la première.

Alors :

(i) *Pour toute place ultramétrique $x \in |F|$ en laquelle G et ρ sont non ramifiés et f_1, f_2 se factorisent en*

$$f_1 = f_{1,x} \otimes f_1^x \,,$$

$$f_2 = f_{2,x} \otimes f_2^x \,,$$

avec pour facteurs deux fonctions sphériques sur $G(F_x)$

$$f_{1,x}, f_{2,x} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C} \,,$$

les séries formelles

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{1,x}^{N,N'} \otimes f_1^x\right)(u\,\gamma)$$

et

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{2,x}^{N,N'} \otimes f_2^x\right)(\gamma\,u^{-1})$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles.
De plus, leurs "valeurs régularisées" en $Z = 1$, notées $S_B(f_1)$ et $S'_B(f_2)$, ne dépendent pas du choix de la place x.
Elles vérifient

$$S_B(f_1) = S'_B(f_2) \,.$$

(ii) *On a*

$$S_B(f_1) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f_2(\gamma\,u^{-1})$$

$$\text{[resp.} \quad S_B(f_2) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f_1(u\,\gamma) \text{]}$$

si la fonction f_1 [resp. f_2] se factorise en au moins une place ultramétrique x sous la forme

$$f_1 = f_{1,x} \otimes f_1^x \qquad \text{[resp.} \quad f_2 = f_{2,x} \otimes f_2^x \text{]},$$

avec pour facteur une fonction

$$f_{1,x} : G(F_x) \to \mathbb{C} \qquad \text{[resp.} \quad f_{2,x} : G(F_x) \to \mathbb{C} \text{]}$$

localement constante à support compact dans $G(F_x)$.

Remarque :

Les facteurs $f_{1,x}$ et $f_{2,x}$ de (i) sont par hypothèse des fonctions sphériques, donc ne font apparaître dans leurs décompositions spectrales que des représentations $\pi \in \mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^G$, lesquelles sont des induites normalisées de caractères $\chi_\pi \in \mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^T$. Pour de telles représentations, les facteurs

$$L_x(\rho,\pi,Z) = L_x(\rho_T,\chi_\pi,Z)$$

sont bien définis.

Alors on dit que les fonctions sphériques $f_{1,x}$ et $f_{2,x}$ sur $G(F_x)$ sont des ρ-fonctions si et seulement si leurs termes constants

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_{1,x}(u\cdot t)\,,$$

et

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_{2,x}(t\cdot u)$$

sont des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$. Dans ce cas, on peut leur associer les familles de fonctions

$$f_{1,x}^{N,N'} \quad \text{et} \quad f_{2,x}^{N,N'}\,, \qquad N,N' \in \mathbb{N}\,,$$

suivant la règle de construction de la définition I.9. □

4 Un prolongement naturel des noyaux

Supposant toujours que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation de ses r vecteurs de base, on considère la fonction noyau associée

$$k_x^{\rho_T} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

en toute place $x \in |F|$.

Cette fonction noyau est égale à

$$k_x^{\rho_T}(t) = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho)$$

au sens que, pour toute fonction f_x localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est une place archimédienne] sur $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$, on a

$$\int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t) \cdot \int_{T_\rho(F_x)} dt_\rho \cdot f_x(t\cdot t_\rho) = \int_{T_\rho(F_x)} dt_\rho \cdot \int_{T_E\,(F_x)} \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_x \cdot t_\rho) \cdot f_x(t_x) \cdot dt_x\,.$$

Si x est une place ultramétrique de F et $\mathbb{1}_{O_{E_x}}(\bullet)$ désigne la fonction caractéristique de l'anneau des entiers O_{E_x} de la F_x-algèbre $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x$, on a aussi

$$k_x^{\rho_T}(t) = \lim_{N\mapsto+\infty} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) \cdot \mathbb{1}_{O_{E_x}}(\varpi_x^N \cdot t_\rho)\,.$$

Si F est un corps de nombres, x est une place archimédienne de F, les $E_{x'} \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont les facteurs de la F_x-algèbre $E_x = E \otimes_F F_x = \overline{T}_E\,(F_x)$ et $\mathbb{1}_x(\bullet)$ désigne le produit des fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{x'} : E_{x'} \cong \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & \exp\,(-\pi \cdot |c_{x'}| \cdot a^2) \end{array}$$

pour $E_{x'} \cong \mathbb{R}$ et $\psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(a) = \exp\,(2\,\pi\,i \cdot c_{x'} \cdot a)$, et

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{I}_{x'} : E_{x'} \cong \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & \exp\,(-2\,\pi \cdot |c_{x'}| \cdot |a|^2) \end{array}$$

pour $E_{x'} \cong \mathbb{C}$ et $\psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(a) = \exp\,(2\,\pi\,i \cdot (c_{x'} \cdot a + \overline{c}_{x'} \cdot \overline{a}))$, on a

$$k_x^{\rho_T}(t) = \lim_{N \mapsto 0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) \cdot \mathbb{I}_x(a \cdot t_\rho)\,.$$

Lemme II.12. –

Considérons le cas où G est déployé sur F et Γ_F agit trivialement sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\rho : \widehat{G} \times \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Notons $\mathfrak{S}^{r,\rho}$ le sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}^r$ composé des éléments $w \in \mathfrak{S}^r$ qui respectent le sous-tore $\widehat{T} \subset \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ et qui coïncident sur $\widehat{T}$ avec un élément du groupe de Weyl W_G de G agissant sur $\widehat{T}$.

Alors :

(i) *L'homomorphisme de restriction*

$$\mathfrak{S}^{r,\rho} \to W_G$$

est surjectif, et son noyau coïncide avec le sous-groupe de $\mathfrak{S}^r$ composé des permutations de $\{1, 2, \ldots, r\}$ qui respectent la partition définie par la relation d'égalité entre les caractères ρ_T^i, $1 \leq i \leq r$.

(ii) *La restriction de*

$$\mathfrak{S}^{r,\rho} \to W_G$$

au sous-groupe

$$\left\{ w \in \mathfrak{S}^{r,\rho} \subset \mathfrak{S}^r \mid w \textit{ respecte la relation d'ordre de chaque classe } \{1 \leq i \leq r \mid \rho_T^i = \mu\}\,,\ \forall\, \mu \in X_{\widehat{T}} \right\}$$

est un isomorphisme.

Cet isomorphisme identifie donc W_G à un sous-groupe de $\mathfrak{S}^{r,\rho}$.

Démonstration :

La représentation de transfert ρ induit un morphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}^r} = \mathbb{C}\,[\widehat{\mathrm{GL}}_r]^{\widehat{\mathrm{GL}}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{G}]^{\widehat{G}} = \mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{W_G}\,.$$

Soit t un point générique de $\widehat{T}$.

L'image de $\mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}^r}$ dans $\mathbb{C}\,[\widehat{T}]$ est constituée des polynômes P tels que

$$P(w(t)) = P(t)$$

pour tout $w \in \mathfrak{S}^r$ tel que $w(\widehat{T}) \subset \widehat{T}$.

D'autre part, $\mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{W_G}$ est constitué des polynômes $P \in \mathbb{C}\,[\widehat{T}]$ tels que

$$P(w(t)) = P(t) \qquad \forall\, w \in W_G\,.$$

Donc, si $w \in W_G$, il existe $w' \in \mathfrak{S}^r$ qui respecte le sous-tore $\widehat{T}$ de $\widehat{T}_r$ et vérifie

$$w'(t) = w(t)\,.$$

Cela montre que l'homomorphisme de (i) et surjectif. La description de son noyau est évidente.

Enfin, (ii) est une conséquence immédiate de (i).

Exemple :

Si $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$ et ρ est le représentation symétrique

$$\mathrm{sym}^k = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})\,,$$

le groupe $W_G = \mathfrak{S}^2$ s'identifie au sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}^{k+1}$ agissant sur l'ensemble des indices $\{0, 1, \ldots, k\}$ des vecteurs de base de $\mathbb{C}^{k+1}$, engendré par l'involution

$$i \mapsto k - i\,, \qquad \forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k\}\,.$$

$\square$

Considérons maintenant le cas général où Γ_F agit par permutation des vecteurs de la base de l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation ρ.

On note toujours E la F-algèbre séparable de degré r qui correspond à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$.

Écrivons E comme un produit

$$E = \prod_{1 \le i \le e} E_i^{m_i}$$

de corps E_i, $1 \le i \le e$, apparaissant avec des multiplicités m_i, et dont certains peuvent éventuellement être isomorphes entre eux.

En notant I_i l'ensemble fini muni d'une action transitive de Γ_F qui correspond à chaque E_i, $1 \le i \le e$, la décomposition

$$E = \prod_{1 \le i \le e} E_i^{m_i}$$

correspond à une unique bijection

$$\{1, 2, \ldots, r\} \xrightarrow{\sim} \coprod_{1 \le i \le e} I_i \times \{1, 2, \ldots, m_i\}$$

qui respecte les actions de Γ_F.

Le groupe linéaire sur F

$$\mathrm{GL}_E = \prod_{1 \le i \le e} \mathrm{Res}_{E_i/F}\, \mathrm{GL}_{m_i}$$

admet pour tore maximal

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m = \prod_{1 \le i \le e} \mathrm{Res}_{E_i/F}\, \mathbb{G}_m^{m_i}$$

et pour groupe dual

$$\widehat{\mathrm{GL}}_E = \prod_{1 \le i \le e} \prod_{\iota \in I_i} \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C})$$

qui, munit de l'action naturelle de Γ_F, s'identifie à un sous-groupe de Levy de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Enfin, le groupe de Weyl W_E de GL_E s'identifie à

$$\prod_{1 \le i \le e} \prod_{\iota \in I_i} \mathfrak{S}^{m_i}$$

muni de l'action naturelle de Γ_F par permutation des facteurs.

On pose la définition suivante :

Définition II.13. –

On dira que la décomposition

$$E = \prod_{1\leq i\leq e} E_i^{m_i}$$

est "bien disposée" pour $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *si :*

(1) *Pour tout* i, $1 \leq i \leq e$, *et tout* $\iota \in I_i$, $\{\iota\} \times \{1, 2, \ldots, m_i\}$ *correspond à un intervalle de* $\{1, 2, \ldots, r\}$ *dont l'ordre des éléments est le même.*

(2) *La représentation de transfert*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

envoie $\widehat{G}$ *dans le sous-groupe de Levy standard*

$$\widehat{\mathrm{GL}}_E = \prod_{1\leq i\leq e} \prod_{\iota\in I_i} \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C}) \, ,$$

et elle envoie le sous-groupe de Borel $\widehat{B}$ *de* $\widehat{G}$ *dans le sous-groupe de Borel de* $\widehat{\mathrm{GL}}_E$

$$\widehat{B}_E = \prod_{1\leq i\leq e} \prod_{\iota\in I_i} B_{m_i}(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_E \cap B_r(\mathbb{C}) \, .$$

$\square$

Cette définition étant posée, on a la généralisation suivante du lemme II.12 :

Lemme II.14. –

Supposons que $E = \prod\limits_{1\leq i\leq e} E_i^{m_i}$ *est "bien disposée" pour* ρ *au sens de la définition précédente.*

Notons $W_{E,\rho}$ *le sous-groupe du groupe de Weyl* W_E *de* GL_E *constitué des éléments* w *qui respectent le sous-tore*

$$\widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_E = \widehat{T}_r$$

et qui coïncident sur $\widehat{T}$ *avec un élément du groupe de Weyl* W_G *de* G.

Alors :

(i) *L'homomorphisme*

$$W_{E,\rho} \to W_G$$

est surjectif, et son noyau coïncide avec le sous-groupe de $W_E = \prod\limits_{1\leq i\leq e} \prod\limits_{\iota\in I_i} \mathfrak{S}^{m_i}$ *constitué des familles de permutations des intervalles* $\{\iota\} \times \{1, 2, \ldots, m_i\}$, $1 \leq i \leq e$, $\iota \in I_i$, *qui respectent la partition de chaque tel intervalle définie par la relation d'égalité entre caractères* ρ_T^j, $1 \leq j \leq r$.

(ii) *La restriction de cet homomorphisme*

$$W_{E,\rho} \to W_G$$

au sous-groupe

$$\Big\{ w \in W_{E,\rho} \mid w \text{ respecte la relation d'ordre de chaque classe } \{1 \leq j \leq r \mid \rho_T^j = \mu\} \, , \ \forall \, \mu \in X_{\widehat{T}} \Big\}$$

est un isomorphisme Γ_F*-équivariant.*

Cet isomorphisme identifie donc W_G *muni de l'action de* Γ_F *à un sous-groupe de* $W_{E,\rho} \subset W_E$.

Démonstration :

Elle est semblable à celle du lemme II.12. $\square$

On déduit des lemmes II.12 et II.14 ci-dessus :

Corollaire II.15. –

(i) *Si G est déployé sur F et Γ_F agit trivialement sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ, identifions W_G à un sous-groupe de $\mathfrak{S}^{r,\rho} \subset \mathfrak{S}^r$ comme dans le lemme* II.12.
Alors l'homomorphisme W_G-équivariant

$$\rho_T^\vee : T_r \to T$$

dual de $\rho_T : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_r$, et le morphisme

$$T_r \hookrightarrow \overline{T}_r = (\mathbb{A}^1)^r \xrightarrow{T_r} \mathbb{A}^1$$

invariant par l'action de $\mathfrak{S}^r$, définissent un diagramme

$$\begin{tikzcd} T_r/W_G \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{T}_r/W_G \arrow[r, "T_r"] & \mathbb{A}^1 \\ T/W_G & & \end{tikzcd}$$

de schémas sur F.

(ii) *Plus généralement, si $E = \prod_{1\leq i\leq e} E_i^{m_i}$ est "bien disposée" pour ρ au sens de la définition* II.13, *identifions W_G à un sous-groupe de $W_{E,\rho} \subset W_E$ comme dans le lemme* II.14.
Alors l'homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

dual du plongement $W_G \rtimes \Gamma_F$-équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_E\,,$$

et le morphisme

$$T_E \hookrightarrow \overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1 \xrightarrow{T_r} \mathbb{A}^1$$

invariant par la double action de W_E et de Γ_F, définissent un diagramme

$$\begin{tikzcd} T_E/W_G \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{T}_E/W_G \arrow[r, "T_r"] & \mathbb{A}^1 \\ T/W_G & & \end{tikzcd}$$

de schémas sur F.

Remarque :

Pour tout corps $F' \supset F$, toute fibre de

$$\rho_T^\vee : (T_E/W_G)(F') \to (T/W_G)(F')$$

au-dessus d'un point $\bar{t} \in (T/W_G)(F')$ qui admet un relèvement $t \in T(F')$ s'identifie à la fibre de

$$\rho_T^\vee : T_E(F') \to T(F')$$

au-dessus du point $t \in T(F')$. $\square$

Toujours sous les hypothèses du corollaire II.15, considérons le faisceau libre T_E-équivariant et W_G-équivariant

$$\Omega_{T_E/T}$$

des différentielles relatives de T_E au-dessus de T.

Son quotient par l'action de W_G s'identifie au faisceau localement libre des différentielles relatives de T_E/W_G au-dessus de T/W_G.

La puissance extérieure maximale de $\Omega_{T_E/T}$ est engendrée par une section $\omega_{T_E/T}$ qui est invariante par l'action de T_E, F-rationnelle et sur laquelle W_G agit par un caractère $W_G \to \{\pm 1\}$. Cette section $\omega_{T_E/T}$ ne provient pas nécessairement d'une forme différentielle de degré maximal de T_E/W_G au-dessus de T/W_G, mais elle suffit à définir une forme de volume $d\,|\omega_{T_E/T}|$ sur les fibres de $T_E/W_G \to T/W_G$ au-dessus des points de T/W_G à valeurs dans un F_x.

On a :

Lemme II.16. –

Toujours sous les hypothèses du corollaire II.15, *on a en toute place x de F :*

(i) *L'opérateur*

$$(\rho_T^\vee)_* = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho$$

d'intégration le long des fibres de

$$\rho_T^\vee : T_E\,(F_x) \to T(F_x)$$

est défini, modulo multiplication par une constante fixe, par la forme différentielle relative de degré maximal $\omega_{T_E/T}$.

(ii) *Par conséquent, il se prolonge en un opérateur encore noté*

$$(\rho_T^\vee)_* = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho$$

d'intégration le long des fibres de

$$\rho_T^\vee : (T_E/W_G)(F_x) \to (T/W_G)(F_x)\,,$$

qui est défini, modulo multiplication par la même constante, par la forme de volume $d\,|\omega_{T_E/T}|$.

□

On peut maintenant énoncer :

Proposition II.17. –

Toujours sous les hypothèses du corollaire II.15, *considérons une place arbitraire $x \in |F|$.*

Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} k_x^{\rho_T} : T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) \end{array}$$

se prolonge naturellement en la fonction, que nous noterons de la même façon,

$$\begin{array}{rcl} k_x^{\rho_T} : (T/W_G)(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) = \lim_{a \mapsto 0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) \cdot \mathbb{1}_x(a \cdot t_\rho) \end{array}$$

où

$$\mathbb{1}_x : (\overline{T}_E/W_G)(F_x) \to 0$$

désigne n'importe quelle fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est une place archimédienne] qui vaut 1 dans un voisinage du point 0 de $(\overline{T}_E/W_G)(F_x)$.

Remarque :

En toute place x de F, la fonction

$$k_x^{\rho_T} : (T/W_G)(F_x) \to \mathbb{C}$$

peut être vue comme une fonction

$$k_x^{\rho_T} : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante par conjugaison, et même par conjugaison stable.

Elle vérifie aussi la propriété $\overline{k_x^{\rho_T}(g)} = k_x^{\rho_T}(-g)$, $\forall\, g \in G(F_x)$.

Mais attention ! Nous ne disons pas que cette fonction est la fonction invariante

$$k_x^{\rho} : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

recherchée dans le problème I.4. En fait, on verra au chapitre III qu'elle ne l'est pas déjà dans les cas où $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$ et $\rho = \mathrm{sym}^k$, $k \geq 2$.

Exemple :

Si $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_2$ et ρ est le carré symétrique

$$\mathrm{sym}^2 : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_2 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})\,,$$

les éléments de

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

s'écrivent comme des paires $(g, \det(g)^{1/2})$ avec $g \in \mathrm{GL}_2$.

Par conséquent, en toute place x de F, $k_x^{\rho_T}$ doit être une fonction de $\mathrm{Tr}\,(g) \in F_x$ et $\det(g)^{1/2} \in F_x^\times$.

Comme $\rho_T^\vee$ s'écrit

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1\, \lambda_2^2 = \mu_1\,,\ \lambda_0^2\, \lambda_1 = \mu_2\,,\ \lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2 = (\mu_1\, \mu_2)^{1/2})\,,$$

le sous-tore T_ρ est constitué des triplets

$$(\mu, \mu^{-2}, \mu)$$

et l'action de $W_G = \mathfrak{S}^2$ sur T_ρ est triviale.

On en déduit facilement que, pour tout

$$(g, \det(g)^{1/2}) \in G(F_x)\,,$$

on a

$$k_x^{\rho_T}(g, \det(g)^{1/2}) = \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \psi_x(\mu + \mu^{-2} \cdot (\mathrm{Tr}\,(g) + 2 \cdot \det(g)^{1/2}))$$

où $d\mu$ désigne une mesure multiplicative de $F_x^\times$. $\square$