Exposé III.
Le cas de GL_2 : étude locale (encore formelle)
(Laurent Lafforgue, IHES, 3 juillet 2014)

1 Compatibilité avec le passage aux termes constants

On se place toujours sur le corps global F.

Considérant un entier $k \geq 1$, on note
$$\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$$
le groupe réductif sur $\mathbb{C}$ quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par le groupe fini $\mu_k = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$, et ρ la représentation de transfert
$$\begin{array}{rcl} \widehat{G} & \hookrightarrow & \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C}) \\ g & \mapsto & \mathrm{sym}^k(g)\,. \end{array}$$
Le groupe réductif $\widehat{G}$ admet pour tore maximal
$$\widehat{T} = T_2(\mathbb{C})/\mu_k = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k$$
avec donc
$$X_{\widehat{T}} = \big\{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1 + n_2 \in k\,\mathbb{Z}\big\}$$
et
$$X_{\widehat{T}}^\vee = \left\{(r_1,r_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid r_1, r_2 \in \frac{1}{k}\,\mathbb{Z} \;\wedge\; r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Le groupe réductif $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C}$ est le dual du groupe réductif G déployé sur F qui s'inscrit dans le carré cartésien
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\det"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$
et dont le tore maximal T s'inscrit dans le carré cartésien :
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & T_2 = \mathbb{G}_m^2 \arrow[d, "{(\mu_1,\mu_2) \mapsto \mu_1\mu_2}"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

Ainsi, les points de G peuvent être notés comme des couples
$$\Big(g, \det(g)^{1/k}\Big)$$

où

$$g = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix}$$

est un point de GL_2 et $\det(g)^{1/k}$ est une racine k-ième de $\det(g)$ dans $\mathbb{G}_m$.

De même, les points de T peuvent être notés comme des triplets

$$\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)$$

où μ_1, μ_2 sont deux points de $\mathbb{G}_m$ et $(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}$ est une racine k-ième de $\mu_1\,\mu_2$ dans $\mathbb{G}_m$.

L'homomorphisme injectif de tores induit par ρ

$$\begin{array}{rcl} \rho_T : \widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k & \to & \widehat{T}_{k+1} = (\mathbb{C}^\times)^{k+1} \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & \left(\lambda_1^k, \lambda_1^{k-1}\,\lambda_2, \ldots, \lambda_1\,\lambda_2^{k-1}, \lambda_2^k\right) \end{array}$$

admet pour dual l'épimorphisme

$$\begin{array}{rcl} \rho_T^\vee : T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1} & \to & \widehat{T} = \mathbb{G}_m^2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m \\ (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) & \mapsto & \left(\lambda_0^k\,\lambda_1^{k-1} \ldots \lambda_{k-1} = \mu_1, \lambda_1\,\lambda_2^2 \ldots \lambda_k^k = \mu_2, \lambda_0\,\lambda_1 \ldots \lambda_k = (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right). \end{array}$$

Celui-ci est équivariant pour l'action du groupe de Weyl $W_G = \mathfrak{S}^2$ de G sur $T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1}$ par la permutation

$$\lambda_i \mapsto \lambda_{k-i}\,, \qquad 0 \le i \le k\,,$$

et donc on a un morphisme induit de schémas sur F

$$T_{k+1}/W_G \to T/W_G\,.$$

D'autre part, le noyau T_ρ de $\rho_T^\vee : T_{k+1} \to T$ est le sous-tore de codimension 2 de $T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1}$ défini par les deux équations

$$\lambda_0\,\lambda_1 \ldots \lambda_k = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\,\lambda_2^2 \ldots \lambda_k^k = 1\,.$$

Il est stable par l'action du groupe de Weyl $W_G = \mathfrak{S}^2$ de G.

On remarque au passage que, dans le cas particulier $k = 2$, T_ρ est le sous-tore de dimension 1 de $T_3 = \mathbb{G}_m^3$ constitué des triplets de la forme $(\lambda, \lambda^{-2}, \lambda)$. Ses points sont fixés par l'action sur T_3 de $W_G = \mathfrak{S}^2$ si bien que, dans ce cas, T_ρ agit sur T_3/W_G et T/W_G s'identifie au quotient de T_3/W_G par l'action de T_ρ.

Dans le cas général, le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \overline{T}_{k+1} = (\mathbb{A}^1)^{k+1} & \xrightarrow{\mathrm{Tr}} & \mathbb{A}^1 \\ (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) & \mapsto & \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \end{array}$$

est invariant par l'action de $W_G = \mathfrak{S}^2$, donc se factorise en un morphisme

$$\overline{T}_{k+1}/W_G \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{A}^1$$

qui s'inscrit dans un diagramme de schémas sur F :

$$\begin{tikzcd} T_{k+1}/W_G \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho_T^\vee"] & \overline{T}_{k+1}/W_G \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & \mathbb{A}^1 \\ T/W_G \end{tikzcd}$$

On rappelle d'autre part que l'on a choisi une fois pour toutes un caractère continu unitaire non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}_F/F \to \mathbb{C}^\times .$$

En toute place x de F, on dispose donc de l'application composée

$$\psi_x \circ \mathrm{Tr} : (T_{k+1}/W_G)\,(F_x) \hookrightarrow \left(\overline{T}_{k+1}/W_G\right)(F_x) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} F_x \xrightarrow{\psi_x} \mathbb{C}^\times .$$

La fonction noyau $k_x^{\rho_T}$ de la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\begin{array}{rcl} k_x^{\rho_T} : T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_\rho)) \end{array}$$

provient donc d'une fonction

$$\begin{array}{rcl} k_x^{\rho_T} : (T/W_G)(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_\rho)) = \lim_{a \mapsto 0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_\rho)) \cdot \mathbb{I}_x(a \cdot t_\rho) \end{array}$$

où $\mathbb{I}_x$ désigne n'importe quelle fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est une place archimédienne] sur $(\overline{T}_{k+1}/W_G)(F_x)$ qui est égale à 1 dans un voisinage du point 0.

Comme le schéma affine quotient de G par l'action par conjugaison de G s'identifie à T/W_G, la fonction

$$k_x^{\rho_T} : (T/W_G)(F_x) \to \mathbb{C}$$

en toute place $x \in |F|$ peut être vue comme une fonction

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante par conjugaison.

Le centre

$$Z_{\widehat{G}} = \mathbb{C}^\times/\mu_k \cong \mathbb{C}^\times$$

de $\widehat{G}$ agit sur l'espace $\mathbb{C}^{k+1}$ de

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

par le cocaractère

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{\sim} & Z_{\widehat{G}} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \overset{\rho}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} . \end{array}$$

Il lui correspond le caractère défini sur F

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m$$

dont le composé

$$T_{k+1} \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \xrightarrow{\det_G} \mathbb{G}_m$$

n'est autre que

$$\det_{k+1} : (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda_0\, \lambda_1 \ldots \lambda_k\,.$$

D'autre part, parmi les poids de la représentation irréductible ρ

$$\begin{array}{rcl} \rho_T^i : \widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & \lambda_1^{k-i}\, \lambda_2^i\,, \quad 0 \le i \le k\,, \end{array}$$

on distingue le poids dominant qui est

$$\rho_T^0 : (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1^k\,.$$

Il correspond au cocaractère

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{G}_m & \to & T = \mathbb{G}_m^2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m \\ \lambda & \mapsto & (\lambda^k, 1, \lambda)\,. \end{array}$$

Enfin, le caractère modulaire δ_B associé au sous-groupe de Borel B de G constitué des matrices triangulaires supérieures est

$$\begin{array}{rcl} \delta_B : T & \to & \mathbb{G}_m \\ \left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\, \mu_2)^{1/k}\right) & \mapsto & \mu_1\, \mu_2^{-1}\,. \end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \det_B : G & \to & \mathbb{G}_m \\ \left(g, \det(g)^{1/k}\right) & \mapsto & \det(g) \end{array}$$

est l'unique caractère qui, considéré comme un élément de $X_T = X_{\widehat{T}}^\vee$, vérifie

$$\langle \det_B, \rho_T^0 \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^0 \rangle\,.$$

Ainsi, on dispose sur G des trois caractères

$$\begin{array}{rcl} \det_G : G & \to & \mathbb{G}_m \\ \left(g, \det(g)^{1/k}\right) & \mapsto & \det(g)^{1/k}\,, \end{array}$$

$$\det_B = (\det_G)^k$$

et

$$\det_\rho = \det_G \cdot \det_B = (\det_G)^{k+1}\,.$$

Rappelons l'énoncé du problème I.4 dans le cas où nous sommes :

Problème III.1. –

Étant donné un entier $k \ge 1$, considérons la représentation de transfert

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

du groupe réductif déployé

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

muni de ses trois caractères

$$\det_G\,, \quad \det_B = (\det_G)^k \quad \textit{et} \quad \det_\rho = \det_G \cdot \det_B\,.$$

En toute place x de F, on voudrait munir $G(F_x)$ de

$$\begin{cases} \bullet \text{ une mesure } d_\rho\, g \text{ que les translations à gauche ou à droite transforment par le caractère } |\det_\rho(\bullet)|_x, \\ \bullet \text{ une fonction invariante par conjugaison} \\ \qquad\qquad \begin{aligned} G(F_x) &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto k_x^G(g) \end{aligned} \end{cases}$$

de telle façon que l'opérateur de ρ-transformation de Fourier associé

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, g') \right]$$

vérifie les propriétés suivantes :

(1) *Pour toute fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est archimédienne]*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

le produit

$$\begin{aligned} |\det_B|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B} : T(F_x) &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(u \cdot t) \end{aligned}$$

admet pour ρ_T-transformée de Fourier sur $T(F_x)$ le produit

$$\begin{aligned} |\det_B|_x^{1/2} \cdot (\widehat{f}_x)_{N_B} : T(F_x) &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot \widehat{f}_x(t \cdot u)\,. \end{aligned}$$

(2) *L'opérateur*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

est unitaire, c'est-à-dire préserve le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}\,.$$

Remarque :

D'après le lemme I.3, un opérateur de cette forme

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, g') \right]$$

vérifiera nécessairement les formules de transformation par les translations

$$\widehat{f_x^g} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot {}^{g^{-1}}\widehat{f}_x\,,$$

$$\widehat{{}^g f_x} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{\,g^{-1}}\,,$$

pour toute fonction $f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ et tout $g \in G(F_x)$. $\square$

Les points de $G(F_x)$ sont les couples

$$\left(g, \det(g)^{1/k} \right)$$

composés de $g \in \mathrm{GL}_2(F_x)$ et $\det(g)^{1/k} \in F_x^\times$.

Par conséquent, les fonctions

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

invariantes par conjugaison sont les fonctions de $\det(g)^{1/k} \in F_x^\times$ et $\mathrm{Tr}\,(g) \in F_x$.

Faisant une transformation de Fourier partielle en la variable $\mathrm{Tr}\,(g)$, on peut chercher ces fonctions sous la forme

$$k_x^\rho \left(g, \det(g)^{1/k}\right) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

où $d\mu$ désigne une mesure additive de F_x.

On a :

Proposition III.2. (modulo vérification des convergences et de la légitimité des échanges de sommations) –

Considérons une fonction invariante par conjugaison

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

écrite sous la forme

$$k_x^\rho \left(g, \det(g)^{1/k}\right) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

pour une certaine mesure additive $d\mu$ de F_x.

Alors l'opérateur de ρ-transformation de Fourier associé

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, g')\right]$$

vérifie la propriété (1) *du problème* III.1*, de compatibilité avec le passage aux termes constants*

$$f_x \mapsto f_{x,N_B}\,,$$

si et seulement si on a, pour tout élément $t = \left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \in T(F_x)$,

$$\begin{aligned} k_x^{\rho_T} \left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) &= \int_{F_x} d\mu \cdot |\mu|_x^{-1} \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \psi_x\left(\mu \cdot (\mu_1 + \mu_2)\right) \\ &= \int_{F_x^\times} d^\times \mu \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \psi_x\left(\mu \cdot (\mu_1 + \mu_2)\right) \end{aligned}$$

où $d^\times \mu$ désigne la mesure multiplicative $|\mu|_x^{-1} \cdot d\mu$ de $F_x^\times$.

Remarques :

(i) Ainsi, la propriété (1) et la connaissance du noyau $k_x^{\rho_T}$ sur $T(F_x)$ ne déterminent la fonction k_x^ρ sur $G(F_x)$ que si la projection

$$T(F_x) \to (T/W_G)(F_x)$$

est surjective. Cela ne se produit que si F_x est algébriquement clos, soit $F_x \cong \mathbb{C}$.

(ii) La restriction de la fonction k_x^ρ à $T(F_x)$ ne coïncide pas avec la fonction $k_x^{\rho_T}$. Pour passer de l'une à l'autre, il faut remplacer la mesure additive $d\mu$ sur F_x par la mesure multiplicative $d^\times \mu = |\mu|_x^{-1} \cdot d\mu$ dans leurs représentations de Fourier.

Exemple :

Si $k=2$, on a pour tout élément $t = \left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)$ de $T(F_x)$

$$k_x^{\rho_T}\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) = \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \psi_x\left(\mu^{-1} + \mu^2 \cdot \left(\mu_1 + \mu_2 + 2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)\right).$$

La fonction sur $G(F_x)$ invariante par conjugaison

$$k_x^{\rho}\left(g, \det(g)^{1/2}\right) = \int_{F_x^\times} d\mu \cdot |\mu|_x^2 \cdot \psi_x\left(\mu^{-1} + \mu^2 \cdot \left(\mu_1 + \mu_2 + 2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)\right)$$

satisfait donc la propriété (1) du problème III.1.

Démonstration :

Écrivons les éléments $\left(g, \det(g)^{1/k}\right)$ de $G(F_x)$ sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix}$$

avec $\mu_1, \mu_2 \in F_x^\times$ et $u, v \in F_x$, d'où aussi

$$\det(g) = \mu_1\,\mu_2\,.$$

On a :

Lemme III.3. –

Écrivant les éléments de $\mathrm{GL}_2(F_x)$ *sous la forme*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix},$$

on a :

(i) *La mesure invariante* dg *de* $\mathrm{GL}_2(F_x)$ *s'écrit à une constante multiplicative près comme un produit*

$$|\delta_B(\mu_1, \mu_2)|_x \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv = \left|\frac{\mu_1}{\mu_2}\right|_x \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv$$

où $d\mu_1, d\mu_2$ *sont des mesures multiplicatives de* $F_x^\times$*, et* du, dv *des mesures additives de* F_x.

(ii) *La mesure* $d_\rho\, g$ *de* $\mathrm{GL}_2(F_x)$ *s'écrit à une constante multiplicative près comme le produit*

$$\left|(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right|_x \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv\,.$$

□

Suite de la démonstration de la proposition III.2 :

Pour $\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \in T(F_x)$ et $u' \in F_x$, on a

$$\begin{aligned} & \widehat{f}_x\left(\left(\begin{pmatrix} \mu_1' & 0 \\ 0 & \mu_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)\right) \\ = & \int \left|(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right|_x \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv \cdot f_x\left(\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \\ \cdot & \int_{F_x} d\mu \cdot \widehat{k}_x^{\rho}\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2\,\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \psi_x\left(\mu \cdot (\mu_1\,\mu_1' + \mu_2\,\mu_2' + \mu_1\,\mu_2' \cdot uv + \mu_1\,\mu_1' \cdot u'v)\right). \end{aligned}$$

En intégrant pour la mesure additive du', puis multipliant par le caractère

$$\left|\delta_B\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)\right|_x^{1/2} = \left|\frac{\mu_1'}{\mu_2'}\right|_x^{1/2},$$

on obtient en faisant un échange de sommations

$$\begin{aligned}
& \left|\delta_B\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)\right|_x^{1/2} \cdot \int_{F_x} du' \cdot \widehat{f}_x\left(\begin{pmatrix}\mu_1' & 0\\ 0 & \mu_2'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & u'\\ 0 & 1\end{pmatrix}, (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)\\
= \;& |\mu_1'\,\mu_2'|_x^{-\frac12} \cdot \int \left|(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right|_x \cdot |\mu_1|_x \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot f_x\left(\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_1\cdot u\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\\
\cdot \;& \int_{F_x} d\mu \cdot |\mu|_x^{-1} \cdot \widehat{k}_x^{\rho}\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2\,\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \psi_x\left(\mu\cdot(\mu_1\,\mu_1' + \mu_2\,\mu_2')\right)
\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
& (\widehat{f}_x)_{N_B}\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot |\mu_1'\,\mu_2'|_x^{1/2}\\
= \;& \int \left|(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right|_x \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot f_{x,N_B}\left(\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\\
\cdot \;& |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/2} \cdot k_x^{\rho_T}\left(\mu_1\,\mu_1', \mu_2\,\mu_2', (\mu_1\,\mu_1'\,\mu_2\,\mu_2')^{1/k}\right).
\end{aligned}$$

C'est le résultat annoncé. □

2 Unitarité

Pour $k \geq 1$, on considère toujours la représentation de transfert

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \hookrightarrow \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

du revêtement de degré k

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

de GL_2.

Étant donnée une place arbitraire x de F, on considère une fonction noyau

$$k_x^{\rho} : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

écrite sous la forme

$$k_x^{\rho}(g) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu\cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^{\rho}\left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

et qui satisfait les hypothèses et la conclusion de la proposition III.2.

Cette fonction noyau définit la ρ-transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f(g) \cdot k_x^{\rho}(g\,g')\right]$$

qui est bien définie au moins pour les fonctions continues à support compact

$$f : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

On voudrait maintenant que pour toutes telles fonctions continues à support compact

$$f', f'' : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

on ait

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f'}(g) \cdot \overline{\widehat{f''}(g)} = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f'(g) \cdot \overline{f''(g)}\,.$$

Développons l'intégrale de gauche en

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f'}(g) \cdot \overline{\widehat{f''}(g)} = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \int_{G(F_x)\times G(F_x)} d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot f'(g') \cdot \overline{f''(g'')} \cdot k_x^\rho(g\,g') \cdot \overline{k_x^\rho(g\,g'')}\,,$$

et écrivons les éléments $g \in G(F_x)$ sous la forme

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \right)$$

avec, d'après le lemme III.3(ii),

$$d_\rho\, g = |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv$$

à une constante multiplicative près.

D'autre part, on a

$$k_x^\rho(g\,g') = \int_{F_x} d\mu' \cdot \psi_x(\mu' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g')) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu', \det(g\,g')^{1/k}\right)$$

et

$$\overline{k_x^\rho(g\,g'')} = \int_{F_x} d\mu'' \cdot \psi_x(-\mu'' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g'')) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho \left(\mu'', \det(g\,g'')^{1/k}\right)}$$

avec

$$\mathrm{Tr}\,(g\,g') = (g'_{1,1} \cdot \mu_1 + g'_{2,2} \cdot \mu_2) + g'_{2,1} \cdot \mu_1 \cdot u + g'_{1,2} \cdot \mu_1 \cdot v + g'_{2,2} \cdot \mu_1 \cdot uv$$

et

$$\mathrm{Tr}\,(g\,g'') = (g''_{1,1} \cdot \mu_1 + g''_{2,2} \cdot \mu_2) + g''_{2,1} \cdot \mu_1 \cdot u + g''_{1,2} \cdot \mu_1 \cdot v + g''_{2,2} \cdot \mu_1 \cdot uv$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g') - \mu'' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g'') &= \mu' \cdot (g'_{1,1} \cdot \mu_1 + g'_{2,2} \cdot \mu_2) - \mu'' \cdot (g''_{1,1} \cdot \mu_1 + g''_{2,2} \cdot \mu_2) \\ &+ (\mu' \cdot g'_{2,1} - \mu'' \cdot g''_{2,1}) \cdot \mu_1 \cdot u \\ &+ (\mu' \cdot g'_{1,2} - \mu'' \cdot g''_{1,2}) \cdot \mu_1 \cdot v \\ &+ (\mu' \cdot g'_{2,2} - \mu'' \cdot g''_{2,2}) \cdot \mu_1 \cdot uv\,. \end{aligned}$$

Il est clair que si l'on cherche à intégrer ces expressions pour la mesure

$$|\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv\,,$$

une difficulté apparaît du fait de la présence du terme quadratique

$$(\mu' \cdot g'_{2,2} - \mu'' \cdot g''_{2,2}) \cdot \mu_1 \cdot uv$$

en u et v.

Or on a :

Lemme III.4. –

Soit $K_{x,\emptyset}$ le sous-groupe compact maximal de $G(F_x)$ donné par

$$K_{x,\emptyset} = \begin{cases} G(O_x) & \text{si } x \text{ est une place ultramétrique de } F, \\ 0_2(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{R}^\times & \text{si } F_x = \mathbb{R}, \\ U_2(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{C}^\times & \text{si } F_x \cong \mathbb{C}. \end{cases}$$

Alors, pour tous $\mu', \mu'' \in F_x^\times$ et tous éléments

$$g', g'' \in G(F_x)\,,$$

il existe un élément $g_\emptyset \in K_{x,\emptyset}$ tel que

$$\mu' \cdot (g' g_\emptyset)_{2,2} - \mu'' \cdot (g'' g_\emptyset)_{2,2} = 0\,.$$

□

Pour $\mu', \mu'' \in F_x^\times$ fixés, on peut donc écrire les paires d'éléments $g', g'' \in G(F_x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} g' &= \left(\begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1' & 0 \\ 0 & \mu_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v' & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1' \, \mu_2')^{1/k} \right) \cdot g_\emptyset \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mu_1' + \mu_2' \cdot u'v' & \mu_2' \cdot u' \\ \mu_2' \cdot v' & \mu_2' \end{pmatrix}, (\mu_1' \, \mu_2')^{1/k} \right) \cdot g_\emptyset \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g'' &= \left(\begin{pmatrix} 1 & u'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1'' & 0 \\ 0 & \mu_2'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v'' & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1'' \, \mu_2'')^{1/k} \right) \cdot g_\emptyset \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mu_1'' + \mu_2'' \cdot u''v'' & \mu_2'' \cdot u'' \\ \mu_2'' \cdot v'' & \mu_2'' \end{pmatrix}, (\mu_1'' \, \mu_2'')^{1/k} \right) \cdot g_\emptyset \end{aligned}$$

avec $\mu'' \cdot \mu_2'' = \mu' \cdot \mu_2'$.

De plus, notre mesure sur $G(F_x) \times G(F_x)$ s'écrit dans les nouvelles coordonnées

$$d_\rho \, g' \cdot d_\rho \, g'' = |\mu_1' \, \mu_2' \, \mu_1'' \, \mu_2''|_x^{1/k} \cdot |\mu_2'|_x^2 \cdot |\mu_2''|_x^2 \cdot |v' - v''|_x \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot du' \cdot dv' \cdot du'' \cdot dv'' \cdot dg_\emptyset$$

pour une mesure invariante $dg_\emptyset$ de $K_{x,\emptyset}$.

Supposons qu'il est légitime de changer l'ordre d'intégration

$$\int_{G(F_x)} d_\rho \, g \cdot \int_{G(F_x)} d_\rho \, g' \cdot d_\rho \, g'' \cdot \int_{F_x \times F_x} d\mu' \cdot d\mu''$$

en

$$\int_{F_x \times F_x} d\mu' \cdot d\mu'' \cdot \int_{G(F_x)} d_\rho \, g \cdot \int_{G(F_x) \times G(F_x)} d_\rho \, g' \cdot d_\rho \, g''\,.$$

D'autre part, introduisons la suite de fonctions de troncature $\mathbb{1}_{x,n}^G$ sur $G(F_x)$ définies comme les fonctions caractéristiques des g tels que, pour tous $g_\emptyset, g_\emptyset' \in K_{x,\emptyset}$, on ait

$$\left|(g_\emptyset \, g \, g_\emptyset')_{i,j}\right|_x \leq n\,, \qquad \forall\, i,j \in \{1,2\}\,,$$

et

$$\frac{1}{n^2} \leq \left|\det(g_\emptyset \, g \, g_\emptyset')_{i,j}\right|_x \leq n^2\,.$$

La mesure $\int_{G(F_x)} d_\rho\, g$ est la limite quand $n \mapsto +\infty$ des $\int_{G(F_x)} \mathbb{1}^G_{x,n}(g) \cdot d_\rho\, g$ et, pour tout n fixé, les sommations $\int_{G(F_x)} \mathbb{1}^G_{x,n}(g) \cdot d_\rho\, g$ et $\int_{G(F_x)\times G(F_x)} d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g''$ peuvent être échangées dans nos intégrales.

En utilisant le fait que les mesures $\int_{G(F_x)} \mathbb{1}^G_{x,n}(g) \cdot d_\rho\, g$ sont invariantes à gauche et à droite par $K_{x,\emptyset}$, on obtient que le produit hermitien

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \overline{\widehat{f}''(g)}$$

est égal, à une constante multiplicative près, à la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto+\infty} \quad & \int_{F_x\times F_x} d\mu' \cdot d\mu'' \cdot \int \mathbb{1}^G_{x,n}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1\cdot u \\ \mu_1\cdot v & \mu_2+\mu_1\cdot uv \end{pmatrix}\right) \cdot |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv \\
\cdot\ & \int_{\mu''\mu_2''=\mu'\mu_2'} |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|^{1/k} \cdot |\mu_2'|_x^2 \cdot |\mu_2''|_x^2 \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot |v'-v''|_x \cdot du' \cdot du'' \cdot dv' \cdot dv'' \\
\cdot\ & f'\left(\begin{pmatrix} \mu_1'+\mu_2'\cdot u'v' & \mu_2'\cdot u' \\ \mu_2'\cdot v' & \mu_2' \end{pmatrix}, (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{f''\left(\begin{pmatrix} \mu_1''+\mu_2''\cdot u''v'' & \mu_2''\cdot u'' \\ \mu_2''\cdot v'' & \mu_2'' \end{pmatrix}, (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)} \\
\cdot\ & \widehat{k}_x^\rho\left(\mu', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\cdot(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'', (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\cdot(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)} \\
\cdot\ & \psi_x(\mu'\cdot\mu_1\,\mu_1' - \mu''\cdot\mu_1\,\mu_1'') \cdot \psi_x(\mu_1\,\mu'\,\mu_2'\cdot u'v' - \mu_1\,\mu''\,\mu_2''\cdot u''v'') \\
\cdot\ & \psi_x\left((\mu'\,\mu_2'\cdot v' - \mu''\,\mu_2''\cdot v'')\cdot\mu_1\cdot u\right) \cdot \psi_x\left((\mu'\,\mu_2'\cdot u' - \mu''\,\mu_2''\cdot u'')\cdot\mu_1\cdot v\right).
\end{aligned}$$

On observe que, dans les arguments des caractères ψ_x, les variables d'intégration u et v n'apparaissent plus que linéairement.

Se souvenant que l'on a toujours dans le domaine d'intégration

$$\mu''\,\mu_2'' = \mu'\,\mu_2'\,,$$

l'intégration pour les mesures additives

$$du \cdot dv$$

tend à concentrer les mesures vers le domaine

$$v'' = v'\,, \qquad u'' = u'\,,$$

lorsque $n \mapsto +\infty$.

Introduisant n'importe quelle fonction continue à support compact

$$\mathbb{1}_x : F_x \to \mathbb{R}_+$$

qui vaut 1 au voisinage de 0, on obtient que notre produit hermitien est égal, à une constante multiplicative près, à la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto+\infty} \quad & \int_{F_x^\times} |\mu'|_x^{-1} \cdot d\mu' \cdot \int_{F_x^\times} |\mu''|_x^{-1} \cdot d\mu'' \cdot \int \mathbb{1}^G_{x,n}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1\cdot u \\ \mu_1\cdot v & \mu_2+\mu_1\cdot uv \end{pmatrix}\right) \cdot |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\, d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv \\
& \qquad \cdot \left[\int du'' \cdot dv'' \cdot \psi_x(u\,u'' + v\,v'') \cdot |v''| \cdot \mathbb{1}_x(u'') \cdot \mathbb{1}_x(v'')\right] \\
\cdot\ & \int_{\mu''\mu_2''=\mu'\mu_2'} |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|_x^{1/k} \cdot |\mu_2'|_x \cdot |\mu_2''|_x \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot du' \cdot dv' \\
\cdot\ & f'\left(\begin{pmatrix} \mu_1'+\mu_2'\cdot u'v' & \mu_2'\cdot u' \\ \mu_2'\cdot v' & \mu_2' \end{pmatrix}, (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{f''\left(\begin{pmatrix} \mu_1''+\mu_2''\cdot u'v' & \mu_2''\cdot u' \\ \mu_2''\cdot v' & \mu_2'' \end{pmatrix}, (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)} \\
\cdot\ & \psi_x(\mu'\cdot\mu_1\,\mu_1' - \mu''\cdot\mu_1\,\mu_1'') \\
\cdot\ & \widehat{k}_x^\rho\left(\mu', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\cdot(\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\cdot(\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on a :

Lemme III.5. –

Pour toutes fonctions continues à support compact

$$\varphi', \varphi'' : T(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

on a

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \quad \int_{F_x^\times} |\mu'|_x^{-1} \cdot d\mu' \cdot \int_{F_x^\times} |\mu''|_x^{-1} \cdot d\mu'' \cdot \int \mathbb{I}_{x,n}^G \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix} \cdot |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv$$

$$\cdot \left[\int du'' \cdot dv'' \cdot \psi_x(u\,u'' + v\,v'') \cdot |v''| \cdot \mathbb{I}_x(u'') \cdot \mathbb{I}_x(v'') \right]$$

$$\int_{\mu''\mu_2''=\mu'\mu_2'} |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|_x^{1/k} \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1''$$

$$\cdot \quad \varphi'\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{\varphi''\left(\mu_1'', \mu_2'', (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)}$$

$$\cdot \quad \psi_x(\mu' \cdot \mu_1\,\mu_1' - \mu'' \cdot \mu_1\,\mu_1'')$$

$$\cdot \quad \widehat{k}_x^\rho\left(\mu', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \cdot (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \cdot (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)}$$

$$= \quad \int |\mu_1'\,\mu_2'|^{1/k} \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot \varphi'\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{\varphi''\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)}\,.$$

Démonstration :

Comme la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\varphi \mapsto \widehat{\varphi} = \left[\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \quad \mapsto \quad \int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot \varphi\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \right.$$

$$\left. \cdot \quad k_x^{\rho_T}\left(\mu_1\,\mu_1', \mu_2\,\mu_2', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \cdot (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \right]$$

préserve le produit hermitien

$$(\varphi', \varphi'') \mapsto \langle \varphi', \varphi'' \rangle = \int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot \varphi'\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \overline{\varphi''\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)}$$

et que, pour tout $\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \in T(F_x)$,

$$k_x^{\rho_T}\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) = \int_{F_x^\times} |\mu|_x^{-1} \cdot d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot (\mu_1 + \mu_2)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\,,$$

on sait déjà que le produit hermitien

$$\langle \varphi', \varphi'' \rangle = \int |\mu_1'\,\mu_2'|_x^{1/k} \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot \varphi'\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{\varphi''\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)}$$

est égal à l'expression

$$\int_{F_x^\times} |\mu'|_x^{-1} \cdot d\mu' \quad \cdot \quad \int_{F_x^\times} |\mu''|_x^{-1} \cdot d\mu'' \cdot \int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot \int |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|_x^{1/k} \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot d\mu_2''$$

$$\cdot \quad \varphi'\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{\varphi''\left(\mu_1'', \mu_2'', (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)}$$

$$\cdot \quad \psi_x\left(\mu' \cdot (\mu_1\,\mu_1' + \mu_2\,\mu_2') - \mu'' \cdot (\mu_1\,\mu_1'' + \mu_2\,\mu_2'')\right)$$

$$\cdot \quad \widehat{k}_x^\rho\left(\mu', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \cdot (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \cdot (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)}.$$

Il s'agit donc de prouver que cette expression ne change pas si l'on remplace l'opérateur d'intégration

$$\int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2\cdot\int |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|_x^{1/k}\cdot d\mu_1'\cdot d\mu_2'\cdot d\mu_1''\cdot d\mu_2''$$

par les opérateurs

$$\begin{aligned}\int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2\quad &\cdot\quad \int du\cdot dv\cdot \mathbb{1}^G_{x,n}\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_1\cdot u\\ \mu_1\cdot v & \mu_2+\mu_1\cdot uv\end{pmatrix}\\ &\cdot\quad \int du''\cdot dv''\cdot\psi_x(uu''+vv'')\cdot|v''|_x\cdot\mathbb{1}_x(u'')\cdot\mathbb{1}_x(v'')\\ &\cdot\quad \int_{\mu''\mu_2''=\mu'\mu_2'}|\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|_x^{1/k}\cdot d\mu_1'\cdot d\mu_2'\cdot d\mu_1''\end{aligned}$$

et que l'on fait tendre n vers $+\infty$.

Il suffit de le faire dans le cas où les deux fonctions continues à support compact

$$\varphi',\varphi'':T(F_x)\to\mathbb{C}$$

sont déduites de deux fonctions continues à support compact

$$f',f'':G(F_x)\to\mathbb{C}$$

par les formules

$$\varphi'\left(\mu_1',\mu_2',(\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)=|\mu_2'|_x\cdot\int du'\cdot dv'\cdot f'\left(\begin{pmatrix}\mu_1'+\mu_2'\cdot u'v' & \mu_2'\cdot u'\\ \mu_2'\cdot v' & \mu_2'\end{pmatrix},(\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right),$$

$$\varphi''\left(\mu_1'',\mu_2'',(\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)=|\mu_2''|_x\cdot\int du''\cdot dv''\cdot f''\left(\begin{pmatrix}\mu_1''+\mu_2''\cdot u''v'' & \mu_2''\cdot u''\\ \mu_2''\cdot v'' & \mu_2''\end{pmatrix},(\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right).$$

Or ceci résulte de ce que le produit hermitien

$$\langle f',f''\rangle$$

de deux telles fonctions f',f'' est égal à l'expression qui précède l'énoncé du lemme III.5.

Cela termine la preuve de ce lemme.

Remarque sur la démonstration du lemme :

Cette démonstration utilise le plongement de $T(F_x)$ dans $G(F_x)$ et le fait que le noyau $k_x^{\rho_T}$ sur $T(F_x)$ est relié au noyau

$$\begin{aligned}k_x^\rho:G(F_x)&\;\to\;\mathbb{C}\\ \left(g,\det(g)^{1/k}\right)&\;\mapsto\;\int_{F_x}d\mu\cdot\psi_x(\mu\cdot\mathrm{Tr}\,(g))\cdot\widehat{k}_x^\rho\left(\mu,\det(g)^{1/k}\right)\end{aligned}$$

dont on suppose qu'il est suffisamment contrôlé pour autoriser les différents changements d'ordre des intégrations dont on a besoin au cours du calcul.

Lorsque $k=2$, on peut aussi faire un calcul direct à partir de l'expression

$$k_x^{\rho_T}\left(\mu_1,\mu_2,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)=\int_{F_x^\times}d\mu\cdot\psi_x\left(\mu^{-1}+\mu^2\cdot\left(\mu_1+\mu_2+2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)\right).$$

Le noyau $k_x^{\rho_T}$ est en effet déduit de la fonction

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto \psi_x(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)$$

par intégration le long des fibres de

$$\begin{array}{rcl} \rho_T^\vee : T_3(F_x) & \to & T(F_x) \\ (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & \left(\lambda_0^2\, \lambda_1 = \mu_1, \lambda_1\, \lambda_2^2 = \mu_2, \lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2 = (\mu_1\, \mu_2)^{1/2}\right). \end{array}$$

Les éléments de chaque telle fibre ont la forme

$$\left(\mu^{-1} \cdot \frac{\mu_1^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}}\,,\ \mu^2 \cdot \left(\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}\right)^2,\ \mu^{-1} \cdot \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}}\right)$$

avec

$$\frac{\mu_1^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + (\mu_1\, \mu_2)^{1/2}}\,,\ \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}} = \frac{\mu_2}{(\mu_1\, \mu_2)^{1/2} + \mu_2}\,,\ \left(\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}\right)^2 = \mu_1 + \mu_2 + 2\, (\mu_1\, \mu_2)^{1/2},$$

et

$$\psi_x \left(\mu^{-1} \cdot \frac{\mu_1^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}} + \mu^2 \cdot \left(\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}\right)^2 + \mu^{-1} \cdot \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}}\right) = \psi_x \left(\mu^{-1} + \mu^2 \cdot \left(\mu_1 + \mu_2 + 2\, (\mu_1\, \mu_2)^{1/2}\right)\right).$$

Comme la distribution sur $\overline{T}_3(F_x) = F_x^3$

$$\begin{array}{rl} \displaystyle\int d\lambda_0 \cdot d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 & \cdot \displaystyle\int d\lambda_0' \cdot d\lambda_1' \cdot d\lambda_2' \cdot d\lambda_0'' \cdot d\lambda_1'' \cdot d\lambda_2'' \\ & \cdot\ \psi_x(\lambda_0\, \lambda_0' + \lambda_1\, \lambda_1' + \lambda_2\, \lambda_2' - \lambda_0\, \lambda_0'' - \lambda_1\, \lambda_1'' - \lambda_2\, \lambda_2'') \\ & \cdot\ f'(\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2') \cdot \overline{f''(\lambda_0'', \lambda_1'', \lambda_2'')} \end{array}$$

est supportée par la diagonale

$$\lambda_0' = \lambda_0''\,, \quad \lambda_1' = \lambda_1''\,, \quad \lambda_2' = \lambda_2''\,,$$

on en déduit que la distribution

$$\begin{array}{rl} \displaystyle\int_{F_x^\times \times F_x^\times} d\mu' \cdot d\mu'' & \cdot \displaystyle\int d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot \int d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot d\mu_2'' \\ & \cdot\ \psi_x \left(\mu'^{-1} + \mu'^2 \cdot \left(\mu_1\, \mu_1' + \mu_2\, \mu_2' + 2\, (\mu_1\, \mu_2)^{1/2} \cdot (\mu_1'\, \mu_2')^{1/2}\right)\right) \\ & \cdot\ \psi_x \left(-\mu''^{-1} - \mu''^2 \cdot \left(\mu_1\, \mu_1'' + \mu_2\, \mu_2'' + 2\, (\mu_1\, \mu_2)^{1/2} \cdot (\mu_1''\, \mu_2'')^{1/2}\right)\right) \\ & \cdot\ \varphi' \left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\, \mu_2')^{1/2}\right) \cdot \overline{\varphi'' \left(\mu_1'', \mu_2'', (\mu_1''\, \mu_2'')^{1/2}\right)} \end{array}$$

est supportée par le produit des diagonales

$$\mu' = \mu''$$

et

$$\mu_1' = \mu_1''\,, \quad \mu_2' = \mu_2''\,.$$

$\square$

Reprenons le calcul du produit hermitien

$$\left\langle \widehat{f}', \widehat{f}'' \right\rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \overline{\widehat{f}''(g)}$$

des ρ-transformées de Fourier de deux fonctions continues à support compact

$$f', f'' : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

au point où nous l'avions laissé avant l'énoncé du lemme III.5.

D'après ce lemme, ce produit hermitien est encore égal à

$$\int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_2|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot \int du \cdot dv$$

$$f'\left(\begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 \cdot uv & \mu_2 \cdot u \\ \mu_2 \cdot v & \mu_2 \end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \overline{f''\left(\begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 \cdot uv & \mu_2 \cdot u \\ \mu_2 \cdot v & \mu_2 \end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)}$$

qui, d'après le lemme III.3(ii), n'est autre que

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f'(g) \cdot \overline{f''(g)} = \langle f', f'' \rangle \,.$$

On obtient finalement :

Proposition III.6. (modulo vérification des convergences et de la légitimité des échanges d'ordres des intégrations utilisés lors du calcul) –

On suppose comme dans la proposition III.2 *que la fonction noyau*

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

s'écrit sous la forme

$$k_x^\rho\left(g, \det(g)^{1/k}\right) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

et vérifie la formule

$$k_x^{\rho_T}\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) = \int_{F_x} |\mu|_x^{-1} \cdot d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot (\mu_1 + \mu_2)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)$$

pour tout élément $\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \in T(F_x)$.

Alors l'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f(g) \cdot k_x^\rho(g\,g')\right]$$

vérifie la propriété (2) *du problème* III.1*, c'est-à-dire respecte le produit hermitien*

$$(f', f'') \mapsto \langle f', f'' \rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f'(g) \cdot \overline{f''(g)}\,.$$

□

3 Une troisième propriété locale : la transformée de Fourier de la multiplication point par point des fonctions

On considère toujours la représentation de transfert

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \hookrightarrow \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

du revêtement de degré $k \geq 1$

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

de GL_2.

En une place arbitraire x de F, on considère une fonction noyau

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui s'écrit sous la forme

$$k_x^\rho(g) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

et satisfait les hypothèses des propositions III.2 et III.6, donc aussi les propriétés (1) et (2) du problème III.1.

Pour démontrer la propriété (2) d'unitarité, nous avons calculé le produit hermitien

$$\left\langle \widehat{f}', \widehat{f}'' \right\rangle = \int_{G(F_x)} \widehat{f}'(g) \cdot \overline{\widehat{f}''(g)}$$

des ρ-transformées de Fourier $\widehat{f}'$ et $\widehat{f}''$ de deux fonctions continues à support compact

$$f', f'' : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

La façon dont nous avons mené le calcul amène à considérer aussi les intégrales

$$\int_{G(F_x)} \widehat{f}'(g) \cdot \widehat{f}''(g) \cdot \overline{\widehat{f}'''(g)}$$

associées à trois fonctions continues à support compact

$$f', f'', f''' : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

c'est-à-dire à s'intéresser au ρ-transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication point par point des fonctions sur $G(F_x)$.

L'intégrale ci-dessus s'écrit

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \int d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot d_\rho\, g''' \cdot f'(g') \cdot f''(g'') \cdot \overline{f'''(g''')} \cdot k_x^\rho(g\, g') \cdot k_x^\rho(g\, g'') \cdot \overline{k_x^\rho(g\, g''')}$$

et on peut mettre les éléments $g \in G(F_x)$ sous la forme

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1\, \mu_2)^{1/k} \right)$$

avec, d'après le lemme III.3(ii),

$$d_\rho\, g = |\mu_1\, \mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv\,.$$

D'autre part, on a

$$
\begin{array}{rl}
& k_x^\rho(g\,g') \cdot k_x^\rho(g\,g'') \cdot \overline{k_x^\rho(g\,g''')} \\
= & \displaystyle\int_{F_x \times F_x \times F_x} d\mu' \cdot d\mu'' \cdot d\mu''' \cdot k_x^\rho\left(\mu', \det(g\,g')^{1/k}\right) \cdot k_x^\rho\left(\mu'', \det(g\,g'')^{1/k}\right) \cdot \overline{k_x^\rho\left(\mu''', \det(g\,g''')^{1/k}\right)} \\
\cdot & \psi_x\left(\mu' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g') + \mu'' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g'') - \mu''' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g''')\right)
\end{array}
$$

avec

$$
\begin{array}{rl}
& \mu' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g') + \mu'' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g'') - \mu''' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g''') \\
= & \mu' \cdot (g'_{1,1} \cdot \mu_1 + g'_{2,2} \cdot \mu_2) + \mu'' \cdot (g''_{1,1} \cdot \mu_1 + g''_{2,2} \cdot \mu_2) - \mu''' \cdot (g'''_{1,1} \cdot \mu_1 + g'''_{2,2} \cdot \mu_2) \\
+ & (\mu' \cdot g'_{2,1} + \mu'' \cdot g''_{2,1} - \mu''' \cdot g'''_{2,1}) \cdot \mu_1 \cdot u \\
+ & (\mu' \cdot g'_{1,2} + \mu'' \cdot g''_{1,2} - \mu''' \cdot g'''_{1,2}) \cdot \mu_1 \cdot v \\
+ & (\mu' \cdot g'_{2,2} + \mu'' \cdot g''_{2,2} - \mu''' \cdot g'''_{2,2}) \cdot \mu_1 \cdot uv\,.
\end{array}
$$

Ici encore, le terme quadratique en u et v

$$
(\mu' \cdot g'_{2,2} + \mu'' \cdot g''_{2,2} - \mu''' \cdot g'''_{2,2}) \cdot \mu_1 \cdot uv
$$

pose problème, mais on a l'analogue suivant du lemme III.4 :

Lemme III.7. –

Soit $K_{x,\emptyset}$ le même sous-groupe compact maximal de $G(F_x)$ que dans le lemme III.4.

Alors, pour tous $\mu', \mu'', \mu''' \in F_x^\times$ et tous éléments

$$
g', g'', g''' \in G(F_x)\,,
$$

il existe un élément $g_\emptyset \in K_{x,\emptyset}$ tel que

$$
\mu''' \cdot (g''' g_\emptyset)_{2,2} = \mu' \cdot (g' g_\emptyset)_{2,2} + \mu'' \cdot (g'' g_\emptyset)_{2,2}\,.
$$

□

Procédons comme au paragraphe précédent, en supposant en particulier qu'il est légitime de changer l'ordre d'intégration

$$
\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \int d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot d_\rho\, g''' \cdot \int_{F_x \times F_x \times F_x} d\mu' \cdot d\mu'' \cdot d\mu'''
$$

en

$$
\int_{F_x \times F_x \times F_x} d\mu' \cdot d\mu'' \cdot d\mu''' \cdot \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \int d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot d_\rho\, g'''\,.
$$

On écrit la mesure $\int_{G(F_x)} d_\rho\, g$ comme limite, quand n tend vers $+\infty$, des mesures à support compact $\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \mathbb{1}_{x,n}^G$ qu'il est possible de faire commuter avec les sommations $\int d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot d_\rho\, g'''$.

Comme les mesures $\int_{G(F_x)} \mathbb{1}_{x,n}^G(g) \cdot d_\rho\, g$ sont invariantes par $K_{x,\emptyset}$, on obtient que le produit triple

$$
\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f'}(g) \cdot \widehat{f''}(g) \cdot \overline{\widehat{f'''}(g)}
$$

est égal, à une constante multiplicative près, à la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto+\infty} \quad & \int_{F_x\times F_x\times F_x} d\mu'\cdot d\mu''\cdot d\mu'''\cdot\int \mathbb{1}^G_{x,n}\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_1\cdot u\\ \mu_1\cdot v & \mu_2+\mu_1\cdot uv\end{pmatrix}\cdot|\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot|\mu_1|_x^2\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2\cdot du\cdot dv\\
\cdot\quad & \int_{\mu'''\mu_2'''=\mu'\mu_2'+\mu''\mu_2''}|\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''\,\mu_1'''\,\mu_2'''|_x^{1/k}\cdot|\mu_2'|_x^2\cdot|\mu_2''|_x^2\cdot|\mu_2'''|_x^2\cdot d\mu_1'\cdot d\mu_2'\cdot d\mu_1''\cdot d\mu_2''\cdot d\mu_1'''\\
\cdot\quad & \left|v'''-\frac{\mu'\,\mu_2'\,v'}{\mu'''\,\mu_2'''}-\frac{\mu''\,\mu_2''\,v''}{\mu'''\,\mu_2'''}\right|_x\cdot du'\cdot dv'\cdot du''\cdot dv''\cdot du'''\cdot dv'''\\
\cdot\quad & f'\left(\begin{pmatrix}\mu_1'+\mu_2'\cdot u'v' & \mu_2'\cdot u'\\ \mu_2'\cdot v' & \mu_2'\end{pmatrix},(\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)\cdot f''\left(\begin{pmatrix}\mu_1''+\mu_2''\cdot u''v'' & \mu_2''\cdot u''\\ \mu_2''\cdot v'' & \mu_2''\end{pmatrix},(\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\overline{\cdot f'''\left(\begin{pmatrix}\mu_1'''+\mu_2'''\cdot u'''v''' & \mu_2'''\cdot u'''\\ \mu_2'''\cdot v''' & \mu_2'''\end{pmatrix},(\mu_1'''\,\mu_2''')^{1/k}\right)}\\
\cdot\quad & \widehat{k}_x^\rho\left(\mu',(\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\cdot(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\cdot\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'',(\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\cdot(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\cdot\overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu''',(\mu_1'''\,\mu_2''')^{1/k}\cdot(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)}\\
\cdot\quad & \psi_x\left(\mu'\cdot(\mu_1\,\mu_1'+\mu_2\,\mu_2')+\mu''\cdot(\mu_1\,\mu_1''+\mu_2\,\mu_2'')-\mu'''\cdot(\mu_1\,\mu_1'''+\mu_2\,\mu_2''')\right)\\
\cdot\quad & \psi_x\left(\mu_1\,\mu'\,\mu_2'\cdot u'v'+\mu_1\,\mu''\,\mu_2''\cdot u''v''-\mu_1\,\mu'''\,\mu_2'''\cdot u'''v'''\right)\\
\cdot\quad & \psi_x\left((\mu'\,\mu_2'\cdot v'+\mu''\,\mu_2''\cdot v''-\mu'''\,\mu_2'''\cdot v''')\cdot\mu_1\cdot u\right)\\
\cdot\quad & \psi_x\left((\mu'\,\mu_2'\cdot u'+\mu''\,\mu_2''\cdot u''-\mu'''\,\mu_2'''\cdot u''')\cdot\mu_1\cdot v\right).
\end{aligned}$$

Alors, pour μ',μ'' et μ''' fixés, l'intégration pour les mesures additives

$$du\cdot dv$$

amène à substituer les équations

$$\mu'''\,\mu_2'''\cdot v'''=\mu'\,\mu_2'\cdot v'+\mu''\,\mu_2''\cdot v''$$

$$\mu'''\,\mu_2'''\cdot u'''=\mu'\,\mu_2'\cdot u'+\mu''\,\mu_2''\cdot u''$$

dans les expressions de

$$f'(\bullet),f''(\bullet),\overline{f'''(\bullet)}$$

à l'intérieur de l'intégrale.

Autrement dit, pour μ',μ'' et μ''' fixés, avoir modifié les coordonnées de g',g'' et g''' par l'action diagonale d'un élément $g_\emptyset\in K_{x,\emptyset}$ pour imposer la condition de départ

$$\mu'''\cdot g_{2,2}'''=\mu'\cdot g_{2,2}'+\mu''\cdot g_{2,2}''$$

entraîne nécessairement aussi les conditions

$$\mu'''\cdot g_{2,1}'''=\mu'\cdot g_{2,1}'+\mu''\cdot g_{2,1}''\,,$$

$$\mu'''\cdot g_{1,2}'''=\mu'\cdot g_{1,2}'+\mu''\cdot g_{1,2}''\,.$$

Comme la distribution considérée de f',f'' et f''' est invariante par l'action de $K_{x,\emptyset}$ et donc de $W_G=\mathfrak{S}^2$, et voit que l'équation vérifiée par le support de cette distribution

$$\mu'''\cdot g_{2,1}'''=\mu'\cdot g_{2,1}'+\mu''\cdot g_{2,1}''$$

entraîne à son tour l'équation

$$\mu'''\cdot g_{1,1}'''=\mu'\cdot g_{1,1}'+\mu''\cdot g_{1,1}''\,.$$

Ainsi on a :

Proposition III.8. (modulo vérification des convergences et de la légitimité des échanges d'ordre des intégrations utilisés lors du calcul) –

On considère comme dans les propositions III.2 *et* III.6 *une fonction noyau*

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui s'écrit sous la forme

$$k_x^\rho\left(g, \det(g)^{1/k}\right) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, \det(g)^{1/k}\right) .$$

Alors, pour tous $\mu', \mu'', \mu''' \in F_x^\times$ fixés, la forme

$$\begin{aligned}\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \quad \cdot \quad & \int d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot d_\rho\, g''' \cdot f'(g') \cdot f''(g'') \cdot \overline{f'''(g''')} \\ & \widehat{k}_x^\rho\left(\mu', \det(g)^{1/k} \cdot \det(g')^{1/k}\right) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu'', \det(g)^{1/k} \cdot \det(g'')^{1/k}\right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu''', \det(g)^{1/k} \cdot \det(g''')^{1/k}\right)} \\ \cdot \quad & \psi_x(\mu' \cdot \mathrm{Tr}\,(gg') + \mu'' \cdot \mathrm{Tr}\,(gg'') - \mu''' \cdot \mathrm{Tr}\,(gg'''))\end{aligned}$$

ne dépend que de la restriction de la fonction

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) \times G(F_x) \times G(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (g', g'', g''') & \mapsto & f'(g') \cdot f''(g'') \cdot \overline{f'''(g''')} \end{array}$$

au sous-espace des triplets (g', g'', g''') dont les projections dans $\mathrm{GL}_2(F_x)$ satisfont l'équation

$$\mu''' \cdot g''' = \mu' \cdot g' + \mu'' \cdot g'' .$$

□

Pour toute fonction continue à valeurs unitaires

$$\varphi : G(F_x) \to U(1) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\} ,$$

l'opérateur

$$f \mapsto f \cdot \varphi = [g \mapsto f(g)\, \varphi(g)]$$

est un opérateur unitaire de l'espace des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$.

On déduit de la proposition III.8 ci-dessus ou même directement du calcul qui la précède :

Corollaire III.9. (modulo vérification des convergences et de la légitimité des échanges d'ordres des intégrations utilisés lors du calcul) –

On considère une fonction noyau

$$\begin{array}{rcl} k_x^\rho : G(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & k_x^\rho(g) = \displaystyle\int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, \det(g)^{1/k}\right) \end{array}$$

qui vérifie les hypothèses et donc aussi les conclusions des propositions III.2 *et* III.6.

Soient une fonction continue unitaire

$$\varphi : G(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

et deux fonctions continues de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \varphi\,.$$

Alors, si φ est la ρ-transformée de Fourier d'une distribution supportée par $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$], la restriction de f_2 à $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$] ne dépend que de la restriction de f_1 à ce même $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$].

$\square$

4 Et le cas général ?

Nous voudrions maintenant revenir au cas général d'un groupe réductif G muni d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

au sens de la définition I.1.

En particulier, G est muni des 2 caractères $\det_G$ et $\det_B$. Par définition, le cocaractère central dual de $\det_G$

$$\widehat{\det_G} : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$$

agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par l'unique caractère $\lambda \mapsto \lambda$, et le caractère $\det_B$ est caractérisé par les identités

$$\langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle$$

pour toute composante ρ_T^i de

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

qui est le plus haut poids d'un facteur irréductible de ρ.

Considérons d'abord le cas où G est déployé et de rang 1, c'est-à-dire ne compte qu'une seule racine simple. Autrement dit, le groupe dérivé $G^{\mathrm{der}} = [G, G]$ est isomorphe à SL_2 ou PGL_2, et le groupe dérivé du dual $\widehat{G}^{\mathrm{der}} = [\widehat{G}, \widehat{G}]$ est a priori isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Alors ρ est une somme directe de représentations irréductibles de $\widehat{G}$ dont la restriction à $\widehat{G}^{\mathrm{der}} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est une représentation de puissance symétrique $\mathrm{sym}^k : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$. De plus, le cocaractère dual de δ_B

$$\widehat{\delta}_B : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T}$$

agit sur l'espace de tout tel facteur irréductible sym^k par la famille de caractères

$$\lambda \mapsto (\lambda^k, \lambda^{k-2}, \ldots, \lambda^{-k+2}, \lambda^{-k})$$

et donc le cocaractère central

$$\widehat{\det_B} : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T}$$

agit sur cet espace par

$$\lambda \mapsto (\lambda^k, \lambda^k, \ldots, \lambda^k)\,.$$

Cela signifie que l'on a un morphisme

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G}$$

dont l'image est le produit de $\widehat{G}^{\mathrm{der}}$ et de l'image de $\widehat{\det_B}$ et dont le noyau est l'intersection des sous-groupes finis μ_k associés aux facteurs sym^k de la décomposition de ρ.

Le dual de ce morphisme est un épimorphisme

$$G \to \mathrm{GL}_2 \,.$$

D'autre part, on dispose de l'épimorphisme de quotient

$$G \to G/G^{\mathrm{der}} = G^{\mathrm{ab}}$$

vers le tore G^{ab}. Les caractères $\det_G$ et $\det_B$ de G se factorisent à travers G^{ab}, et on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\det_B"] \\ \mathrm{GL}_2 \arrow[r, "\det"] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

qui est nécessairement cartésien. On a prouvé :

Lemme III.10.

Si le groupe réductif G muni de la représentation de transfert ρ est déployé sur F et de rang 1, il s'identifie au produit fibré

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} G^{\mathrm{ab}}$$

via le caractère $\det_B : G^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{G}_m$ du tore G^{ab} abélianisé de G.

Le tore maximal de G s'identifie à

$$T = T_2 \times_{\mathbb{G}_m} G^{\mathrm{ab}}$$

et le quotient par conjugaison

$$G/G = T/W_G$$

s'identifie à

$$\mathbb{A}^1 \times G^{\mathrm{ab}}$$

via le morphisme

$$(g, g^{\mathrm{ab}}) \mapsto (\mathrm{Tr}\,(g), g^{\mathrm{ab}}) \,.$$

□

Dans la situation de ce lemme, le groupe réductif G est également muni du sous-groupe de Borel

$$B = B_2 \times_{\mathbb{G}_m} G^{\mathrm{ab}}$$

dont le radical unipotent N_B s'identifie au radical unipotent

$$N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

du sous-groupe de Borel B_2 de GL_2.

Alors on démontre exactement de la même façon que la proposition III.2, la proposition III.6 et le corollaire III.9 :

Proposition III.11.

Considérons le cas où le groupe réductif G est déployé sur F et de rang 1, donc s'écrit

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} G^{\mathrm{ab}} \,,$$

et où ρ est une représentation

$$\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

sans action du groupe de Galois Γ_F.

En une place arbitraire x de F, considérons une fonction invariante par conjugaison

$$\begin{array}{rcl} k_x^\rho : G(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x) \times_{F_x^\times} G^{\mathrm{ab}}(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (g, g^{\mathrm{ab}}) & \mapsto & k_x^\rho(g, g^{\mathrm{ab}}) \end{array}$$

écrite sous la forme

$$k_x^\rho(g, g^{\mathrm{ab}}) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho(\mu, g^{\mathrm{ab}})$$

pour une certaine mesure additive $d\mu$ de F_x.

Alors, sous réserve que les fonctions

$$F_x \times G_{\mathrm{ab}}(F_x) \ni (\mu, g^{\mathrm{ab}}) \to \widehat{k}_x^\rho(\mu, g^{\mathrm{ab}})$$

satisfassent les propriétés de convergence et de légitimité d'échanges d'ordres d'intégrations nécessaires dans les calculs, on a :

(i) *L'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ défini par le noyau k_x^ρ*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, \bullet)$$

est compatible avec l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ défini dans l'exposé II

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t\, \bullet)$$

via l'opérateur de passage aux termes constants

$$f_x \mapsto |\mathrm{det}_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B}(\bullet) = \left[t \mapsto |\mathrm{det}_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(t \cdot u) \right]$$

si et seulement si on a pour tout élément

$$t = (t_1, t_2, t^{\mathrm{ab}}) \in T(F_x) = T_2(F_x) \times_{F_x^\times} G^{\mathrm{ab}}(F_x)$$

la relation

$$k_x^{\rho_T}(t) = \int_{F_x} d\mu \cdot |\mu|_x^{-1} \cdot \psi_x(\mu \cdot (t_1 + t_2)) \cdot \widehat{k}_x^\rho(\mu, t^{\mathrm{ab}})\,.$$

(ii) *Sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

est unitaire.

(iii) *Sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur de "convolution" sur $G(F_x)$ (défini comme le transformé par $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ de la multiplication point par point des fonctions) préserve le tore maximal $T(F_x)$ ainsi que le sous-groupe de Borel $B(F_x)$.*

Cela signifie que pour toute fonction continue unitaire

$$\varphi : G(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

dont la ρ-transformée de Fourier est une distribution supportée par $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$], et pour toutes fonctions continues de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \varphi \,,$$

la restriction de f_2 à $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$] ne dépend que de la restriction de f_1 à $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$].

$\square$

Dans le cas général, considérons l'ensemble Φ_G des racines de G.

Pour toute $\alpha \in \Phi_G$, on note T_α [resp. $\widehat{T}_\alpha$] le sous-tore de codimension 1 de T [resp. $\widehat{T}$] défini comme la composante neutre du noyau du caractère $\alpha : T \to \mathbb{G}_m$ [resp. $\alpha^\vee : \widehat{T} \to \mathbb{C}^\times$], et G_α [resp. $\widehat{G}_\alpha$] le sous-groupe de Levy standard de G [resp. $\widehat{G}$] défini comme le commutateur de T_α [resp. $\widehat{T}_\alpha$] dans G [resp. $\widehat{G}$].

Ainsi, chaque G_α est un groupe réductif de rang 1 qui est défini et déployé sur toute extension finie séparable F' de F dont le groupe de Galois $\Gamma_{F'} \subset \Gamma_F$ laisse invariante la racine α. De plus, $\widehat{G}_\alpha$ s'identifie au dual de G_α. Les sous-groupes dérivés $G_\alpha^{\mathrm{der}} = [G_\alpha, G_\alpha]$ et $\widehat{G}_\alpha^{\mathrm{der}} = [\widehat{G}_\alpha, \widehat{G}_\alpha]$ sont isomorphes à SL_2 ou PGL_2.

Considérons maintenant une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

avec les deux caractères associés

$$\det_G, \det_B : T \subset G \to \mathbb{G}_m \,.$$

Pour toute racine $\alpha \in \Phi_G$, la représentation induite

$$\widehat{G}_\alpha \hookrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

se décompose comme une somme directe de représentations irréductibles dont la restriction à $\widehat{G}_\alpha^{\mathrm{der}} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est de la forme sym^k pour des entiers $k \geq 0$. On peut donc introduire le cocaractère

$$\widehat{\det_\alpha} : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

dont l'action sur chaque facteur irréductible de $\widehat{G}_\alpha \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est donnée par $\lambda \mapsto \lambda^k$ si l'action de $\widehat{G}_\alpha^{\mathrm{der}}$ sur ce facteur est de la forme sym^k.

On peut noter $\widehat{G}'_\alpha$ le sous-groupe réductif de rang 1 de $\widehat{G}$ défini comme le composé de $\widehat{G}_\alpha$ et de l'image de $\widehat{\det_\alpha}$. Il contient $\widehat{G}_\alpha$ comme sous-groupe distingué et le quotient

$$\widehat{G}'_\alpha / \widehat{G}_\alpha$$

est soit trivial, soit un tore de dimension 1.

On peut encore noter G'_α le groupe réductif dual de $\widehat{G}'_\alpha$; il est défini sur n'importe quelle extension F' de F sur laquelle G_α est défini. On a un épimorphisme de groupes réductifs

$$G'_\alpha \to G_\alpha$$

dont le noyau est soit trivial, soit un tore de dimension 1. De plus, G'_α est muni du caractère

$$\det_\alpha : G'_\alpha \to \mathbb{G}_m$$

dual du cocaractère central

$$\widehat{\det_\alpha} : \mathbb{C}^\times \to \widehat{G}'_\alpha \,.$$

On remarque que les $T_\alpha, \widehat{T}_\alpha, G_\alpha, \widehat{G}_\alpha, \widehat{\det}_\alpha, \widehat{G}'_\alpha, G'_\alpha, \det_\alpha$ sont invariants par la permutation $\alpha \mapsto -\alpha$ de Φ_G. On a :

Lemme III.12.

Avec les notations ci-dessus, supposons que le groupe réductif G est déployé sur F (si bien que les G_α, $\alpha \in \Phi_G$, sont définis sur F) et que les sous-groupes $G_\alpha^{\mathrm{der}} = [G_\alpha, G_\alpha]$, $\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}$, de G commutent entre eux ou, ce qui revient au même, que les sous-groupes $\widehat{G}_\alpha^{\mathrm{der}} = [\widehat{G}_\alpha, \widehat{G}_\alpha]$ de $\widehat{G}$ commutent entre eux.

Alors :

(i) *Quitte à remplacer $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par une représentation conjuguée, on peut supposer non seulement que ρ envoie $\widehat{T}$ dans $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ mais que, poour tout $\alpha \in \Phi_G$, le cocaractère $\widehat{\det}_\alpha : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ se factorise à travers $\widehat{T}_r$.*

(ii) *Le groupe réductif G s'identifie au quotient du produit*

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha$$

par un sous-groupe abélien central, produit d'un sous-groupe abélien fini et d'un sous-tore.

(iii) *Le cocaractère produit*

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \widehat{\det}_\alpha : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

est égal au composé

$$\widehat{\det}_B : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \widehat{T} \xrightarrow{\rho_T} \widehat{T}_r\,,$$

et le caractère produit

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \det_\alpha : \prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha \to \mathbb{G}_m$$

est égal au composé de la projection

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha \to G$$

et de

$$\det_B : G \to \mathbb{G}_m\,.$$

Démonstration :

(i) La représentation $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ se décompose comme somme directe de sous-représentations irréductibles. La restriction à $[\widehat{G}, \widehat{G}] = \prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} [\widehat{G}_\alpha, \widehat{G}_\alpha]$ de chaque telle sous-représentation irréductible est encore irréductible, et elle s'écrit comme un produit tensoriel de représentations irréductibles des facteurs $[\widehat{G}_\alpha, \widehat{G}_\alpha]$.

(ii) Le groupe réductif G s'écrit comme un quotient du produit $\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G_\alpha$ et donc aussi de $\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha$.

(iii) Le cocaractère produit

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \widehat{\det}_\alpha : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T}_r$$

et le cocaractère central

$$\widehat{\det}_B : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T} \to \widehat{T}_r$$

agissent chacun par un scalaire sur chaque facteur irréductible de $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Afin de démontrer qu'ils sont égaux, il suffit de prouver que pour toute composante ρ_T^i de $\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r)$ qui est le plus haut poids d'un facteur irréductible, on a

$$\left\langle \prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \widehat{\det_\alpha}\,,\ \rho_T^i \right\rangle = \langle \det_B, \rho_T^i \rangle \,.$$

Or, en notant Φ_G^+ l'ensemble des racines positives de G, on a

$$\left\langle \widehat{\det_\alpha}\,,\ \rho_T^i \right\rangle = \langle \alpha, \rho_T^i \rangle \,, \quad \forall\, \alpha \in \Phi_G^+ \,.$$

La conclusion résulte de ce que $\Phi_G^+ \to \Phi_G/\{\pm 1\}$ est une bijection et de la formule

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G^+} \alpha = \delta_B \,.$$

$\square$

Pour toute racine $\alpha \in \Phi_G$, le groupe réductif G'_α muni du caractère $\det_\alpha : G'_\alpha \to \mathbb{G}_m$ vérifie les hypothèses du lemme III.10. Il s'identifie donc à un produit fibré de la forme

$$G'_\alpha = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} G'^{\mathrm{ab}}_\alpha$$

où G'^{ab}_α désigne le tore quotient $G'_\alpha / G'^{\mathrm{der}}_\alpha$ muni du caractère $\det_\alpha : G'^{\mathrm{ab}}_\alpha \to \mathbb{G}_m$.

Chaque G'_α est donc également muni d'un morphisme composé

$$\mathrm{Tr}_\alpha : G'_\alpha \longrightarrow \mathrm{GL}_2 \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{A}^1 \,.$$

On déduit du lemme qui précède :

Corollaire III.13.

Sous les hypothèses du lemme III.12 *ci-dessus, tout polynôme sur le schéma affine*

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha$$

qui provient d'un polynôme sur le groupe réductif G qui est invariant par conjugaison, provient nécessairement d'un polynôme sur le schéma affine produit

$$\left(\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \mathbb{A}^1 \right) \times G^{\mathrm{ab}}$$

via les morphismes

$$\mathrm{Tr}_\alpha : G'_\alpha \to \mathbb{A}^1 \,, \quad \alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\} \,.$$

$\square$

On démontre de la même façon que la proposition III.2, la proposition III.6 et le corollaire III.9 :

Proposition III.14.

Considérons le cas où le groupe réductif G est déployé sur F et où ses sous-groupes $G_\alpha^{\mathrm{der}} = [G_\alpha, G_\alpha]$, $\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}$, commutent entre eux.

En une place arbitraire x de F, considérons une fonction invariante par conjugaison

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui, considérée comme une fonction de $\left(\prod_{\alpha\in\Phi_G/\{\pm1\}} G'_\alpha\right)(F_x)$*, s'écrit sous la forme*

$$k_x^\rho(g) = \int \bigotimes_{\alpha\in\Phi_G/\{\pm1\}} d\mu_\alpha \cdot \psi_x\left(\sum_{\alpha\in\Phi_G/\{\pm1\}} \mu_\alpha\cdot \mathrm{Tr}_\alpha(g)\right)\cdot \widehat{k}_x^\rho\left((\mu_\alpha)_{\alpha\in\Phi_G/\{\pm1\}},\, g^{\mathrm{ab}}\right)$$

où $\bigotimes\limits_{\alpha} d\mu_\alpha$ *est une mesure additive de* $\prod\limits_{\alpha\in\Phi_G/\{\pm1\}} F_x$.

Alors, sous réserve que les fonctions

$$\left(\prod_{\alpha\in\Phi_G/\{\pm1\}} F_x\right)\times G_{\mathrm{ab}}(F_x) \ni \left((\mu_\alpha), g^{\mathrm{ab}}\right) \mapsto \widehat{k}_x^\rho\left((\mu_\alpha), g^{\mathrm{ab}}\right)$$

satisfassent les propriétés de convergence et de légitimité d'échanges d'ordres d'intégrations nécessaires dans les calculs, on a :

(i) *L'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ défini par le noyau k_x^ρ*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g\cdot f_x(g)\cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

est compatible avec l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ défini dans l'exposé II

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x = \int_{T(F_x)} dt\cdot \varphi_x(t)\cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet)$$

via l'opérateur de passage aux termes constants

$$f_x \mapsto |\det_B(\bullet)|_x^{1/2}\cdot f_{x,N_B}(\bullet) = \left[t\mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{1/2}\cdot\int_{N_B(F_x)} du\cdot f_x(t\cdot u)\right]$$

si et seulement si on a pour tout élément de $T(F_x)$ relevé en un élément t du tore maximal de $\left(\prod_{\alpha\in\Phi_G/\{\pm1\}} G'_\alpha\right)(F_x)$ *la relation*

$$k_x^{\rho_T}(t) = \int\left(\bigotimes_\alpha d\mu_\alpha\right)\cdot\left(\prod_\alpha |\mu_\alpha|_x^{-1}\right)\cdot\psi_x\left(\sum_\alpha \mu_\alpha\cdot\mathrm{Tr}_\alpha(t)\right)\cdot\widehat{k}_x^\rho\left((\mu_\alpha), t^{\mathrm{ab}}\right)$$

où t^{ab} désigne l'image de t dans le quotient $G^{\mathrm{ab}}(F_x)$ de $T(F_x)$.

(ii) *Sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

est unitaire.

(iii) *Sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur de "convolution" sur $G(F_x)$ préserve le tore maximal $T(F_x)$ ainsi que le sous-groupe de Borel $B(F_x)$.* □

Nous voudrions maintenant traiter le cas général d'un groupe réductif quasi-déployé G sur F muni d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

telle que Γ_F agisse sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base. L'action de Γ_F sur l'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots, r\}$ définit une F-algèbre séparable E de degré r, et ρ induit une suite exacte de tores sur F

$$1 \longrightarrow T_\rho \longrightarrow T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m \longrightarrow T \longrightarrow 1\,.$$

Nous allons construire d'abord des opérateurs dits "de convolution" sur les $G(F_x)$ puis caractériser les opérateurs de ρ-transformation de Fourier recherchés en demandant qu'ils transforment les opérateurs de multiplication point par point des fonctions en les opérateurs de convolution qui auront été construits.

Les opérateurs de convolution sur les $G(F_x)$ vont être construits à partir des opérateurs de convolution déjà connus sur les $T_E(F_x) = E_x^\times \subset E_x$ et donc aussi sur les $T(F_x)$.

Considérant l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{A}^1\,,$$

avec donc $\overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x$, $\forall\, x \in |F|$, on a d'abord :

Proposition III.15.

Le produit $f_1 \cdot f_2$ de deux fonctions localement constantes à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est archimédienne] sur un localisé $E_x = E \otimes_F F_x$, $x \in |F|$, de E

$$f_1, f_2 : \overline{T}_E(F_x) = E_x \to \mathbb{C}$$

est encore une fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est archimédienne] sur E_x.

De plus, on a

$$\widehat{f_1 \cdot f_2} = \int_{E_x} dt_x \cdot \widehat{f}_1(\bullet - t_x) \cdot \widehat{f}_2(t_x) = \widehat{f}_1 *_E \widehat{f}_2$$

où $*_E$ désigne donc l'opérateur de convolution additive. □

Notons $Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$ le fermé irréductible défini par l'équation

$$x_1 + x_2 = x_3\,.$$

Il est de dimension 2 dim $T_E = 2\,r$, et il est invariant par l'action diagonale de T_E dans $\overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$.

On a :

Lemme III.16.

Soit x une place arbitraire de F.

Il existe une unique forme différentielle

$$\omega_E \in \Omega^r_{Z_E/\overline{T}_E}$$

relative au morphisme de 3^{e} projection

$$\mathrm{pr}^3_{Z_E} : Z_E \to \overline{T}_E$$

et de degré maximal $r = \dim T_E$, telle que :

- *via son action diagonale, T_E agit sur ω_E par le caractère $\det_E(\bullet)$ composé de $T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T$ et de $\det_G : T \to \mathbb{G}_m$,*

- *pour toutes fonctions localement constantes à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est archimédienne]*
$$f_1, f_2 : \overline{T}_E(F_x) = E_x \to \mathbb{C}\,,$$
on a
$$(f_1 *_E f_2)(\bullet) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_E})^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}^1_{Z_E})^*(f_1)\cdot(\mathrm{pr}^2_{Z_E})^*(f_2)\cdot\omega_E$$
où $\mathrm{pr}^1_{Z_E}, \mathrm{pr}^2_{Z_E}, \mathrm{pr}^3_{Z_E} : Z_E \to \overline{T}_E$ *désignent les trois projections de* Z_E *sur* $\overline{T}_E$*.*

□

On note $\overline{T}$ la variété torique affine normale de tore T définie comme le quotient de $\overline{T}_E$ par l'action du noyau T_ρ de $\rho_T^\vee : T_E \to T$. Elle est définie par le cône convexe polyédral
$$X_{\overline{T}} = \left\{\chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i\rangle \geq 0\,, \quad 1 \leq i \leq r\right\}\,.$$

Notons alors Z_{ρ_T} le schéma affine normal défini comme le quotient du schéma affine lisse $Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$ par l'action diagonale de T_ρ. Il est muni d'une action de T et de trois morphismes de projection T-équivariants
$$\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} : Z_{\rho_T} \to \overline{T}\,.$$
Sa dimension est égale à $2\dim T_E - \dim T_\rho = \dim T_E + \dim T = r + \dim T$. La forme différentielle relative $\omega_E \in \Omega^r_{Z_E/\overline{T}_E}$ de degré r est invariante par l'action du sous-tore T_ρ de T_E. Elle provient donc d'une forme différentielle
$$\omega_{\rho_T} \in \Omega^r_{Z_{\rho_T}/\overline{T}}$$
relative au morphisme
$$\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} : Z_{\rho_T} \to \overline{T}$$
et de degré maximal $r = \dim Z_{\rho_T} - \dim T$.

On a :

Proposition III.17.

Soit x une place ultramétrique de F.

Pour toute ρ_T-fonction f_x sur $T(F_x)$ et toute fonction localement constante à support compact φ_x sur $\overline{T}(F_x)$, on a :

(i) *La fonction φ_x est de carré intégrable, et sa ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{\varphi}_x$ est intégrable.*

(ii) *Le produit $f_x \cdot \varphi_x$ est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.*

(iii) *Sa ρ_T-transformée de Fourier*
$$T(F_x) \ni t \mapsto \widehat{f_x \cdot \varphi_x}\,(t)$$
est donnée par les intégrales bien définies
$$\widehat{f_x \cdot \varphi_x}\,(\bullet) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}})^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}})^*(\widehat{f}_x)\cdot(\mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}})^*(\widehat{\varphi}_x)\cdot\omega_{Z_{\rho_T}} = \widehat{f}_x *_{\rho_T} \widehat{\varphi}_x\,.$$

Remarque :

De même, si x est une place archimédienne de F, on dispose de l'opérateur de ρ_T-convolution sur $T(F_x)$ défini par la formule
$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 *_{\rho_T} f_2 = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}})^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}})^*(f_1)\cdot(\mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}})^*(f_2)\cdot\omega_{Z_{\rho_T}}$$

et on a

$$\widehat{f_1 \cdot f_2} = \widehat{f}_1 *_{\rho_T} \widehat{f}_2$$

pour toute ρ_T-fonction $f_1 : T(F_x) \to \mathbb{C}$ et toute fonction

$$f_2 : \overline{T}(F_x) \to \mathbb{C}$$

continue à support compact.

Démonstration :

(i) est évident.

(ii) Par définition, l'espace des ρ_T-fonctions est engendré par les translatées par les éléments de $T(F_x)$ de fonctions

$$f_x = (\rho_T^\vee)_*(h_x)$$

images par $\rho_T^\vee : T_E(F_x) \to T(F_x)$ de fonctions localement constantes à support compact

$$h_x : \overline{T}_E(F_x) = E_x \to \mathbb{C}\,.$$

On peut donc supposer que f_x est de cette forme et alors la conclusion résulte de ce que

$$f_x \cdot \varphi_x = (\rho_T^\vee)_*(h_x \cdot \varphi_x \circ \rho_T^\vee)\,.$$

(iii) Comme l'opérateur de convolution est $T(F_x)$-équivariant, on peut supposer ici encore que f_x a la forme

$$f_x = (\rho_T^\vee)_*(h_x)$$

pour une fonction localement constante à support compact

$$h_x : E_x \to \mathbb{C}\,.$$

Comme on a dans ce cas

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f}_x & = & (\rho_T^\vee)_*(\widehat{h}_x)\,, \\ f_x \cdot \varphi_x & = & (\rho_T^\vee)_*(h_x \cdot \varphi_x \circ \rho_T^\vee) \end{array}$$

et

$$\widehat{f_x \cdot \varphi_x} = (\rho_T^\vee)_*\Big(\,\widehat{h_x \cdot \varphi_x \circ \rho_T^\vee}\,\Big)\,,$$

la formule annoncée se déduit de l'identité sur $T_E(F_x)$

$$\widehat{h_x \cdot \varphi_x \circ \rho_T^\vee}\,(t_x) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_E})^{-1}(t_x)} (\mathrm{pr}^1_{Z_E})^*(\widehat{h}_x) \cdot (\mathrm{pr}^2_{Z_E})^*(\widehat{\varphi_x \circ \rho_T^\vee}) \cdot \omega_{Z_E}$$

par intégration le long des fibres de

$$\rho_T^\vee : T_E(F_x) \to T(F_x)\,.$$

$\square$

L'opérateur de convolution $*_{\rho_T}$ sur $T(F_x)$ en chaque place $x \in |F|$ va maintenant permettre de construire un opérateur $*_\rho$ sur $G(F_x)$ en chaque telle place.

On a d'abord besoin de construire un schéma Z_ρ muni d'une double action de G à gauche et à droite et de trois projections équivariantes

$$\mathrm{pr}^1_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^2_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^3_{Z_\rho} : Z_\rho \to G \times G \times G\,.$$

On commence par le lemme suivant :

Lemme III.18.

(i) *Le produit*

$$G \times G \times G$$

muni de la double action diagonale de G à gauche et à droite est isomorphe sur F à

$$G \backslash [G \times (G \times G \times \{1\}) \times G]$$

où les points g de G agissent

- *sur le premier facteur G par la translation à droite $\bullet\, g$,*
- *sur $(G \times G \times \{1\})$ par convolution $g^{-1} \bullet g$,*
- *sur le dernier facteur G par la translation à gauche $g^{-1} \bullet$.*

(ii) *Soit G^{reg} l'ouvert dense de G défini sur F constitué des points g de G dont le commutateur $C_G(g)$ est isomorphe sur $\overline{F}$ au tore maximal T de G.*
Alors la variété munie de la double action de G

$$G \backslash [G \times (G \times G^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G]$$

s'identifie à un ouvert dense de $G \times G \times G$, et elle est isomorphe sur $\overline{F}$ à

$$N_G(T) \backslash [G \times (G \times T^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G]$$

où T^{reg} est l'ouvert dense $T \cap G^{\mathrm{reg}}$ de T, et $N_G(T) \cong T \rtimes W_G$ est le normalisateur de T dans G.

$\square$

On a d'autre part :

Lemme III.19.

Supposons que G est déployé sur F ou, plus généralement, que la F-algèbre séparable E associée à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$ admet une décomposition en produit de corps

$$E = \prod_{1 \le i \le e} E_i^{m_i}$$

qui est "bien disposée" pour ρ au sens de la définition II.13.

Alors la variété Z_{ρ_T} munie des trois projections

$$\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} = Z_{\rho_T} \to \overline{T}$$

est également munie d'une action naturelle de W_G et donc de $T \rtimes W_G \cong N_G(T)$ qui est définie sur F.

Démonstration :

Par définition, Z_{ρ_T} est le schéma affine normal quotient par l'action de $T_\rho \subset T_E$ du schéma affine lisse

$$Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$$

défini par l'équation $x_1 + x_2 = x_3$.

L'isomorphisme Γ_F-équivariant

$$\widehat{T}_E = (\mathbb{C}^\times)^r$$

définit un isomorphisme sur $\overline{F}$

$$\overline{T}_E \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^1)^r$$

tel que l'action induite de Γ_F sur $(\mathbb{A}^1)^r$ se fasse par permutation des facteurs.

Or, comme on a vu dans le lemme II.14, le groupe de Weyl W_G muni de l'action de Γ_F s'identifie à un sous-groupe de $W_{E,\rho} \subset W_E \subset \mathfrak{S}^r$. Via l'isomorphisme $\overline{T}_E \cong (\mathbb{A}^1)^r$ sur $\overline{F}$, le sous-schéma fermé $Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$ s'identifie au sous-schéma fermé Z_r de $(\mathbb{A}^1)^r \times (\mathbb{A}^1)^r \times (\mathbb{A}^1)^r$ défini par la même équation $x_1 + x_2 = x_3$, et il est stable par l'action diagonale du groupe symétrique $\mathfrak{S}^r$.

D'où la conclusion. □

On peut maintenant poser :

Définition III.20.

Supposons comme ci-dessus que G est déployé sur F ou, plus généralement, que la F-algèbre séparable E associée à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$ admet une décomposition

$$E = \prod_{1 \leq i \leq e} E_i^{m_i}$$

qui est "bien disposée" pour ρ au sens de la définition II.13.

Alors on notera Z_ρ le schéma au-dessus de l'ouvert dense

$$G \backslash [G \times (G \times G^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G]$$

de $G \times G \times G$, que l'isomorphisme sur $\overline{F}$

$$G \backslash [G \times (G \times G^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G] \xrightarrow{\sim} N_G(T) \backslash [G \times (G \times T^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G]$$

transforme en

$$N_G(T) \backslash \left[G \times \left((\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}})^{-1}(T) \cap (\mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}})^{-1}(T^{\mathrm{reg}}) \cap (\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}})^{-1}(1) \right) \times G \right].$$

Remarque :

Le schéma Z_{ρ_T} au-dessus de $\overline{T} \times \overline{T} \times \overline{T}$ est l'adhérence schématique de son ouvert image réciproque de $T \times T \times T$ ou même $T \times T^{\mathrm{reg}} \times T$.

De plus, comme il est T-équivariant, il est entièrement déterminé par sa fibre au-dessus de $T \times T^{\mathrm{reg}} \times \{1\}$. □

Voici les propriétés essentielles de Z_ρ :

Proposition III.21.

Sous les hypothèses de la définition III.20 *, on a :*

(i) *Le schéma Z_ρ est bien défini sur F.*

(ii) *Il est muni d'une double action de G à gauche et à droite et d'une triple projection équivariante*

$$(\mathrm{pr}^1_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^2_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^3_{Z_\rho}) : Z_\rho \to G \times G \times G\,,$$

toutes bien définies sur F.

(iii) *Sa restriction au-dessus de $G \times T \times T$ se factorise à travers $T \times T \times T$.*
Plus généralement, pour tout tore maximal T' de G, sa restriction au-dessus de $G \times T' \times T'$ sa factorise à travers $T' \times T' \times T'$.

(iv) *Sa restriction au-dessus de $G \times B \times B$ se factorise à travers $B \times B \times B$.*
Plus généralement, pour tout sous-groupe parabolique P de G, sa restriction au-dessus de $G \times P \times P$ se factorise à travers $P \times P \times P$.

Démonstration :

(i) Au-dessus de $\overline{F}$, Z_ρ s'identifie au quotient par T_ρ de

$$\begin{aligned} & (T_E \rtimes W_G)\backslash \left[G \times \left((\mathrm{pr}^1_{Z_E})^{-1}(T_E) \cap (\mathrm{pr}^2_{Z_E})^{-1}(T^{\mathrm{reg}}) \cap (\mathrm{pr}^3_{Z_E})^{-1}(T_\rho)\right) \times G\right] \\ \cong\ & (T_r \rtimes W_G)\backslash \left[G \times \left((\mathrm{pr}^1_{Z_r})^{-1}(T_r) \cap (\mathrm{pr}^2_{Z_r})^{-1}(T^{\mathrm{reg}}) \cap (\mathrm{pr}^3_{Z_r})^{-1}(T_\rho)\right) \times G\right] \end{aligned}$$

où T_ρ est considéré comme un sous-tore de $T_r = \mathbb{G}_m^r$.
L'action de Γ_F sur $T_r = \mathbb{G}_m^r$ par permutation des facteurs est compatible avec celle sur W_G, et elle respecte le sous-schéma fermé $Z_r \hookrightarrow \overline{T}_r \times \overline{T}_r \times \overline{T}_r$ ainsi que le sous-tore T_ρ.
Ainsi, Z_ρ est muni sur $\overline{F}$ d'une action naturelle de Γ_F qui définit sur lui une structure F-rationnelle.

(ii) est évident sur la construction.

(iii) Il suffit de prouver que la restriction de Z_ρ au-dessus de $G \times T' \times \{1\}$ se factorise à travers $T' \times T' \times \{1\}$.
Si $T' = T$, cela résulte de la définition de Z_ρ.
Si T' est général, cela résulte de ce que T' est conjugué de T sur $\overline{F}$.

(iv) Il suffit de prouver que la restriction de Z_ρ au-dessus de $G \times P \times \{1\}$ se factorise à travers $P \times P \times \{1\}$.
Or, tout élément de l'ouvert dense $P^{\mathrm{reg}} = P \cap G^{\mathrm{reg}}$ de P est conjugué à un élément de T^{reg} via un élément de P. D'où la conclusion.

□

On rappelle que la dimension de Z_{ρ_T} est

$$\dim Z_{\rho_T} = 2 \dim T_E - \dim T_\rho = \dim T_E + \dim T$$

si bien que les trois projections équivariantes

$$\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} : Z_{\rho_T} \to T$$

ont pour dimension relative

$$\dim Z_{\rho_T} - \dim T = \dim T_E = r\,.$$

On en déduit :

Corollaire III.22.

Sous les hypothèses de la définition III.20, *le schéma Z_ρ a pour dimension*

$$\dim Z_\rho = r + 2 \dim G - \dim T$$

et les trois projections équivariantes

$$\mathrm{pr}^1_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^2_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^3_{Z_\rho} : Z_\rho \to G$$

ont pour dimension relative

$$\dim\, Z_\rho - \dim\, G = r + \dim\, G - \dim\, T = \dim G + \dim T_\rho\,.$$

□

Rappelons maintenant que le schéma équivariant

$$Z_{\rho_T} \to \overline{T} \times \overline{T} \times \overline{T}$$

est muni d'une forme différentielle algébrique

$$\omega_{\rho_T} \in \Omega^r_{Z_{\rho_T}}/\overline{T}$$

relative à la troisième projection

$$\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} : Z_{\rho_T} \to \overline{T}$$

et de degré maximal $r = \dim Z_{\rho_T} - \dim\, T$.

Le tore T agit sur cette forme différentielle relative ω_{ρ_T} par le caractère $\det_G : T \to \mathbb{G}_m$.

On peut poser :

Définition III.23.

Sous les hypothèses de la définition III.20*, on notera*

$$\omega_\rho \in \Omega^{r\,+\,\dim G\,-\,\dim T}_{Z_\rho/G}$$

la forme différentielle (uniquement déterminée à multiplication près par une constante) relative à la troisième projection

$$\mathrm{pr}^3_{Z_\rho} : Z_\rho \to G$$

et de degré maximal

$$\dim\, Z_\rho - \dim\, G = r + \dim\, G - \dim\, T$$

telle que :

- *l'action de G à gauche ou à droite sur Z_ρ transforme ω_ρ par le caractère* $\det_G \cdot \det_B = \det_\rho$,
- *en particulier, ω_ρ est invariante par conjugaison par G,*
- *au-dessus de $G \times G^{\mathrm{reg}} \times \{1\} \subset G \times G \times G$, où la fibre $(\mathrm{pr}^3_{Z_\rho})^{-1}(1) \subset Z_\rho$ est isomorphe à*

$$N_G(T)\backslash \left[(\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}})^{-1}(1) \times \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_1\, g_2 = 1\}\right]\,,$$

  la forme différentielle relative ω_ρ est le produit de

$$\omega_{\rho_T} \in \Omega^r_{Z_{\rho_T}}/\overline{T}$$

  et d'une forme différentielle algébrique invariante de degré maximal de

$$N_G(T)\backslash\, \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_1\, g_2 = 1\} \cong N_G(T)\backslash G\,.$$

□

Le schéma Z_ρ au-dessus de $G\times G\times G$ et la forme différentielle ω_ρ sur Z_ρ relative à la projection $\mathrm{pr}^3_{Z_\rho}: Z_\rho \to G$ permettent de définir un opérateur de "ρ-convolution" sur $G(F_x)$ en toute place x de F :

Définition III.24.

Sous les hypothèses de la définition III.20*, considérons une place arbitraire* $x\in|F|$.

On appellera "produit de ρ*-convolution" de deux fonctions*

$$f_x, \varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

et on notera

$$f_x *_\rho \varphi_x : G(F) \to \mathbb{C}$$

la fonction définie par l'intégrale

$$(f_x *_\rho \varphi_x)(g) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_\rho})^{-1}(g)} (\mathrm{pr}^1_{Z_\rho})^*(f_x)\cdot(\mathrm{pr}^2_{Z_\rho})^*(\varphi_x)\cdot\omega_\rho\,,\quad g\in G(F_x)\,,$$

quand celle-ci est bien définie.

Remarque :

Le produit $f_x *_\rho \varphi_x$ sera défini plus généralement si

- φ_x est une fonction (ou même une distribution) qui s'écrit comme limite, en un sens approprié, de suites de fonctions
$$\varphi_n : G(F_x)\to\mathbb{C}\,,\quad n\in\mathbb{N}\,,$$
telles que les intégrales
$$(f_x *_\rho \varphi_x)(\bullet) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_\rho})^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}^1_{Z_\rho})^*(f_x)\cdot(\mathrm{pr}^2_{Z_\rho})^*(\varphi_n)\cdot\omega_\rho$$
soient bien définies,
- les suites de fonctions
$$f_x *_\rho \varphi_n : G(F_x)\to\mathbb{C}$$
convergent en un sens approprié vers une fonction
$$f_x *_\rho \varphi_x : G(F_x)\to\mathbb{C}$$
qui ne dépend pas de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée. □

Nous pouvons maintenant poser :

Conjecture III.25.

Supposons toujours que G *est déployé sur* F *ou, plus généralement, que la* F*-algèbre séparable* E *associée à l'action de* Γ_F *sur* $\{1,2,\dots,r\}$ *admet une décomposition*

$$E = \prod_{1\le i\le e} E_i^{m_i}$$

qui est "bien disposée" pour ρ *au sens de la définition* II.13.

Alors, en toute place $x\in|F|$*, il existe un unique opérateur de* ρ*-transformation de Fourier sur* $G(F_x)$ *de la forme du lemme* I.3

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g\cdot f_x(g)\cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) *Il est compatible avec l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ déjà défini*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet)$$

via l'opérateur de passage aux termes constants

$$f_x \mapsto |\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B}(\bullet) = |\det_B(\bullet)\,\delta_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(\bullet\, u)\,.$$

(2) *Il préserve le produit hermitien*

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}$$

et définit donc un automorphisme unitaire de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ pour la mesure $d_\rho\, g$.

(3) *Il transforme l'opérateur de multiplication point par point des fonctions sur $G(F_x)$*

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 \cdot f_2$$

en l'opérateur de ρ-convolution de la définition III.24

$$(f_x, \varphi_x) \mapsto f_x *_\rho \varphi_x$$

(quitte à modifier la forme différentielle ω_ρ qui définit $*_\rho$ par une constante multiplicative uniquement déterminée).

Remarque :

Si un opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f_x}(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

vérifie les propriétés (1) et (2) ci-dessus, alors son opérateur de convolution associée (défini comme le transformé par $f_x \mapsto \widehat{f_x}$ de la multiplication point par point des fonctions) est nécessairement égal à l'opérateur

$$(f_x, \varphi_x) \mapsto f_x *_\rho \varphi_x$$

de la définition III.24 s'il stabilise le tore maximal $T(F_x)$ de $G(F_x)$ au sens que le support $Z \subset G(F_x) \times G(F_x) \times G(F_x)$ de la distribution qui le définit vérifie la propriété

$$Z \cap (G(F_x) \times T(F_x) \times T(F_x)) \subset T(F_x) \times T(F_x) \times T(F_x)\,.$$

Cela résulte en effet de la propriété (1) de compatibilité avec le passage aux termes constants.

Pour la démonstration de la conjecture :

Si x est une place archimédienne, toute représentation irréductible de $G(F_x)$ est un sous-quotient d'une représentation induite par un caractère du tore $T(F_x)$.

Il en résulte qu'il existe un unique opérateur de ρ-transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f_x}$ sur $G(F_x)$ qui soit compatible avec les translations à gauche et à droite au sens que

$$\widehat{f_x^g} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot {}^{g^{-1}}\widehat{f}_x \, ,$$
$$\widehat{{}^g f_x} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{g^{-1}} \, ,$$

et qui vérifie la propriété (1) de compatibilité avec le passage aux termes constants.

De plus, cet opérateur est unitaire puisque la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ est unitaire.

Il reste donc seulement à démontrer que son opérateur de convolution associé n'est autre que $*_\rho$ et, pour cela, qu'il stabilise le tore $T(F_x)$ de $G(F_x)$.

Si x est une place ultramétrique, notons $L^2(G(F_x))$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ pour la mesure $d_\rho\, g$, et $L^2(G(F_x))^{\rm tor}$ le sous-espace de Hilbert défini comme l'adhérence dans $L^2(G(F_x))$ de l'espace des fonctions localement constantes à support compact

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations induites de caractères du tore $T(F_x)$.

On dispose de l'opérateur de projection orthogonale

$$\begin{array}{rcl} L^2(G(F_x)) & \to & L^2(G(F_x))^{\rm tor} \, , \\ f_x & \mapsto & f_x^{\rm tor} \, . \end{array}$$

Il commute avec les translations à gauche et à droite.

On remarque que l'opérateur de ρ-transformation de Fourier recherché

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

doit nécessairement préserver le sous-espace $L^2(G(F_x))^{\rm tor}$ de $L^2(G(F_x))$ et commuter avec le projecteur $f_x \mapsto f_x^{\rm tor}$.

De plus, la propriété (1) signifie que sa restriction au sous-espace $L^2(G(F_x))^{\rm tor}$ est déjà entièrement déterminée. C'est un opérateur unitaire puisque la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ est unitaire.

Pour déterminer entièrement l'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$, il suffit de connaître son action sur les fonctions de la forme

$$f_1 \cdot f_2$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions localement constantes à support compact sur $G(F_x)$ telles que $f_1^{\rm tor} = f_1$ et $f_2^{\rm tor} = f_2$, c'est-à-dire dont les décompositions spectrales ne font apparaître que des représentations de $G(F_x)$ induites de caractères du tore $T(F_x)$. En effet, ces produits suffisent à engendrer tout le spectre de $G(F_x)$.

Or on doit nécessairement avoir

$$\widehat{f_1 \cdot f_2} = \widehat{f}_1 *_\rho \widehat{f}_2$$

où $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ et donc aussi $\widehat{f}_1 *_\rho \widehat{f}_2$ sont déjà déterminées.

Ainsi, on a montré la propriété d'unicité de la conjecture.

Pour la propriété d'existence, il faudra probablement recourir aux fonctions unitaires

$$\mathbb{I}^G_{\chi, c_x} : G(F_x) \hookrightarrow \overline{G}(F_x) \to (N_B^{\rm op} \backslash \overline{G} / N_B)(F_x) \to U(1) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

qui seront introduites et étudiées dans le chapitre IV.

L'invariance de ces fonctions par $N_B(F_x)$ ou $N_B^{\rm op}(F_x)$ implique que leurs ρ-transformées de Fourier $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi, c_x}}$ sont bien définies a priori en tant que formes linéaires se factorisant à travers l'homomorphisme

$$f_x \mapsto f_x^{\rm tor} \mapsto \widehat{f_x^{\rm tor}} = \widehat{f}_x^{\rm tor}$$

sur l'espace des fonctions $f_x \in L^2(G(F_x))$ telles que la fonction $\widehat{f_x^{\rm tor}} = \widehat{f}_x^{\rm tor}$ est intégrable sur $G(F_x)$.

$\square$