Exposé IV.
Sur quelques opérateurs unitaires de multiplication
(Laurent Lafforgue, IHES, 8 juillet 2014)

1 Des fonctions unitaires sur les tores quotients

On considère toujours le groupe réductif G quasi-déployé sur F, muni de la paire de Borel (T, B), du caractère $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$ et d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

On suppose que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base, et on note E la F-algèbre séparable de degré r qui correspond à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$.

Le tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m$ admet pour dual

$$\widehat{T}_E = \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

muni de l'action de Γ_F par permutation, si bien que le morphisme Γ_F-équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un morphisme

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

qui s'inscrit dans une suite exacte de tores sur F

$$1 \to T_\rho \to T_E \to T \to 1\,.$$

On a encore introduit l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1$$

qui est une variété torique affine lisse de tore T_E.

On pose :

Définition IV.1. –

Dans la situation ci-dessus, on note $\overline{T}$ la variété torique affine normale de tore T associée au cône convexe saturé $X_{\overline{T}}^\vee$ de $X_T^\vee$ engendré par les composantes $\rho_T^i \in X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$, $1 \leq i \leq r$, du morphisme $\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$.

De manière équivalente, $\overline{T}$ est le quotient de $\overline{T}_E$ par l'action du sous-tore T_ρ de T_E.

Remarques :

(i) La variété torique $\overline{T}$ est définie sur F car la famille des ρ_T^i, $1 \leq i \leq r$, est stable par l'action de Γ_F, donc aussi le cône saturé $X_{\overline{T}}^\vee$ de $X_T^\vee$ qu'ils engendrent.

Comme la famille des ρ_T^i est également stable par l'action du groupe de Weyl W_G de G, l'action de W_G sur T se prolonge en une action sur $\overline{T}$.

(ii) L'équivalence des deux définitions de $\overline{T}$ provient de ce qu'un caractère arbitraire

$$\chi : T \to \mathbb{G}_m$$

se prolonge en un morphisme équivariant

$$\chi : \overline{T} \to \mathbb{A}^1$$

si et seulement si

$$\langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0\,, \quad 1 \leq i \leq r\,,$$

c'est-à-dire si et seulement si le caractère

$$\chi \circ \rho_T^\vee : T_E \to T \to \mathbb{G}_m$$

se prolonge en un morphisme

$$\chi \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E \to \mathbb{A}^1\,.$$

□

On note $X_{\overline{T}} \subset X_T$ le cône saturé dual de $X_{\overline{T}}^\vee \subset X_T^\vee$ composé des caractères

$$\chi : T \to \mathbb{G}_m$$

qui se prolongent en un morphisme équivariant

$$\chi : \overline{T} \to \mathbb{A}^1\,.$$

On a :

Lemme IV.2. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, notons E_χ le corps, extension finie séparable de F, qui correspond à l'orbite finie de χ sous l'action du groupe de Galois Γ_F.

Alors :

(i) *Pour tout tel χ, on a un morphisme de tores sur F induit par χ et ses transformés par Γ_F*

$$\chi_F : T \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{G}_m\,,$$

et il se prolonge en un morphisme équivariant

$$\chi_F : \overline{T} \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1$$

de variétés toriques sur F.

(ii) *Si χ décrit un ensemble fini de générateurs du cône saturé $X_{\overline{T}} \subset X_T$, alors le morphisme produit*

$$\prod_\chi \chi_F : \overline{T} \to \prod_\chi \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1$$

est une immersion fermée. □

Si χ est un caractère de $X_{\overline{T}} \subset X_T$, on dispose donc en toute place x de l'application équivariante induite

$$\chi_F : \overline{T}(F_x) \to (\mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1)(F_x) = E_\chi \otimes_F F_x = E_{\chi,x}\,.$$

On dispose d'autre part du morphisme de trace

$$\mathrm{Tr} : E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x \to F_x\,,$$

de la composante

$$\psi_x : F_x \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

du caractère

$$\psi : \mathbb{A}_F/F \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,,$$

et des endomorphismes linéaires

$$\begin{array}{rcl} E_{\chi,x} & \to & E_{\chi,x} \\ a_x & \mapsto & c_x \cdot a_x \end{array}$$

de multiplication par des éléments $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Cela permet de poser la définition suivante :

Définition IV.3. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$ et pour toute place $x \in |F|$, on appellera χ-fonctions unitaires sur $\overline{T}(F_x)$,

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,,$$

les fonctions

$$\overline{T}(F_x) \ni t \mapsto \psi_x\left(\mathrm{Tr}\left(c_x \cdot \chi_F(t)\right)\right)$$

indexées par les éléments $c_x \in F_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Autrement dit, ce sont les fonctions composées

$$\overline{T}(F_x) \xrightarrow{\chi_F} E_{\chi,x} \xrightarrow{c_x\cdot\bullet} E_{\chi,x} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} F_x \xrightarrow{\psi_x} U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,.$$

□

On a :

Proposition IV.4. –

Soit x une place ultramétrique de F.

Alors les opérateurs de multiplication par les χ-fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,, \quad \chi \in X_{\overline{T}}\,, \quad c_x \in E_{\chi,x}\,,$$

préservent l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$.

Remarque :

Réciproquement, on pourrait montrer que pour toute ρ_T-fonction non nulle

$$f_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

et si χ décrit une famille de générateurs du cône saturé $X_{\overline{T}}$, alors l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ est le plus petit espace de fonctions

$$T(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui :

- contient la fonction f_x,
- est stable par les translations,
- est stable par la ρ_T-transformation de Fourier et son inverse,
- est stable par les opérateurs de multiplication par les χ-fonctions unitaires $\mathbb{I}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1)$, $c_x \in E_{\chi,x}$.

Démonstration de la proposition :

Par définition, les ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ sont les combinaisons linéaires de translatées par des éléments de $T(F_x)$ de fonctions images directes

$$\varphi_x = (\varphi_T^\vee)_* \, f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de fonctions localement constantes à support compact

$$f_x : \overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x \to \mathbb{C} \, .$$

Or, comme chaque

$$\chi_F : \overline{T}(F_x) \to E_{\chi,x}$$

est équivariant, l'ensemble des χ-fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1)$$

est stable par translation par les éléments de $T(F_x)$.

Il suffit donc de prouver que si

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_* \, f_x$$

est l'image directe d'une fonction localement constante à support compact

$$f_x : \overline{T}_E(F_x) \to \mathbb{C} \, ,$$

alors les produits $\varphi_x \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x}$ sont encore des ρ_T-fonctions. Mais ceci résulte de ce que

$$\varphi_x \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x} = (\rho_T^\vee)_* \, (f_x \cdot (\mathbb{I}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee))$$

où la fonction composée

$$\mathbb{I}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E(F_x) \xrightarrow{\rho_T^\vee} \overline{T}(F_x) \xrightarrow{\mathbb{I}_{\chi,c_x}} U(1)$$

est localement constante et le produit $f_x \cdot (\mathbb{I}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)$ est localement constant à support compact.

$\square$

Considérons maintenant les transformées de Fourier $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$ des fonctions unitaires $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ sur $\overline{T}(F_x)$. Elles sont définies en le sens suivant :

Définition IV.5. –

Pour toute fonction mesurable bornée

$$\varphi_x : T(F_x) \to \mathbb{C} \, ,$$

sa ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{\varphi}_x$ est bien définie en tant que forme linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(f_x)$$

sur l'espace des fonctions de carré intégrable f_x dont la ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{f_x}$ est intégrable sur $T(F_x)$.

Elle est caractérisée par la formule

$$\widehat{\varphi}_x(f_x) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot \widehat{f_x}(t)$$

pour toute fonction f_x de carré intégrable et intégrable sur $T(F_x)$.

Remarque :

Si

$$\mathbb{1}_x : \overline{T}(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une fonction continue à support compact qui vaut 1 dans un voisinage du point $0 \in \overline{T}(F_x)$, on a

$$\widehat{\varphi}_x(f_x) = \lim_{a \mapsto 0} \int_{G(F_x)} d_\rho \, g \cdot \widehat{(\varphi_x \cdot \mathbb{1}_x(a \cdot \bullet))}\,(g) \cdot f_x(g)$$

pour toute fonction f_x comme dans l'énoncé. $\square$

On a :

Lemme IV.6. –

Considérons un caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$, une place arbitraire $x \in |F|$, un élément $c_x \in E_{\chi,x}$, la χ-fonction unitaire

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}$$

et sa ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$ au sens ci-dessus, et enfin la fonction unitaire composée

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E(F_x) = E_x \to \overline{T}(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

et sa ρ_E-transformée de Fourier $\widehat{(\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)}$.

Alors :

(i) *La forme linéaire $\widehat{(\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)}$ est invariante par l'action du sous-tore $T_\rho(F_x)$ de $T_E(F_x)$.*

(ii) *Pour toute fonction de carré intégrable f_x sur $T_E(F_x)$ dont la ρ_E-transformée de Fourier est intégrable et dont l'image directe par ρ_T*

$$(\rho_T^\vee)_* \, f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

est bien définie et de carré intégrable sur $T(F_x)$, la ρ_T-transformée de Fourier de celle-ci est intégrable et on a

$$\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}\,((\rho_T^\vee)_* \, f_x) = \widehat{(\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)}\,(f_x)\,.$$

Remarque :

La propriété (ii) ne détermine la distribution $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$ que sur l'image de $T_E(F_x)$ dans $T(F_x)$ qui est un sous-groupe ouvert. Cette image est $T(F_x)$ tout entier si T et T_E sont déployés, mais pas en général.

Cependant, pour tout $t \in T(F_x)$, on a

$$\mathbb{I}^t_{\chi,c_x}(\bullet) = \mathbb{I}_{\chi,c_x}(\bullet\, t) = \mathbb{I}_{\chi,\chi_F(t)\cdot c_x}(\bullet)$$

et par conséquent

$$|\det_G(t)|_x^{-1} \cdot \left(\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}\right)^{t^{-1}} = \widehat{\mathbb{I}_{\chi,\chi_F(t)\cdot c_x}}\,.$$

Ainsi, la restriction de la distribution $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$ à

$$t \cdot \mathrm{Im}\,(\rho_T^\vee : T_E(F_x) \to T(F_x))$$

s'identifie à la restriction de la distribution $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,\chi_F(t)\cdot c_x}}$ à

$$\mathrm{Im}\,(\rho_T^\vee)$$

multipliée par le facteur

$$|\det_G(t)|_x\,.$$

□

On s'intéresse aux supports des distributions $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$. Rappelons d'abord le résultat général suivant sur les orbites des variétés toriques affines normales :

Lemme IV.7. –

Considérons la variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T sur le corps F. Alors :

(i) *Les orbites géométriques de $\overline{T}$ muni de l'action de T sont en nombre fini et naturellement indexées par les faces C du cône convexe polyédral saturé $X_{\overline{T}} \subset X_T$ qui définit $\overline{T}$. On les note T_C. Chaque orbite T_C est un sous-schéma localement fermé de $\overline{T}$ qui est défini sur toute extension F' de F dont le groupe de Galois $\Gamma_{F'}$ respecte la face C de $X_{\overline{T}}$.*

(ii) *Toute orbite T_C de $\overline{T}$ possède un unique "point base" en lequel tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$ prend la valeur 1 si χ est élément de la face C et la valeur 0 sinon. Ce point base 1_C est défini sur tout corps $F' \supset F$ sur lequel T_C est définie, avec alors*

$$T_C(F') = T(F') \cdot 1_C\,.$$

La dimension de l'orbite T_C est égale à celle de la face correspondante C de $X_{\overline{T}}$.

(iii) *Une orbite T_C est contenue dans l'adhérence $\overline{T}_{C'}$ d'une orbite $T_{C'}$ si et seulement si C est contenue dans C' et donc est une face de celle-ci.*

□

Prouvons maintenant :

Proposition IV.8. –

On considère un caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, une place $x \in |F|$, un élément $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$ et une face C de $X_{\overline{T}}$ telle que :

- *C est définie sur F_x,*
- *C contient l'ensemble des images $\sigma(\chi)$ de χ par un élément $\sigma \in \Gamma_F$ telles que la coordonnée correspondante de c_x ne soit pas nulle.*

Alors, considérant les fonctions de carré intégrable

$$f_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

dont la ρ_T-transformée de Fourier est intégrable, on a

$$\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}(f_x) = 0$$

dès que f_x est supportée par une partie compacte de $\overline{T}(F_x)$ qui ne rencontre pas la strate $\overline{T}_C(F_x)$.

Démonstration :

Pour tout élément $t \in T(F_x)$, on peut considérer la fonction unitaire

$$\mathbb{I}_{\chi,\chi_F(t)\cdot c_x} \circ \rho_T^\vee = \mathbb{I}_{\chi\circ\rho_T^\vee,\chi_F(t)\cdot c_x}$$

sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x = E \otimes_F F_x$. Elle est associée au caractère

$$\chi \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E \to \overline{T} \to \mathbb{A}^1 \,.$$

D'après le lemme IV.6 et la remarque qui le suit, on a

$$\text{support}\left(\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}\right) = \bigcup_{t\in T(F_x)/\mathrm{Im}(\rho_T^\vee)} t\cdot(\rho_T^\vee)_* \left(\text{support}\left(\widehat{\mathbb{I}_{\chi\circ\rho_T^\vee,\chi_F(t)\cdot c_x}}\right)\right).$$

D'autre part, $X_{\overline{T}}$ est par définition le dual du cône convexe polyédral de $X_T^\vee$ engendré par les $\rho_T^i \in X_T^\vee = X_{\overline{T}}$, $1 \le i \le r$.

Notons I le sous-ensemble de $\{1,2,\dots,r\}$ constitué des indices i tels que $\langle \chi', \rho_T^i\rangle = 0$, $\forall\, \chi' \in C$. Ce sous-ensemble est stable par l'action de Γ_{F_x} et il définit C au sens que

$$C = \left\{\chi' \in X_{\overline{T}} \mid \langle \chi', \rho_T^i\rangle = 0\,, \quad \forall\, i \in I\right\}.$$

Pour tout $\chi' \in C$, le caractère composé

$$\chi' \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E \to \overline{T} \to \mathbb{A}^1$$

est un monôme de la forme

$$Z_1^{m_1} \dots Z_r^{m_r}\,,$$

avec

$$m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{N}$$

et

$$m_i = 0\,, \quad \forall\, i \in I\,.$$

Donc les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi\circ\rho_T^\vee,\chi_F(t)\cdot c_x} : \overline{T}_E(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}$$

ne dépendent que des coordonnées Z_i de $\overline{T}_E(F_x)$ d'indices $i \notin I$, et leurs transformées de Fourier sur $\overline{T}_E(F_x)$

$$\widehat{\mathbb{I}_{\chi\circ\rho_T^\vee,\chi_F(t)\cdot c_x}}$$

sont supportées par le sous-espace défini par les équations

$$Z_i = 0 \,, \quad \forall \, i \in I \,.$$

D'où la conclusion. $\square$

Enfin, nous souvenant que les ψ_x, $x \in |F|$, sont les composantes d'un caractère global

$$\psi = \prod_x \psi_x : \mathbb{A}_F \to \mathbb{A}_F / F \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times \,,$$

on peut compléter la définition IV.3 par la définition globale suivante :

Définition IV.9. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, on appellera χ-fonctions unitaires sur $\overline{T}(\mathbb{A}_F)$

$$\mathbb{1}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}_F) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times \,,$$

les fonctions

$$\overline{T}(\mathbb{A}_F) \ni t \mapsto \psi \left(\mathrm{Tr} \left(c \cdot \chi_F(t) \right) \right)$$

indexées par les éléments $c = (c_x)_{x \in |F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi} = E_\chi \otimes_F \mathbb{A}_F = \prod\limits_{x \in |F|} E_{\chi,x}$.

Autrement dit, ce sont les fonctions composées

$$\overline{T}(\mathbb{A}_F) \xrightarrow{\chi_F} E_\chi \otimes_F \mathbb{A}_F \xrightarrow{c \cdot \bullet} E_\chi \otimes_F \mathbb{A}_F \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{A}_F \xrightarrow{\psi} U(1) \subset \mathbb{C}^\times \,.$$

Remarque :

Comme le caractère ψ vaut 1 sur les éléments du sous-groupe discret F de $\mathbb{A}_F$ et que le morphisme $\mathrm{Tr} : E_\chi \otimes_F \mathbb{A}_F \to \mathbb{A}_F$ envoie E_χ dans F, on voit que si $c \in E_\chi$, la fonction unitaire

$$\mathbb{1}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}_F) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

prend la valeur 1 en tous les points de $\overline{T}(F)$. $\square$

La remarque qui suit cette définition rend vraisemblable le résultat suivant :

Proposition IV.10. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$, les opérateurs de multiplication par les χ-fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c} = \prod_{x \in |F|} \mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(\mathbb{A}_F) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times \,, \quad c = (c_x)_{x \in |F|} \in \mathbb{A}_{E_{\chi'}}$$

vérifient les propriétés suivantes :

(i) *Ils stabilisent l'espace des ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A}_F)$.*

(ii) *Lorsque $c \in E_\chi$, ils laissent invariante la fonctionnelle de Poisson*

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”}$$

sur l'espace des ρ_T-fonctions globales f sur $T(\mathbb{A}_F)$.

Démonstration :

(i) On sait déjà que l'opérateur de multiplication par $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ respecte l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ en toute place $x \in |F|$.

En effet, en les places ultramétriques, c'est le contenu de la proposition IV.4. Et, en les places archimédiennes, l'espace des ρ_T-fonctions est redéfini pour que cela soit vrai.

On conclut en remarquant que, en presque toute place ultramétrique x non ramifiée pour T et ρ_T, la fonction $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ vaut 1 sur le support $\overline{T}(O_x)$ de la ρ_T-fonction standard en cette place.

(ii) Cela résulte du lemme suivant :

Lemme IV.11. –

Pour toute ρ-fonction f sur $T(\mathbb{A})$, on peut écrire

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{T}(F)} f(\gamma)\text{”} = \sum_{\gamma\in T(F)} f(\gamma) + \sum_{\substack{k\geq 1\\ C_1,C_2,\ldots,C_k}} \sum_{\gamma\in T_{C_k}(F)} f_{C_1,C_2,\ldots,C_k}(\gamma)$$

où :

- *les $C_1, C_2, \ldots, C_k$ décrivent les chaînes de faces définies sur F du cône convexe polyédral $C_0 = X_{\overline{T}}$ telles que, pour $1 \leq i \leq k$, C_i est une face de codimension 1 de C_{i-1},*
- *chaque $f_{C_1,C_2,\ldots,C_k}$ est une fonction continue sur la strate $T_{C_k}(\mathbb{A})$ qui se déduit de la fonction $f_{C_1,C_2,\ldots,C_{k-1}}$ sur $T_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$ par un certain opérateur linéaire,*
- *pour tout point $t \in T_{C_k}(\mathbb{A})$, la valeur de la fonction $f_{C_1,\ldots,C_k}$ en le point t ne dépend que de la restriction de la fonction $f_{C_1,\ldots,C_{k-1}}$ à des voisinages arbitrairement petits de t dans $\overline{T}_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$.*

Principe de démonstration :

On utilise le calcul de

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{T}(F)} f(\gamma)\text{”}$$

à partir de la décomposition spectrale de la fonction

$$T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto \sum_{\gamma\in T(F)} f(t\cdot\gamma)\,.$$

La formation des termes $f_{C_1,C_2,\ldots,C_k}$ vient de calculs de résidus successifs. □

Fin de la démonstration de la proposition IV.10(ii) :

Si F est un corps de fonctions, la fonction $\mathbb{I}_{\chi,c}$ vaut 1 au voisinage de tout point rationnel $\gamma \in \overline{T}(F)$.

On déduit alors du lemme, en procédant par récurrence sur k, que les fonctions $f_{C_1,\ldots,C_k}$ et $(\mathbb{I}_{\chi,c}\cdot f)_{C_1,\ldots,C_k}$ coïncident dans un voisinage suffisamment petit de tout point rationnel $\gamma \in \overline{T}_{C_k}(F)$.

Si F est un corps de nombres, on doit s'intéresser en plus à l'ordre du pôle des fonctions analytiques pour lesquelles un calcul de résidu en ce pôle définit l'opérateur

$$f_{C_1,C_2,\ldots,C_{k-1}} \mapsto f_{C_1,C_2,\ldots,C_k}\,.$$

Notons I l'ensemble des indices i, $1 \leq i \leq r$, tels que le cocaractère $\rho_T^i \in X_T^\vee$ ne s'annule pas sur la face C_{k-1} de $X_{\overline{T}} \subset X_T$ mais s'annule sur la face $C_k \subset C_{k-1}$.

Cet ensemble I est stable par l'action du groupe de Galois Γ_F, et l'ordre m des pôles considérés est égal au nombre d'orbites de Γ_F dans I.

Considérons la restriction de χ à la strate $\overline{T}_{C_{k-1}}$ de $\overline{T}$.

Si cette restriction est 0, la fonction $\mathbb{1}_{\chi,c}$ vaut uniformément 1 sur $\overline{T}_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$ et l'opérateur

$$f_{C_1,\ldots,C_{k-1}} \mapsto f_{C_1,\ldots,C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{1}_{\chi,c}$.

Si au contraire la restriction de χ à $\overline{T}_{C_{k-1}}$ n'est pas nulle,

$$t \cdot 1_{C_{k-1}} \mapsto \chi\,(t \cdot 1_{C_{k-1}})$$

est un caractère du tore $T_{C_{k-1}}$ quotient de T, et tous les entiers $\langle \chi, \rho_T^i \rangle$, $i \in I$, sont égaux.

S'ils valent tous 0, la fonction $\mathbb{1}_{\chi,c}$ ne dépend pas de la coordonnée qui définit T_{C_k} dans $\overline{T}_{C_{k-1}}$, si bien que l'opérateur

$$f_{C_1,\ldots,C_{k-1}} \mapsto f_{C_1,\ldots,C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{1}_{\chi,c}$.

Sinon, la fonction $\mathbb{1}_{\chi,c_x}$ en chaque place x est le composé du caractère additif $\psi_x \circ \mathrm{Tr}$ et d'un caractère multiplicatif dont la dépendance en la coordonnée Z qui définit T_{C_k} dans $\overline{T}_{C_{k-1}}$ est de la forme

$$Z \mapsto Z^{m'} \quad \text{avec} \quad m' \geq m\,.$$

En les places ultramétriques, et comme dans le cas des corps de fonctions, la fonction $\mathbb{1}_{\chi,c_x}$ ne dépend plus de la coordonnée Z si Z devient assez petit.

En les places archimédiennes, le premier terme non constant dans le développement en Z de la fonction $\mathbb{1}_{\chi,c_x}$ est d'ordre m' qui est au moins égal à l'ordre m du pôle en lequel sont calculés les résidus. Donc l'opérateur

$$f_{C_1,\ldots,C_{k-1}} \mapsto f_{C_1,\ldots,C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{1}_{\chi,c}$.

Comme $\mathbb{1}_{\chi,c}(\gamma) = 1$, $\forall\, \gamma \in \overline{T}(F)$, cela termine la démonstration également dans le cas où F est un corps de nombres.

□

2 Des fonctions unitaires sur les semi-groupes

On commence par la définition générale suivante :

Définition IV.12. –

Étant donné un groupe réductif G sur un corps k, un semi-groupe $\overline{G}$ de groupe G est une variété affine intègre qui contient G comme ouvert dense et telle que le morphisme de multiplication $G \times G \to G$ se prolonge en

$$\overline{G} \times \overline{G} \to \overline{G}\,.$$

On a les résultats classiques :

Proposition IV.13. –

Soit un groupe réductif quasi-déployé sur un corps k, muni d'une paire de Borel (T,B) définie sur k.

(i) *Se donner un semi-groupe géométriquement normal $\overline{G}$ de groupe G sur k équivaut à se donner, dans le réseau X_T des caractères de T, un cône polyédral saturé $X_{\overline{T}}$ stable par l'action du groupe de Weyl W_G et par celle du groupe de Galois Γ_k ou, ce qui revient au même, son cône dual $X_{\overline{T}}^\vee$ dans le réseau $X_T^\vee$ des cocaractères de T.*

(ii) *Dans la correspondance de* (i), *la variété torique affine géométriquement normale $\overline{T}$ de tore T qui est associée au cône polyédral saturé $X_{\overline{T}}$ s'identifie à l'adhérence schématique de T dans $\overline{G}$.*

(iii) *Dans la correspondance de* (i), *et si N_B et $N_{B^{\mathrm{op}}}$ désignent les radicaux unipotents de B et de son sous-groupe de Borel opposé B^{op}, alors le quotient*

$$N_{B^{\mathrm{op}}}\backslash\overline{G}/N_B = \overline{T}^+ \,,$$

muni de l'action du tore T à gauche ou à droite, est la variété torique affine géométriquement normale associée au cône saturé

$$X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$$

constitué des caractères de $X_{\overline{T}}$ qui sont dominants, c'est-à-dire vérifient les inégalités

$$\langle \chi, \alpha\rangle \geq 0 \,, \qquad \forall\, \alpha \in \Delta_B \,.$$

$\square$

Revenons maintenant à notre groupe réductif quasi-déployé G sur le corps global F, avec sa paire de Borel (T, B) définie sur F et la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \,.$$

On suppose toujours que le groupe de Galois Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base, si bien que l'homomorphisme Γ_F-équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un homomorphisme de tores sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \to T \,.$$

Comme la famille des caractères $\rho_T^i \in X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$ est stable par la double action du groupe de Weyl W_G et du groupe de Galois Γ_F, la proposition IV.13 permet de poser :

Définition IV.14. –

Dans la situation ci-dessus, on appelle "semi-groupe dual de la représentation ρ" le semi-groupe géométriquement normal $\overline{G}$ du groupe G associé au cône saturé

$$X_{\overline{T}} = \{\chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i\rangle \geq 0 \,, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$$

de X_T.

Remarques :

(i) Cette définition avait déjà été introduite par Braverman et Kazhdan, en des termes différents mais équivalents.

(ii) Ainsi, le cône $X_{\overline{T}}^\vee \subset X_T^\vee$ dual de $X_{\overline{T}} \subset X_T$ est par définition le cône saturé engendré par les ρ_T^i ou, ce qui revient au même, par les orbites sous W_G des plus hauts poids des facteurs irréductibles de $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. $\square$

Rappelons que, pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, on a noté E_χ le corps, extension finie séparable de F, qui correspond à l'orbite finie de χ sous l'action du groupe de Galois Γ_F. Cela s'applique en particulier aux éléments de $X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}}$.

En remplaçant $X_{\overline{T}}$ par $X_{\overline{T}^+}$ dans l'énoncé du lemme IV.2, on obtient :

Corollaire IV.15. –

(i) *Pour tout $\chi \in X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$, on a un morphisme de tores sur F induit par χ et ses transformés par Γ_F*
$$\chi_F : T \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{G}_m\,,$$
et il se prolonge en un morphisme équivariant
$$\chi_F : N_B^{\mathrm{op}}\backslash \overline{G}/N_B = \overline{T}^+ \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1$$
de variétés toriques sur F.

(ii) *Si χ décrit un ensemble fini de générateurs du cône saturé $X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$, alors le morphisme produit*
$$\prod_\chi \chi_F : N_B^{\mathrm{op}}\backslash \overline{G}/N_B = \overline{T}^+ \to \prod_\chi \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1$$
est une immersion fermée. □

Si χ est un caractère de $X_{\overline{T}^+}$, on dispose donc en toute place x de l'application équivariante induite
$$N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\backslash \overline{G}(F_x)/N_B(F_x) \to \overline{T}^+(F_x) \xrightarrow{\chi_F} (\mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1)(F_x) = E_\chi \otimes_F F_x = E_{\chi,x}\,.$$
Comme dans la définition IV.3, on peut composer cette application avec le morphisme de trace
$$\mathrm{Tr} : E_{\chi,x} \to F_x\,,$$
le caractère
$$\psi_x : F_x \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$
et n'importe quel endomorphisme linéaire de multiplication
$$\begin{array}{rcl} E_{\chi,x} & \to & E_{\chi,x} \\ a_x & \mapsto & c_x \cdot a_x\,, \quad \text{avec } c_x \in E_{\chi,x}\,, \end{array}$$
pour poser :

Définition IV.16. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$, et pour toute place $x \in |F|$, on appellera χ-fonctions unitaires sur $\overline{T}^+(F_x)$ ou $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\backslash \overline{G}(F_x)/N_B(F_x)$
$$\mathbb{1}^G_{\chi,c_x} : N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\backslash \overline{G}(F_x)/N_B(F_x) \to \overline{T}^+(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^+\,,$$
les fonctions
$$\overline{T}^+(F_x) \ni t \mapsto \psi_x\left(\mathrm{Tr}\left(c_x \cdot \chi_F(t)\right)\right)$$
indexées par les éléments $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Autrement dit, ce sont les fonctions composées

$$\overline{T}^{+}(F_x) \xrightarrow{\chi_F} E_{\chi,x} \xrightarrow{c_x\cdot\bullet} E_{\chi,x} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} F_x \xrightarrow{\psi_x} U(1) \subset \mathbb{C}^\times \,.$$

$\square$

Le tore maximal T de G est déjà muni, en toute place $x \in |F|$, d'un opérateur unitaire de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet) \cdot \varphi_x(t)$$

induit par la ψ_x-transformation de Fourier linéaire sur $\overline{T}_E\,(F_x) = E_x$.

Supposant que G est également muni, en toute place x, d'un opérateur unitaire de ρ-transformation de Fourier compatible avec la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$, on peut considérer les transformées de Fourier $\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$ des fonctions unitaires $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}$ sur $\overline{G}(F_x)$. Elles sont définies au sens suivant :

Définition IV.17. –

Supposons dorénavant que, pour toute place $x \in |F|$, $G(F_x)$ est muni d'un opérateur de ρ-transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f_x} = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot k_x^\rho(g\,\bullet)\, f_x(g)$$

qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) *Il est compatible avec la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ au sens que, pour toute fonction continue à support compact,*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

le produit

$$|\det{}_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

admet pour ρ_T-transformée de Fourier le produit

$$|\det{}_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot (\widehat{f_x})_{N_B} : T(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

(2) *On a $\overline{k_x^\rho(g)} = k_x^\rho(-g)$, $\forall\, g \in G(F_x)$, et l'opérateur*

$$f_x \mapsto \widehat{f_x}$$

est unitaire au sens qu'il préserve le produit hermitien

$$(f_1,f_2) \mapsto \langle f_1,f_2\rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}\,.$$

Alors, pour toute fonction mesurable bornée

$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

sa ρ-transformée de Fourier $\widehat{\varphi_x}$ est bien définie en tant que forme linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{\varphi_x}\,(f_x)$$

sur l'espace des fonctions de carré intégrable f_x dont la ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{f_x}$ est intégrable sur $G(F_x)$.

Elle est caractérisée par la formule

$$\widehat{\varphi_x}(f_x) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \varphi_x(g) \cdot \widehat{f}_x(g)$$

pour toute fonction f_x de carré intégrable sur $G(F_x)$ dont la ρ-transformée de Fourier $\widehat{f}_x$ est intégrable.

□

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, toute place $x \in |F|$ et tout élément $c_x \in E_{\chi,x}$, on dispose donc de la distribution

$$\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$$

définie comme la ρ-transformée de Fourier de la fonction unitaire $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}$ sur $G(F_x)$.

D'autre part, comme le caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ est élément de $X_{\overline{T}} \supset X_{\overline{T}^+}$, on dispose aussi de la fonction unitaire $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ sur $\overline{T}(F_x) \supset T(F_x)$ et de sa ρ_T-transformée de Fourier la distribution $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$ sur $T(F_x)$.

Les deux distributions $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ sur $G(F_x)$ et $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$ sur $T(F_x)$ sont reliées de la manière suivante :

Lemme IV.18. –

Considérons comme ci-dessus un caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, une place $x \in |F|$ et un élément c_x de $E_{\chi,x}$.

Alors :

(i) *La distribution $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ est invariante à droite par $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$ et invariante à gauche par $N_B(F_x)$.*

(ii) *Si C est une face du cône $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et qui contient ceux des $\sigma(\chi)$, $\sigma \in \Gamma_F$, tels que la coordonnée correspondante de c_x ne soit pas nulle, et si $T^C \subset T$ désigne le sous-tore fixateur des points de la strate $T_C \subset \overline{T}$, la distribution $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ est également invariante par le sous-tore $T^C(F_x) \subset T(F_x)$ agissant à droite ou à gauche.*

(iii) *Si f_x et φ_x sont deux fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ et $T(F_x)$ respectivement, telles que $\widehat{f}_x$ et $\widehat{\varphi}_x$ sont intégrables, et qui sont reliées par la formule*

$$\widehat{\varphi}_x(t) = \int_{N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\times N_B(F_x)} dv \cdot du \cdot \widehat{f}_x(v \cdot t \cdot u) \cdot |\delta_B(t)|_x \cdot |\det_B(t)|_x\,, \quad t \in T(F_x)\,,$$

où la mesure $d_\rho\, g$ de $G(F_x)$ est écrite sous la forme

$$d_\rho\, g = |\det_B(t)|_x \cdot |\delta_B(t)|_x \cdot dt \cdot dv \cdot du\,, \qquad \text{avec } g = v \cdot t \cdot u\,,$$

on a

$$\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x) = \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}(\varphi_x)\,.$$

Démonstration :

(i) résulte de ce que la fonction $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}$ est invariante à gauche par $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$ et invariante à droite par $N_B(F_x)$.

(ii) Le sous-tore T^C de T est l'intersection des noyaux des caractères éléments de C. Donc le sous-tore $T^C(F_x)$ de $T(F_x)$ laisse invariante la fonction $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x} : G(F_x) \to U(1)$ et il transforme la forme linéaire

$$f_x \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}(g) = \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}(f_x)$$

par le caractère

$$T^C(F_x) \ni t \mapsto |\det_\rho(t)|_x^{-1} .$$

Donc il laisse invariante la forme linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}(f_x) = \mathbb{1}^G_{\chi,c_x}(\widehat{f}_x) .$$

(iii) résulte de ce que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}(f_x) &= \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \mathbb{1}^G_{\chi,c_x}(g) \cdot \widehat{f}_x(g) \\ &= \int_{T(F_x)\times N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\times N_B(F_x)} dt \cdot dv \cdot du \cdot |\det_B(t)|_x \cdot |\delta_B(t)|_x \cdot \mathbb{1}_{\chi,c_x}(t) \cdot \widehat{f}_x(v\cdot t\cdot u) \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}(v\cdot t\cdot u) = \mathbb{1}_{\chi,c_x}(t)$ pour tous $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, $u \in N_B(F_x)$. □

En ce qui concerne les ρ-transformés de Fourier des opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}$, on a :

Corollaire IV.19. –

Considérons encore un caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, une place $x \in |F|$ et un élément $c_x \in E_{\chi,x}$.

Alors :

(i) *Le ρ-transformé de Fourier de l'opérateur unitaire de multiplication par la fonction $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}$ sur $G(F_x)$ est $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$-équivariant à droite et $N_B(F_x)$-équivariant à gauche.*

(ii) *Soient f_1 et f_2 deux fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ reliées par la formule*

$$\widehat{f}_2 = \widehat{f}_1 \cdot \mathbb{1}^G_{\chi,c_x} .$$

Si les termes constants

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= |\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{1,N_B} \\ \varphi_2 &= |\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{2,N_B} \end{aligned}$$

sont bien définis et de carré intégrable sur $T(F_x)$, ils sont reliés par la formule

$$\widehat{\varphi}_2 = \widehat{\varphi}_1 \cdot \mathbb{1}_{\chi,c_x} .$$

□

Intéressons-nous maintenant aux supports des distributions $\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$.

On a vu que si C est une face du cône $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et qui contient ceux des $\sigma(\chi)$, $\sigma \in \Gamma_F$, tels que la coordonnée correspondante de c_x ne soit pas nulle, alors la distribution $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$ est supportée par la strate $\overline{T}_C(F_x)$ de $\overline{T}(F_x)$ au sens de la proposition IV.8.

Si $\chi \in X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}}$, on se demande s'il ne pourrait pas arriver aussi que la distribution $\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$ sur $G(F_x)$ soit supportée dans la strate $\overline{T}_C(F_x) \subset \overline{T}(F_x) \subset \overline{G}(F_x)$.

D'après le lemme IV.18(i), une condition nécessaire pour cela est certainement que les points de la strate

$$\overline{T}_C \hookrightarrow \overline{T} \hookrightarrow \overline{G}$$

soient invariants par l'action à droite de $N_{B^{\mathrm{op}}}$ et par l'action à gauche de N_B.

Or on a le lemme suivant :

Lemme IV.20. –

Soit C une face du cône saturé $X_{\overline{T}}$ dont tous les éléments sont des caractères dominants.

Alors les points de la strate

$$\overline{T}_C \hookrightarrow \overline{T} \hookrightarrow \overline{G}$$

sont invariants par l'action à droite de N_B^{op} et par l'action à gauche de N_B.

Remarque :

Le cône saturé $X_{\overline{T}}$ compte nécessairement au moins une arête (c'est-à-dire une face de dimension 1) dont les éléments sont des caractères dominants.

Démonstration :

L'assertion est géométrique donc, quitte à remplacer F par une extension finie, on peut supposer qu'il n'y a pas d'action de Γ_F, autrement dit que T et G sont déployés.

Il suffit de démontrer que, pour toute racine positive $\alpha \in \Phi_G^+$, les points de $\overline{T}_C \hookrightarrow \overline{T} \hookrightarrow \overline{G}$ sont invariants par l'action à gauche du sous-groupe additif $U_\alpha \subset N_B$ associé à α et invariants à droite par $U_{-\alpha} \subset N_{B^{\mathrm{op}}}$.

On note T_α la composante neutre du noyau de $\alpha : T \to \mathbb{G}_m$. C'est un sous-tore de T de codimension 1. Son commutateur G_α dans G est un sous-groupe de Levy standard. On peut supposer que $G = G_\alpha$, autrement dit que α et $-\alpha$ sont les seules racines de G et que $U_\alpha = N_B$, $U_{-\alpha} = N_B^{\mathrm{op}}$.

Il existe une représentation injective $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$ de G telle que $\overline{G}$ s'identifie à l'adhérence schématique de $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$ dans M_d.

Comme $G = G_\alpha$, le sous-groupe dérivé $[G, G] = G^{\mathrm{der}} = G_\alpha^{\mathrm{der}}$ est isomorphe à SL_2 ou PGL_2. La représentation $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$ est somme directe de représentations $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_k$ dont la restriction à G^{der} est irréductible, donc est isomorphe à la représentation sym^{k-1} de SL_2 ou PGL_2.

On peut choisir pour l'espace $\mathbb{A}^d$ de GL_d des coordonnées affines qui soient compatibles avec la décomposition de $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$ comme somme directe de représentations irréductibles, et telles que T, $N_B = U_\alpha$ et $N_B^{\mathrm{op}} = U_{-\alpha}$ s'envoient respectivement dans T_d, N_d et N_d^{op}.

Pour tout facteur irréductible $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_k$ de $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$, notons $X_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq k$ les k^2 coordonnées affines de $M_k \supset \mathrm{GL}_k$. Ainsi, les coordonnées diagonales $X_{i,i}$, $1 \leq i \leq k$, définissent des caractères de T qui sont éléments du cône $X_{\overline{T}}$.

Si $k \geq 2$, le caractère $X_{k,k} \in X_{\overline{T}}$ ne peut pas être dominant. Par conséquent, les caractères $X_{j,j}$, $2 \leq j \leq k$, ne peuvent pas être éléments de la face C de $X_{\overline{T}}$, et ils s'annulent nécessairement sur la strate $\overline{T}_C \hookrightarrow \overline{T}$.

Comme l'image de $N_B = U_\alpha$ [resp. $N_B^{\mathrm{op}} = U_{-\alpha}$] dans GL_k est contenue dans N_k [resp. N_k^{op}], on en conclut comme voulu que les points de la strate $\overline{T}_C$ sont invariants à gauche par N_B et invariants à droite par N_B^{op}.

$\square$

Nous pouvons maintenant prouver :

Proposition IV.21. –

On considère un caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, une place $x \in |F|$, un élément $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$ et une face C du cône polyédral $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et qui contient l'ensemble des images $\sigma(\chi)$ de χ par un élément $\sigma \in \Gamma_F$ telles que la coordonnée correspondante de c_χ ne soit pas nulle.

Alors :

(i) *La distribution* $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ *sur* $G(F_x)$ *est supportée par*

$$N_B(F_x)\cdot\overline{T}_C(F_x)\cdot N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\subset\overline{G}\,(F_x)$$

au sens que, pour toute fonction f_x *sur* $G(F_x)$ *telle que*

$$\begin{cases}\bullet\ f_x \text{ est de carré intégrable et } \widehat{f}_x \text{ est intégrable,}\\ \bullet\ f_x \text{ se prolonge en une fonction continue sur } \overline{G}(F_x) \text{ supportée par une partie compacte qui ne}\\ \text{rencontre pas } N_B(F_x)\cdot\overline{T}_C(F_x)\cdot N_B^{\mathrm{op}}(F_x),\end{cases}$$

on a nécessairement

$$\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x)=0\,.$$

(ii) *En particulier, si tous les éléments de* C *sont des caractères dominants, la distribution* $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ *est supportée par*

$$\overline{T}_C(F_x)\subset\overline{T}(F_x)\subset\overline{G}(F_x)\,.$$

Démonstration :

(i) La distribution $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ est une forme linéaire en les fonctions de carré intégrable

$$f_x : G(F_x)\to\mathbb{C}\,,$$

telle que

$$\left|\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x)\right|\le\int_{G(F_x)}d_\rho\,g\cdot\left|\widehat{f}_x(g)\right|\,,$$

et qui est invariante à gauche par $N_B(F_x)$ et à droite par $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$.
Or, pour toute f_x et tout $v\in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, la fonction

$$T(F_x)\ni t\mapsto|\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{-1/2}\cdot\int_{N_B(F_x)}du\cdot f_x(u\cdot t\cdot v)$$

admet pour ρ_T-transformée de Fourier la fonction

$$T(F_x)\ni t\mapsto|\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{1/2}\cdot\int_{N_B(F_x)}du\cdot\widehat{f}_x(v\cdot t\cdot u)\,.$$

On en déduit que la forme linéaire $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ se factorise à travers l'opérateur linéaire

$$f_x\mapsto\varphi_x=\left[t\mapsto|\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{-1/2}\cdot\int_{N_B(F_x)}du\cdot f_x(u\cdot t\cdot v)\right]$$

en une forme linéaire encore notée

$$\varphi_x\mapsto\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)$$

sur l'espace des fonctions de carré intégrable

$$\varphi_x : T(F_x)\to\mathbb{C}$$

avec

$$\left|\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)\right|\le\int_{T(F_x)}dt\cdot|\widehat{\varphi}_x(t)|\cdot|\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{1/2}\,.$$

De plus, le sous-tore $T^C(F_x) \subset T(F_x)$ agit sur la forme linéaire

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)$$

par le caractère

$$T^C(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{-1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \, .$$

On a :

Lemme IV.22. –
Les caractères $\det_B \cdot \delta_B$ *et* $\det_B \cdot \delta_B^{-1}$ *sont éléments du cône polyédral* $X_{\overline{T}}$.

Démonstration du lemme :
Comme $X_{\overline{T}}$ est stable par l'action du groupe de Weyl W_G, il suffit de traiter le cas de $\det_B \cdot \delta_B^{-1}$.
Pour tout poids ρ_T^i qui est le plus haut poids d'un facteur irréductible de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, on a par définition du caractère $\det_B$

$$\langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle \, .$$

Comme $\det_B$ est un caractère de G et δ_B est un caractère dominant, on a pour tout poids ρ_T^j qui est une image par W_G d'un tel plus haut poids ρ_T^i

$$\langle \det_B, \rho_T^j \rangle = \langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle \geq \langle \delta_B, \rho_T^j \rangle \, .$$

Comme ces ρ_T^j images par W_G des plus hauts poids ρ_T^i engendrent le cône saturé $X_{\overline{T}}^\vee$ dual de $X_{\overline{T}}$, le lemme est démontré.

$\square$

Suite de la démonstration de la proposition IV.21 :
Comme le caractère $\det_B \cdot \delta_B$ est élément de $X_{\overline{T}}$ et donc aussi de $T_{\overline{E}}$, il induit une fonction continue

$$|\det_B \cdot \ \delta_B(\bullet)|_x^{1/2} : T_{\overline{E}}(F_x) \to T(F_x) \to \mathbb{R}_+ \, .$$

La borne

$$\varphi_x \mapsto \int_{T(F_x)} dt \cdot |\widehat{\varphi}_x(t)|_x \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2}$$

a le sens d'une condition de régularité locale pour les fonctions

$$\varphi_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

ou pour les fonctions

$$\varphi'_x : T_E(F_x) \to \mathbb{C}$$

si l'on compose la forme linéaire

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)$$

avec l'opérateur

$$\varphi'_x \mapsto \varphi_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot \varphi'_x(t_\rho) \, .$$

De plus, on a

$$\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x) = |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x(t\,\bullet))$$

pour tout $t \in T^C(F_x)$.

En faisant tendre $t \in T^C(F_x)$ vers le point base de la strate $T_C(F_x)$ dans $\overline{T}(F_x)$, on obtient que la forme linéaire

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)$$

est supportée par la strate $\overline{T}_C(F_x)$ dans $\overline{T}(F_x)$.

Donc la distribution

$$f_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x)$$

est supportée par

$$N_B(F_x) \cdot \overline{T}_C(F_x) \cdot N_B^{\mathrm{op}}(F_x) \subset \overline{G}(F_x)$$

ce qui est la conclusion de (i).

(ii) résulte de (i) et du lemme IV.20. □

À partir de maintenant, supposons que l'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f_x} = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, \bullet)$$

est non seulement unitaire et compatible avec la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ mais qu'il "préserve le tore $T(F_x)$ par convolution" :

Cela signifie que pour toute fonction mesurable unitaire

$$\mathbb{I}_x : G(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

dont la transformée de Fourier $\widehat{\mathbb{I}_x}$ est une distribution supportée par $\overline{T}(F_x) \subset \overline{G}(F_x)$, et pour toutes fonctions continues et de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \mathbb{I}_x\,,$$

alors la restriction de f_2 à $T(F_x)$ ne dépend que de la restriction de f_1 à $T(F_x)$.

On a la conséquence de la proposition IV.21 :

Corollaire IV.23. –

On suppose comme ci-dessus que la ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ préserve le tore $T(F_x)$ par convolution.

On considère un caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, une place $x \in |F|$, un élément $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$ et une face C du cône polyédral $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et qui contient l'ensemble des $\sigma(\chi)$, $\sigma \in \Gamma_F$, telles que la coordonnée correspondante de c_x ne soit pas nulle.

On suppose enfin que la face C est constituée de caractères dominants.

Alors, pour toutes fonctions continues et de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule sur $G(F_x)$

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}\,,$$

et pour tous éléments $u \in N_B(F_x)$, $v \in N_B^{\rm op}(F_x)$, les fonctions

$$\begin{array}{rcl} T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f_1^{u,v}(t) = f_1(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \\ t & \mapsto & f_2^{u,v}(t) = f_2(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \end{array}$$

sont reliées par la formule sur $T(F_x)$

$$\widehat{f_2^{u,v}} = \widehat{f_1^{u,v}} \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x} \,.$$

Remarques :

(i) En revanche, le ρ-transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication par $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}$ ne préserve pas les autres cellules de Bruhat de $B(F_x)\backslash G(F_x)/N_B^{\rm op}(F_x)$.

(ii) Dans le cas de la transformation de Fourier linéaire sur $G = \mathrm{GL}_r$, associée à la représentation standard $\rho = \mathrm{Id}$ de $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, on peut prendre pour χ le caractère

$$\begin{array}{rcl} \chi : T = T_r = \mathbb{G}_m^r & \to & \mathbb{G}_m \,, \\ t = (t_1, t_2, \ldots, t_r) & \mapsto & t_1 \,. \end{array}$$

On a alors, pour toute place $x \in |F|$ et tout élément $c_x \in F_x$,

$$\begin{array}{l} \mathbb{I}_{\chi,c_x}(t) = \psi_x(c_x \cdot t_1) \,, \quad \forall\, t = (t_1, \ldots, t_r) \in T(F_x) \,, \\ \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}(g) = \psi_x(c_x \cdot g_{1,1}) \,, \quad \forall\, g = (g_{i,j})_{1 \le i,j \le r} \in G(F_x) \,. \end{array}$$

Le transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication par $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ est l'opérateur de translation additive par $(c_x, 0, \ldots, 0)$.

Dans ce cas, cet opérateur commute avec l'opérateur de multiplication par le caractère

$$t = (t_1, \ldots, t_r) \mapsto |\det_B(t)|^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} = |t_1 \ldots t_r|_x^{\frac{r-1}{2}} \cdot \left| \prod_{1 \le i \le r} t_i^{r+1-2i} \right|_x^{-\frac{1}{2}} = \prod_{2 \le i \le r} |t_i|_x^{i-1} \,.$$

Mais cette dernière propriété n'est plus vérifiée dans le cas général.

Démonstration :

Par hypothèse, il existe un opérateur linéaire U tel que la restriction $T(F_x) \ni t \mapsto f_2(t)$ soit la transformée par U de la restriction $T(F_x) \ni t \mapsto f_1(t)$. Comme la fonction $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}$ est invariante à gauche par $N_B^{\rm op}(F_x)$ et invariante à droite par $N_B(F_x)$, on a également que, pour tous $u \in N_B(F_x)$ et $v \in N_B^{\rm op}(F_x)$, la fonction $T(F_x) \ni (t) \mapsto f_2(u \cdot t \cdot v)$ est la transformée par U de la fonction $T(F_x) \ni t \mapsto f_1(u \cdot t \cdot v)$. Autrement dit, il existe un opérateur linéaire U' tel que, pour tous $u \in N_B(F_x)$ et $v \in N_B^{\rm op}(F_x)$, la fonction $f_2^{u,v}$ est la transformée par U' de la fonction $f_1^{u,v}$ sur $T(F_x)$.

On conclut d'après le corollaire IV.19(ii). $\square$

3 Espaces de ρ-fonctions

On suppose dorénavant que le cône $X_{\overline{T}}$ admet une face C définie sur F, c'est-à-dire stable par Γ_F, constituée de caractères dominants et "génératrice" au sens qu'elle n'est contenue dans aucun sous-espace propre de $X_T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ respecté par l'action de W_G.

Une telle face existe en particulier si G est déployé sur F ou, plus généralement, si G est de la forme

$$G = \mathrm{Res}_{F'/F}\, G_0$$

où F' est une extension finie séparable de F et G_0 est un groupe réductif déployé sur F'.

On a :

Lemme IV.24. –

Soit C une face génératrice de $X_{\overline{T}}$ qui est définie sur F et constituée de caractères dominants.

Alors :

(i) *Le sous-réseau de X_T engendré par C et ses transformées par l'action du groupe de Weyl W_G est d'indice fini.*

Il est constitué des caractères de T qui sont triviaux sur un certain sous-groupe fini Z_C du centre de G défini sur F.

(ii) *La famille des coordonnées*

$$\chi_F : N_B^{\mathrm{op}} \backslash \overline{G} / N_B \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1\,, \quad \chi \in C\,,$$

et de leurs translatées à gauche et à droite par des éléments de $G(F)$ engendre l'algèbre de structure du semi-groupe normal

$$\overline{G}/Z_C$$

du groupe G/Z_C.

Exemple :

Si $\widehat{G} = \widehat{\mathrm{GL}}_2/\mu_k$ et $\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$ si bien que G s'inscrit dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\det"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

et $X_T = \big\{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1 + n_2 \in k\,\mathbb{Z}\big\}$, on a

$$X_{\overline{T}} = \big\{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1 + n_2 \in k\,\mathbb{Z}\big\}\ .$$

On peut prendre pour C l'arête engendrée par l'élément $(k,0)$. Alors G/Z_C s'identifie à GL_2 et $\overline{G}/Z_C$ s'identifie à M_2.

$\square$

Rappelons que, en toute place ultramétrique x de F, on voudrait définir un espace de ρ-fonctions qui satisfasse les conditions du problème I.7.

En particulier, cet espace doit être stable par les translations à gauche et à droite ainsi que par la ρ-transformation de Fourier, et sa projection dans l'espace des fonctions dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ induites de caractères $\chi_\pi \in \{\pi\}_x^T$ est complètement déterminée a priori.

Proposons de demander en plus la condition que l'espace des ρ-fonctions soit stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires associées aux $\chi \in C$ et $c_x \in E_\chi$,

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c_x} : \overline{G}(F_x) \to N_B^{\mathrm{op}}(F_x) \backslash \overline{G}(F_x)/N_B(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,,$$

et donc aussi par les translatées à gauche et à droite de ces fonctions par des éléments de $G(F_x)$.

Or on a :

Lemme IV.25. –

Soit toujours une face génératrice C de $X_{\overline{T}}$ qui est définie sur F et constituée de caractères dominants. Et soit x une place ultramétrique de F.

Alors :

(i) *Un espace de ρ-fonctions*

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui satisfait les conditions du problème I.7 *est nécessairement constitué de fonctions supportées par des parties compactes de $\overline{G}(F_x)$.*

(ii) *Demander qu'un espace de fonctions*

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

supportées par des parties compactes de $\overline{G}(F_x)$ soit stable par multiplication par les fonctions

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c_x} : \overline{G}(F_x) \to U(1)\,, \quad \chi \in C\,, \quad c_x \in E_{\chi,x}\,,$$

et par leurs translatées à gauche et à droite par des éléments de $G(F_x)$, équivaut à demander qu'il soit stable par multiplication par les fonctions localement constantes à support compact

$$\overline{G}(F_x) \to (\overline{G}/Z_C)(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

Démonstration :

(i) résulte de ce que, d'après la condition (4) du problème I.7, les ρ-fonctions sont supportées par des parties de $G(F_x)$ dont les restrictions aux fibres de

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \to q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont compactes, et de la forme des fonctions $L_x(\rho,\pi,Z)$ dans les conditions (3) et (4).

(ii) résulte du lemme IV.24 qui précède. □

Compte tenu de ce lemme, la seule définition compatible avec la condition supplémentaire de stabilité par les fonctions $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}$, $\chi \in C$, $c_x \in E_{\chi,x}$, est :

Définition IV.26. –

Soit toujours une face génératrice C de $X_{\overline{T}}$ qui est définie sur F et constituée de caractères dominants. Alors, pour toute place ultramétrique x de F, proposons d'appeler ρ-fonctions sur $G(F_x)$ les fonctions

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

telles que :

- *f_x est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*
- *f_x est supportée par une partie compacte de $\overline{G}(F_x)$,*

- *pour tous éléments $g, g' \in G(F_x)$ et pour toute fonction localement constante à support compact*

$$1\!\!\mathrm{I}_x : \overline{G}(F_x) \to (\overline{G}/Z_C)(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

le terme constant

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot u \cdot t \cdot g') \cdot 1\!\!\mathrm{I}_x(u \cdot t)$$

est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.

Remarque :

Comme Z_C est un sous-groupe fini du centre de G, cette définition ne dépend pas du choix de C.

□

Par définition, l'espace des ρ_T-fonctions est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$1\!\!\mathrm{I}^G_{\chi,c_x}\,, \quad \chi \in C\,, \quad c_x \in E_\chi \otimes_F F_x = E_{\chi,x}\,.$$

On conjecture qu'il est également stable par les ρ-transformés de Fourier de ces opérateurs :

Conjecture IV.27. –

Soient $f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$ deux fonctions de carré intégrable reliées par une formule de la forme

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot 1\!\!\mathrm{I}^G_{\chi,c_x}\,, \qquad \text{avec } \chi \in C\,, \quad c_x \in E_{\chi,x}\,.$$

Alors, si f_1 est une ρ-fonction, f_2 est aussi une ρ-fonction.

Remarque :

Démonstration en cours ...

On doit utiliser le corollaire IV.23 qui dit que pour tous $u \in N_B(F_x)$, $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, les fonctions

$$t \mapsto f_1^{u,v}(t) = f_1(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2}$$
$$t \mapsto f_2^{u,v}(t) = f_2(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2}$$

sont reliées par la formule sur $T(F_x)$

$$\widehat{f_2^{u,v}} = \widehat{f_1^{u,v}} \cdot 1\!\!\mathrm{I}_{\chi,c_x}\,,$$

combiné avec le fait que le ρ_T-transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication par $1\!\!\mathrm{I}_{\chi,c_x}$ sur $T(F_x)$ préserve le sous-espace des ρ_T-fonctions.

□

Il n'est pas clair a piori que l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ de la définition IV.26 n'est pas 0.

On s'intéresse d'abord aux ρ-fonctions qui sont "de type torique", c'est-à-dire dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations induites du tore $T(F_x)$ de $G(F_x)$ ou des sous-quotients de telles représentations.

On conjecture encore :

Conjecture IV.28. –

Une fonction

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est

- *invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*
- *supportée par une partie compacte de $\overline{G}(F_x)$,*
- *de type torique,*

est une ρ-fonction si et seulement si, pour tous $g, g' \in G(F_x)$, le terme constant

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot u \cdot t \cdot g')$$

est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.

Remarques :

(i) La nécessité de la condition est évidente.

(ii) **Très important :** En revanche, la suffisance de la condition est une propriété subtile de $\rho_T^\vee : T_E \to T$ ou, si l'on préfère, de l'homomorphisme Γ_F-équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_E = (\mathbb{C}^\times)^r \, .$$

C'est certainement ici qu'intervient l'hypothèse que ρ_T provient d'une représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

(iii) Démonstration en cours dans le cas où $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$ et $\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C}) \dots$

□

On peut démontrer à partir de ces deux conjectures :

Corollaire conditionnel IV.29. –

Si les conjectures IV.27 *et* IV.28 *ci-dessus sont vraies, alors l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ au sens de la définition* IV.26 *satisfait toutes les conditions du problème* I.7*.*

En particulier, sa connaissance est équivalente à celle de facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$. □

En les places $x \in |F|$ archimédiennes, les facteurs $L_x(\rho, \pi, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$, $\pi \in \{\pi\}_x^G$, sont déjà connus de toute façon.

On pose quand même :

Définition IV.30. –

Soit x une place archimédienne de F.

(i) *On appelle désormais espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ le plus petit espace de fonctions sur $G(F_x)$ qui*

- *contient les ρ_T- fonctions sur $T(F_x)$ au sens du chapitre* II *(corollaire* II.9*),*
- *est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires $\mathbb{1}_{\chi, c_x}$, $\chi \in X_{\overline{T}}$, $c_x \in E_{\chi,x}$,*
- *est stable par la ρ_T-transformation de Fourier.*

(ii) *On appelle ρ-fonctions sur $G(F_x)$ les fonctions*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

de classe C^∞, à décroissance rapide sur les complémentaires des parties compactes de $\overline{G}(F_x)$ et telles que, pour tous $g, g' \in G(F_x)$, le terme constant

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot u \cdot t \cdot g')$$

est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.

Remarques :

(i) La forme de la définition de (ii) est justifiée par le fait que toutes les représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ proviennent de caractères du tore $T(F_x)$, puisque la place x est archimédienne.

(ii) Ici encore, on doit pouvoir montrer que l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi, c_x}^G\,, \quad \chi \in C\,, \quad c_x \in E_{\chi,x}\,,$$

et donc aussi par les ρ-transformés de Fourier de ces opérateurs. □

4 Formule de Poisson

Supposons vérifés tous les énoncés des paragraphes précédents.

On dispose donc en chaque place $x \in |F|$ d'un espace de ρ-fonctions sur $G(F_x)$.

Cet espace contient la ρ-fonction "standard" de la définition I.8(i) en toute place ultramétrique x où G et ρ sont non ramifiés.

On dispose donc d'un espace des ρ-fonctions globales, tel qu'introduit dans la définition I.8(ii).

Il est stable par translation à gauche ou à droite, ainsi que par la ρ-transformation de Fourier globale $f \mapsto \widehat{f}$.

Enfin, il est stable par les opérateurs

$$f \mapsto f \cdot \mathbb{1}_{\chi,c}^G$$

de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c}^G = \prod_x \mathbb{1}_{\chi,c_x}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,, \quad \chi \in C\,, \quad c = (c_x)_{x \in |F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi}$$

et donc aussi par les ρ-transformés de Fourier de ces opérateurs, notés

$$f \mapsto \widehat{\mathbb{1}_{\chi,c}^G} *_\rho f\,.$$

D'après le théorème II.11, on dispose sur l'espace des ρ-fonctions globales de deux formes linéaires

$$f \mapsto S_B(f)$$

et

$$f \mapsto S'_B(f)\,.$$

La première [resp. la seconde] est invariante à droite [resp. à gauche] par $G(F)$ et invariante à gauche [resp. à droite] par $N_B(\mathbb{A})$.

Elles sont reliées par la formule de Poisson approchée

$$S_B(f) = S'_B(\widehat f)\,, \qquad \forall\, f\,.$$

Enfin, on a

$$S_B(f) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat f\,(\gamma\, u^{-1})$$

$$[\text{resp.} \quad S'_B(f) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat f\,(u\,\gamma)\ ]$$

si f admet un facteur local à support compact dans $G(F_x)$ en au moins une place ultramétrique x.

On peut noter

$$\begin{aligned} \text{“}\sum_{\gamma \in (N_B\backslash\overline{G})(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u\,\gamma)\text{”} \ &= \ \left(\sum_{\gamma \in (N_B\backslash G)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u\,\gamma)\right) \\ &+ \ \left(\sum_{\gamma \in (G/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \widehat f\,(\gamma\, u^{-1})\right) - S_B(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{“}\sum_{\gamma \in (\overline{G}/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma\, u^{-1})\text{”} \ &= \ \left(\sum_{\gamma \in (G/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma\, u^{-1})\right) \\ &+ \ \left(\sum_{\gamma \in (N_B\backslash G)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \widehat f\,(u\,\gamma)\right) - S'_B(f)\,. \end{aligned}$$

On devrait pouvoir montrer :

Conjecture IV.31. –

(i) *Il existe sur l'espace des ρ-fonctions globales*

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

une unique forme linéaire

$$f \mapsto \text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”}$$

telle que :

- *cette forme est invariante par les translations à gauche ou à droite par les éléments de $G(F)$,*
- *elle est invariante par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires*

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c} : \overline{G}(\mathbb{A}) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,, \quad \chi \in C\,, \quad c \in E_\chi\,,$$

- *pour toute ρ-fonction f, on a*

$$\int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(u\,\gamma)\text{”} = \text{“}\sum_{\gamma \in (N_B\backslash\overline{G})(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u\,\gamma)\text{”}.$$

(ii) *Pour toute fonction f, on a aussi*

$$\int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} f(\gamma\, u^{-1})\text{”} = \text{“}\sum_{\gamma\in(\overline{G}/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma\, u^{-1})\text{”}\,.$$

(iii) *Enfin, on a*

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”} = \sum_{\gamma\in G(F)} f(\gamma)$$

si f admet un facteur local à support compact dans $G(F_x)$ en au moins une place ultramétrique x.

Remarques :

(i) Il faut bien sûr remarquer que

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c}(\gamma) = 1\,, \quad \forall\, \gamma \in \overline{G}(F)\,, \quad \forall\, c \in E_\chi\,.$$

(ii) Réciproquement, tout élément $u \in N_B(\mathbb{A})$ tel que

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c}(\gamma\cdot u\cdot\gamma') = 1\,, \quad \forall\,\chi\in C\,, \quad \forall\,\gamma,\gamma'\in G(F)\,, \quad \forall\, c\in E_\chi$$

est nécessairement élément de $N_B(F)$.

(iii) La démonstration doit être fondée sur les deux remarques précédentes et sur le fait que, d'après la proposition IV.10(ii), les opérateurs

$$\varphi \mapsto \varphi\cdot\mathbb{1}_{\chi,c}$$

de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,, \quad \chi\in X_{\overline{T}}\,, \quad c\in E_\chi\,,$$

préservent la forme linéaire

$$\varphi \mapsto \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{T}(F)} \varphi(\gamma)\text{”}$$

de l'espace des ρ_T-fonctions globales φ sur $T(\mathbb{A})$. □

On devrait aussi pouvoir montrer :

Conjecture IV.32. –

La forme linéaire

$$f \mapsto \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”}$$

est invariante non seulement par les opérateurs

$$f \mapsto f\cdot\mathbb{1}^G_{\chi,c}$$

de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c} : \overline{G}(\mathbb{A}) \to U(1)\,, \quad \chi\in C\,, \quad c\in E_\chi\,,$$

mais aussi par leurs ρ-transformés de Fourier

$$f \mapsto \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c}} *_\rho f\,.$$

Remarque :

La démonstration doit être fondée sur les deux faits suivants :

- D'après le corollaire IV.23, pour tous éléments $u \in N_B(\mathbb{A}) \supset N_B(F)$ et $v \in N_B^{\rm op}(\mathbb{A}) \supset N_B(F)$, les fonctions

$$\begin{aligned} T(\mathbb{A}) \ni t &\mapsto f^{u,v}(t) = f(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|^{-1/2} \\ T(\mathbb{A}) \ni t &\mapsto \left(\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c}} *_\rho f\right)^{u,v}(t) \end{aligned}$$

sont reliées par la formule sur $T(\mathbb{A})$

$$\left(\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c}} *_\rho f\right)^{u,v} = \widehat{\mathbb{1}_{\chi,c}} *_{\rho_T} f^{u,v}$$

où

$$\varphi \mapsto \widehat{\mathbb{1}_{\chi,c}} *_{\rho_T} \varphi$$

désigne le ρ_T-transformé de Fourier de l'opérateur

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \mathbb{1}_{\chi,c}$$

de multiplication par la fonction unitaire $\mathbb{1}_{\chi,c}$ sur $T(\mathbb{A})$.

- Comme la forme linéaire

$$\varphi \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma)\text{”}$$

est préservée à la fois par la ρ_T-transformation de Fourier des ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$ et par les opérateurs

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \mathbb{1}_{\chi,c}$$

de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \to U(1)\,, \quad \chi \in X_{\overline{T}}\,, \quad c \in E_\chi\,,$$

elle est préservée par les ρ_T-transformés de Fourier

$$\varphi \mapsto \widehat{\mathbb{1}_{\chi,c}} *_{\rho_T} \varphi$$

de ces opérateurs. $\square$

L'énoncé de cette conjecture, combiné avec la formule

$$\text{“} \sum_{\gamma \in (N_B \backslash \overline{G})(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u\,\gamma)\text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in (\overline{G}/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma\, u^{-1})\text{”}\,, \quad \forall\, f\,,$$

signifie que la ρ-transformée de Fourier de la forme linéaire

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”}$$

satisfait toutes les propriétés de la conjecture IV.31.

L'assertion d'unicité dans la conjecture IV.31 implique alors :

Corollaire conditionnel IV.33. –

Si les conjectures IV.31 *et* IV.32 *ci-dessus sont vraies, ainsi que les énoncés antérieurs qu'elles supposent, on a pour toute ρ-fonction globale f sur $G(\mathbb{A})$*

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{f}(\gamma)\text{”}.$$

$\square$