Construire un noyau de la fonctorialité entre groupes linéaires ?

par Laurent Lafforgue

Exposé donné à l'Université de Bonn le 9 octobre 2008, dans le cadre du colloque célébrant le 60^{e} anniversaire de Michael Rapoport

Ce que l'on cherche

Dans le cas des groupes linéaires sur les corps de fonctions, le principe de fonctorialité de Langlands pour le transfert des représentations automorphes est déjà connu. C'est en effet une conséquence de la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions.

On souhaiterait trouver pour ce résultat une nouvelle démonstration purement adélique, sans géométrie.

Le cadre dans lequel on se place

- Sur les groupes linéaires (qui sont les plus importants).
- Sur les corps de fonctions (pour lesquels le résultat est déjà connu).
- Sans ramification (puisque, le principe de fonctorialité posant essentiellement un problème global, les éventuelles complications locales sont accessoires).
- Sans géométrie : on s'astreint à rester toujours à l'intérieur du périmètre de la théorie des adèles et des groupes adéliques.

Le but du présent exposé

Reformuler le principe de fonctorialité comme un problème de pure théorie des fonctions sur les groupes adéliques, qui ne fasse plus référence à la notion de “représentation automorphe”.

Notations

On note F un corps de fonctions, $|F|$ l'ensemble infini de ses places, F_x le corps local complété de F en chaque place $x \in |F|$, $O_x \subset F_x$ le sous-anneau des entiers de chaque complétion F_x, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F = \prod\limits_{x \in |X|} F_x$ l'anneau des adèles de F et $O_{\mathbb{A}} = O_{\mathbb{A}_F} = \prod\limits_{x \in |F|} O_x$ son sous-anneau des entiers.

Choix de deux groupes linéaires partout non ramifiés sur F

On choisit pour groupe d'arrivée du transfert

$$H = \mathrm{GL}_r\,, \quad \text{avec} \quad r \geq 1\,,$$

et pour groupe de départ un groupe de la forme

$$G = \prod_{\iota} \mathrm{Res}_{E_\iota/F}\, \mathrm{GL}_{r_\iota}$$

où ι décrit un ensemble fini d'indices, chaque r_ι est un entier ≥ 1, chaque E_ι est une extension finie partout non ramifiée de F et $\mathrm{Res}_{E_\iota/F}\, \mathrm{GL}_{r_\iota}$ désigne le groupe déduit de GL_{r_ι} par restriction des scalaires à la Weil de E_ι à F.

Les isomorphismes de Satake

En toute place x de F, on note $K_x^H = \mathrm{GL}_r(O_x)$ le sous-groupe ouvert compact maximal de $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\mathcal{H}_x^H = C_c(K_x^H \backslash H(F_x)/K_x^H)$ l'algèbre de Hecke sphérique des fonctions à support compact sur $H(F_x)$ bi-invariantes par K_x^H, définie par le produit de convolution pour la mesure de Haar normalisée.

De même, on note $K_x^G = \prod\limits_{\iota} \mathrm{GL}_{r_\iota}(O_{E_\iota,x})$ le sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F_x) = \prod\limits_{\iota} \mathrm{GL}_{r_\iota}(E_\iota \otimes_F F_x)$ et $\mathcal{H}_x^G = C_c(K_x^G \backslash G(F_x)/K_x^G)$ l'algèbre de Hecke sphérique associée.

On dispose des isomorphismes de Satake vers des algèbres de polynômes invariants

$$S_x^H : \mathcal{H}_x^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1'^{\pm 1}, \dots, X_r'^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}\,,$$
$$S_x^G : \mathcal{H}_x^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{m_x}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_x^G}$$

où, pour chaque place x, m_x est un entier ≥ 1 et $\mathfrak{S}_x^G$ un sous-groupe du groupe des permutations de $\{1, \dots, m_x\}$. L'entier m_x et le sous-groupe $\mathfrak{S}_x^G$ ne dépendent que de l'image de l'élément de Frobenius en x dans le groupe de Galois de n'importe quelle extension finie galoisienne non ramifiée E de F contenant toutes les extensions E_ι.

Choix d'un homomorphisme de transfert sans ramification

Si $\pi_1(F)$ désigne le groupe de Galois sans ramification du corps de fonctions F, un homomorphisme de transfert (sans ramification) entre G et H est, par définition, un homomorphisme entre les groupes duaux

$$\begin{array}{ccccc} \rho : {}^L G & = \hat{G}(\mathbb{C}) \rtimes \pi_1(F) & \longrightarrow & {}^L H & = \hat{H}(\mathbb{C}) \times \pi_1(F) \\ & \| & & & \| \\ & \prod\limits_{\iota} \prod\limits_{E_\iota \hookrightarrow E} \mathrm{GL}_{r_\iota}(\mathbb{C}) & & & \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \end{array}$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} {}^L G \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr] & & {}^L H \arrow[dl] \\ & \pi_1(F) & \end{tikzcd}$$

Selon une règle introduite par Langlands, un tel homomorphisme de transfert ρ induit en chaque place x un homomorphisme d'algèbres commutatives

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_x^H \longrightarrow \mathcal{H}_x^G$$

et donc une application en sens inverse entre les ensembles des caractères de ces algèbres

$$(\rho_x)_* : \left\{ \text{caractères } \chi_x \text{ de } \mathcal{H}_x^G \right\} \longrightarrow \left\{ \text{caractères } \pi_x \text{ de } \mathcal{H}_x^H \right\} .$$

Énoncé du principe de fonctorialité

Théorème. – *Pour toute représentation automorphe non ramifiée*

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x \quad \textit{de} \quad \mathcal{H}^G = \bigotimes_{x \in |F|} \mathcal{H}_x^G ,$$

il existe une représentation automorphe non ramifiée

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x \quad \textit{de} \quad \mathcal{H}^H = \bigotimes_{x \in |F|} \mathcal{H}_x^H$$

telle que

$$\pi_x = (\rho_x)_* \, \chi_x , \qquad \forall \, x \in |F| .$$

□

Pour démontrer directement ce principe de fonctorialité, on cherche à construire des familles de fonctions

$$K_P^{G,H,\rho} : G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

(où P décrit une famille de paramètres que l'on précisera plus loin) vérifiant les propriétés suivantes :

(0) En les deux premières variables, $K_P^{G,H,\rho}$ est invariante à droite par le sous-groupe ouvert compact maximal $K^G = \prod_{x \in |F|} K_x^G$ de $G(\mathbb{A}) = \prod_{x \in |F|} G(F_x)$ et, en la troisième variable, elle est invariante à droite par le sous-groupe ouvert compact maximal $K^H = \prod_{x \in |X|} K_x^H = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$ de $H(\mathbb{A}) = \prod_{x \in |F|} H(F_x) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

(1) En toute place $x \in |F|$, on a

- $K_P^{G,H,\rho} *_1 \varphi_x = K_P^{G,H,\rho} *_2 \varphi_x^{-1}$, $\forall \, \varphi_x \in \mathcal{H}_x^G$, si $\varphi_x^{-1}(g) = \varphi_x(g^{-1})$, $\forall \, g$,
- $K_P^{G,H,\rho} *_3 h_x = K_P^{G,H,\rho} *_1 \rho_x^*(h_x)$, $\forall \, h_x \in \mathcal{H}_x^H$,

où $*_1$ et $*_2$ désignent le produit de convolution dans $G(F_x)$ par rapport à la première et à la seconde variables de $K_P^{G,H,\rho}(\bullet, \bullet, \bullet)$ et $*_3$ désigne le produit de convolution dans $H(F_x)$ par rapport à la troisième variable.

(2) La fonction $K_P^{G,H,\rho}$ est, en les deux premières variables, invariante à gauche par

$$G(F) \times G(F) \, .$$

(3) La fonction $K_P^{G,H,\rho}$ est, en la troisième variable, invariante à gauche par

$$H(F) \, .$$

(4) Pour toute forme automorphe cuspidale f sur $G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K^G$, il existe un paramètre P tel que

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} dg \cdot f(g) \cdot K_P^{G,H,\rho}(\bullet, g, \bullet) \neq 0 \, .$$

Explications à propos de ces propriétés

Les propriétés (0) et (1) sont locales en chaque place $x \in |F|$.

Si elles sont vérifiées, ainsi que (2), et si f est un vecteur non nul d'une représentation automorphe cuspidale $\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x$ de $\mathcal{H}^G$, chaque

$$\int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} dg \cdot f(g) \cdot K_P^{G,H,\rho}(g_0, g, \bullet)$$

est un vecteur de la représentation $\pi = \bigotimes_{x \in |X|} (\rho_x)_* \, \chi_x$ de $\mathcal{H}^H$.

D'après (3), ce vecteur est une forme automorphe et, d'après (4), on peut le rendre non nul, ce qui signifie que la représentation π est automorphe.

On cherche d'abord à réaliser localement les propriétés (0) et (1). Pour cela, on commence par un travail local de décomposition spectrale sur $H(F_x)$ ainsi que sur $G(F_x)$, puis on fait une construction locale par intégration spectrale sur $G(F_x) \times H(F_x)$.

Fixons un caractère additif non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \longrightarrow \mathbb{C}^\times \, .$$

Travail local sur $H(F_x)$: les fonctions de Whittaker

On note N_r le radical unipotent supérieur de GL_r et $\theta_x : N_r(F_x) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ le caractère

$$n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \dots & \cdot \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{r-1,r} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \mapsto \psi_x \left(\sum_{1 \leq i < r} u_{i,i+1} \right) = \theta_x(n) \, .$$

On rappelle la proposition suivante qui définit les fonctions de Whittaker :

Proposition. – *Pour toute famille* $\lambda'_\bullet = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_r) \in U(1)^r$ *de r nombres complexes de module* 1*, il existe une unique fonction*

$$W^{H,\psi}_{x,\lambda'_\bullet} = \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que

- $W^{H,\psi}_{x,\lambda'_\bullet}(n \cdot g') = \theta_x^{-1}(n) \cdot W^{H,\psi}_{x,\lambda'_\bullet}(g')$, $\forall \, n \in N_r(F_x)$,
- $W^{H,\psi}_{x,\lambda'_\bullet} * h_x = S^H_x(h_x)(\lambda'_\bullet) \cdot W^{H,\psi}_{x,\lambda'_\bullet}$, $\forall \, h_x \in \mathcal{H}^H_x$,
- $W^{H,\psi}_{x,\lambda'_\bullet}(1) = 1$ *si ψ_x est régulier*

(et autre normalisation si ψ_x est de conducteur $\neq 0$). □

Travail local sur $G(F_x)$: décomposition spectrale des fonctions sphériques

Proposition. – *Pour toute famille* $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m_x}) \in U(1)^{m_x}$*, il existe une unique fonction sphérique*

$$\Phi^G_{x,\lambda_\bullet} : K^G_x \backslash G(F_x)/K^G_x \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que

- $\Phi^G_{x,\lambda_\bullet} * \varphi_x = \varphi_x * \Phi^G_{x,\lambda_\bullet} = S^G_x(\varphi_x)(\lambda_\bullet) \cdot \Phi^G_{x,\lambda_\bullet}$, $\forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}^G_x$,
- $\Phi^G_{x,\lambda_\bullet}(1) = 1$.

$\square$

Il existe sur $U(1)^{m_x}$ une certaine mesure $d\lambda_\bullet$, dite mesure de Plancherel, telle que les fonctions sphériques $\Phi \in \mathcal{H}^G_x$ s'écrivent sous la forme

$$\Phi = \int_{U(1)^{m_x}} d\lambda_\bullet \cdot S^G_x(\Phi)(\lambda_\bullet) \cdot \Phi^G_{x,\lambda_\bullet} \,.$$

Construction locale sur $G(F_x) \times H(F_x)$ par intégration sur le graphe de l'homomorphisme de transfert

On commence par le lemme suivant :

Lemme. – *L'homomorphisme d'algèbres induit par ρ en la place x selon la règle de Langlands*

$$\begin{array}{ccc} \rho^*_x : \mathcal{H}^H_x & \xrightarrow{\qquad\qquad} & \mathcal{H}^G_x \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathbb{C}[X'^{\pm 1}_1, \dots, X'^{\pm 1}_r]^{\mathfrak{S}_r} & & \mathbb{C}[X^{\pm 1}_1, \dots, X^{\pm 1}_{m_x}]^{\mathfrak{S}^G_x} \end{array}$$

est défini par une substitution de variables de la forme

$$X'_j \mapsto \varepsilon_j \cdot \left[\prod_{1 \le i \le m_x} X_i^{\frac{m_{i,j}}{d_x}} \right] , \quad 1 \le j \le r \,,$$

où chaque ε_j est une racine de l'unité, les $m_{i,j}$ sont des entiers relatifs et d_x est un entier ≥ 1.

Tous ne dépendent que de l'image de l'élément de Frobenius en x dans le groupe de Galois $\pi_1(F)/\pi_1(E)$ de n'importe quelle extension finie galoisienne non ramifiée E de F contenant toutes les extensions E_ι (de façon que $\pi_1(E)$ agisse trivialement sur $\hat{G}(\mathbb{C})$) et telle que $\pi_1(E)$ soit contenu dans le noyau de la composante $\pi_1(F) \to \hat{H}(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ de l'homomorphisme de transfert $\rho : \hat{G}(\mathbb{C}) \rtimes \pi_1(F) \to \hat{H}(\mathbb{C}) \times \pi_1(F)$.

$\square$

Si $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m_x}) \in U(1)^{m_x}$ et $\lambda'_\bullet = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_r) \in U(1)^r$ sont deux paramètres reliés par les égalités

$$\lambda'_j = \varepsilon_j \cdot \left[\prod_{1 \le i \le m_x} \lambda_i^{\frac{m_{i,j}}{d_x}} \right] , \quad 1 \le j \le r \,,$$

on note $\lambda'_\bullet = (\rho_x)_*\,(\lambda_\bullet)$.

Définition. – *Pour tout polynôme* $P_x \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{m_x}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_x^G}$, *on note*

$$K_{x,P_x}^{G,H,\rho} : K_x^G \backslash G(F_x)/K_x^G \times H(F_x)/K_x^H \longrightarrow \mathbb{C}$$

la fonction

$$(g,g') \mapsto \int_{\lambda_\bullet \in U(1)^{m_x}} d\lambda_\bullet \cdot P_x(\lambda_\bullet) \cdot \Phi_{x,\lambda_\bullet}^G(g) \cdot W_{x,(\rho_x)_*(\lambda_\bullet)}^{H,\psi}(g')\,.$$

Remarque. Les fonctions $(g_1,g_2,g') \mapsto K_{x,P_x}^{G,H,\rho}(g_2^{-1}\,g_1,g')$ vérifient les propriétés (0) et (1) en la place x. On les appelle des noyaux locaux de la fonctorialité sans ramification. □

Globalisation

On considère une famille de polynômes

$$P = \left(P_x \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_{m_x}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_x^G}\right)_{x \in |F|}$$

soumise à la seule condition que $P_x = 1$ en presque toute place.

Pour $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g' \in H(\mathbb{A})$, on note

$$K_P'^{G,H,\rho}(g_1,g_2,g') = \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)}} \prod_{x \in |F|} K_{x,P_x}^{G,H,\rho}(g_2^{-1}\,\gamma g_1, \delta g')\,.$$

D'après la théorie générale des "théorèmes réciproques" de Piatetski-Shapiro et autres, cette somme est absolument convergente. Elle est invariante à gauche par

$$G(F) \times G(F) \times Q_r(F)$$

où

$$Q_r = \left\{ \begin{pmatrix} * & \ldots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \ldots & * & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

désigne le sous-groupe "mirabolique" engendré par $\mathrm{GL}_{r-1} \hookrightarrow \mathrm{GL}_r$ et le sous-groupe de Borel B_r des matrices triangulaires supérieures.

Par construction, les fonctions $K_P'^{G,H,\rho}$ satisfont les conditions (0), (1) et (2).

Reformulation du théorème de transfert automorphe associé à l'homomorphisme ρ

Proposition. – *La validité de ce théorème équivaut à l'existence, pour tout paramètre $P = (P_x)_{x\in|F|}$, d'une fonction*

$$K_P''^{G,H,\rho} : G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telle que :

(i) *Tout comme $K_P'^{G,H,\rho}$, elle vérifie les propriétés* (0), (1) *et* (2) *et, en la troisième variable, elle est invariante à gauche par $Q_r(F)$.*

(ii) *Si θ désigne le caractère $\prod\limits_{x\in|F|} \theta_x$ de $N_r(\mathbb{A}) = \prod\limits_{x\in|F|} N_r(F_x)$, la fonction $K_P''^{G,H,\rho}$ est annulée par l'opérateur*

$$K(\bullet,\bullet,\bullet) \mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} dn \cdot \theta(n) \cdot K(\bullet,\bullet,n\,\bullet)\,.$$

(iii) *La somme*

$$K_P'^{G,H,\rho} + K_P''^{G,H,\rho}$$

est, en la troisième variable, invariante à gauche par $H(F) = \mathrm{GL}_r(F)$.

Remarques.

• La propriété (ii) ci-dessus empêche toute simplification entre $K_P'^{G,H,\rho}$ et $K_P''^{G,H,\rho}$. Cela assure la propriété (4) pour la famille des $K_P^{G,H,\rho} = K_P'^{G,H,\rho} + K_P''^{G,H,\rho}$.

• La partie de $K_P''^{G,H,\rho}$ qui correspond au spectre tempéré de G est uniquement déterminée.

Elle est nécessairement non nulle puisque certaines représentations automorphes cuspidales de G se transfèrent en des représentations automorphes de H qui ne sont pas cuspidales.

• On peut proposer une formule explicite pour la partie tempérée de $K_P''^{G,H,\rho}$, en généralisant la formule d'inversion de Shalika.

• Notant $w_r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & 1 \\ \vdots & \iddots & & \iddots & \\ 0 & & \iddots & & 0 \\ & \iddots & & \iddots & \vdots \\ 1 & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'inversion de GL_r et w_{r-1} celle de GL_{r-1}, on peut remplacer la condition (iii) de la proposition par la condition suivante qui lui est équivalente :

(iii)$'$ Pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g' \in H(\mathbb{A})$, on a l'égalité

$$\left(K'^{G,H,\rho}_P + K''^{G,H,\rho}_P\right)(g_1, g_2, g') = \left(K'^{G,H,\rho}_P + K''^{G,H,\rho}_P\right)(g_1, g_2, w_r \cdot w_{r-1} \cdot g')\,.$$

$\square$

Dans le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2, on parvient à démontrer directement l'existence d'une fonction $K''^{G,H,\rho}_P$ (nécessairement unique) qui vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii)$'$.

Pour cela, on montre que, en chaque place x, une certaine transformation de Fourier sur $G(F_x) \times H(F_x)$ échange les $K^{G,H,\rho}_{x,P_x}(\bullet, \bullet)$ et les $K^{G,H,\rho}_{x,P_x}(\bullet, w_2\, \bullet)$.

Le résultat cherché s'obtient comme conséquence d'une formule de Poisson dont les termes complémentaires au bord font apparaître les fonctions $K''^{G,H,\rho}_P$.