COURS À L'INSTITUT TATA SUR LES CHTOUCAS DE DRINFELD ET LA CORRESPONDANCE DE LANGLANDS

Laurent LAFFORGUE

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Juin 2002

IHES/M/02/45

Cours à l'Institut Tata sur les chtoucas de Drinfeld et la correspondance de Langlands

Laurent Lafforgue

Introduction

Ce texte est constitué des notes de douze heures de cours données à l'Institut Tata (en anglais) au mois de février 2001, dans le cadre d'une année spéciale sur le programme de Langlands géométrique.

L'auteur n'a pas voulu arranger ses notes si bien que le texte est informel et cherche plutôt à "raconter" les grandes lignes de la démonstration de la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions, en insistant sur quelques points principaux. L'auteur espère que cela facilitera l'accès aux articles en forme mais difficiles [Lafforgue, 1998 et 2002].

Le premier chapitre contient l'énoncé de la correspondance de Langlands, la définition des chtoucas de Drinfeld et de leurs structures de niveau et les propriétés de leurs champs modulaires, le procédé de troncature par le polygone canonique de Harder-Narasimhan, les formules de comptage des points fixes (tirées de [Lafforgue, 1997]), l'annonce des compactifications et le principe de base de distinction entre cohomologie essentielle et cohomologie négligeable.

Le chapitre II donne la structure des compactifications sans structures de niveau, le théorème de stabilité globale par les correspondances de Hecke qui permet de mettre des structures de niveau, le procédé de séparation de la cohomologie essentielle et de la cohomologie négligeable par des arguments de fonctions L de paires (tant automorphes que galoisiennes), la définition de l'action de l'algèbre de Hecke sur la cohomologie essentielle, le calcul de cette représentation par ses traces obtenues par un "théorème de points fixes" sur un ouvert qui n'est pas stabilisé globalement par les correspondances de Hecke mais seulement "localement au voisinage des points fixes".

Le chapitre III construit les compactifications sans niveau en utilisant les "homomorphismes complets". Plus précisément, il introduit un "fourre-tout" qui est un champ non séparé qui contiendra comme ouverts toutes les compactifications associées aux différents polygones de troncature, et il présente le dévissage des strates de bord.

Le chapitre IV définit par des troncatures les compactifications ouvertes dans le fourre-tout, il analyse les troncatures induites sur les strates de bord et il énonce le théorème de lissité et le théorème principal de propreté. Il énonce le théorème de lissité du morphisme de restriction à un niveau et en déduit la construction et les principales propriétés des compactifications totales ou partielles avec structures de niveau.

Le chapitre V entame la vérification du critère valuatif de propreté. Il se focalise d'abord sur la fibre générique du chtouca qu'il s'agit de faire dégénérer, avec sa structure de φ-espace, et introduit la notion de φ-réseau itéré dans ce φ-espace. Il explique qu'il existe toujours une infinité de φ-réseaux itérés, que chacun induit une dégénérescence du chtouca et qu'il s'agit de montrer qu'un et un seul a les propriétés dictées par le polygone de troncature choisi. Il introduit le procédé de "transformation élémentaire" pour passer d'un φ-réseau itéré à un autre. Il définit la notion générale de "dégénérateur", suit les familles de dégénérateurs dans les transformations élémentaires des φ-réseaux itérés et en déduit le "théorème de stabilité globale par les correspondances de Hecke".

Le chapitre VI (qui n'a pas été donné oralement faute de temps) construit par une suite de transformations élémentaires un φ-réseau itéré qui vérifie toutes les propriétés requises. Il est beaucoup plus précis que les précédents et redonne d'une façon un peu différente la démonstration de l'article [Lafforgue, 1998]. Il corrige aussi une (petite) erreur dans la dernière page de cette démonstration qui a été signalée à l'auteur par Yakov Varshavsky (voir les remarques à la fin du texte).

L'auteur est très heureux de remercier les auditeurs de son cours pour leur écoute attentive et toutes leurs questions, il remercie beaucoup les mathématiciens et les responsables de l'Institut Tata pour leur invitation, il remercie aussi beaucoup Yakov Varshavsky pour sa relecture et sa vigilance et une fois encore il remercie Madame Cheikhchoukh de l'IHES qui a assuré la frappe de ce texte avec la rapidité et le soin qu'elle y met toujours.

I. Principe de la démonstration

On considère toujours :

X = courbe projective, lisse (géométriquement connexe)$/\mathbb{F}_q$
$F = F(X)$ = corps des fonctions rationnelles sur X
$|X| = \{$points fermés de $X\}$ $\qquad |X| \ni x \mapsto F_x \supset O_x$
$\mathbb{A} = \prod_{x \in |X|} F_x \supset O_{\mathbb{A}} = \prod_{x \in |X|} O_x$
$\deg : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{Z} \quad \mathbb{A}^{\times 0} = \mathrm{Ker}[\mathbb{A}^\times \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}]$

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})^0 = \mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \xrightarrow{\det} \mathbb{A}^\times \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}]\,.$$

On choisit $a \in \mathbb{A}^\times$, $\deg(a) \neq 0$.
$F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0}$, $F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / a^{\mathbb{Z}}$ compacts
$\mathrm{GL}_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})^0$, $\mathrm{GL}_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ de volume fini mais non compact, si $r \geq 2$.
$\{\pi\}_r = \{$représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ dont le caractère central χ_π est d'ordre fini$\}$
$\{\pi\}_r \ni \pi$
$|X| \ni x$ non ramifiée $\mapsto z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$ valeurs propres de Hecke.
$\{\sigma\}_r = \{$représentations ℓ-adiques irréductibles de dimension r de G_F, dont le déterminant est d'ordre fini$\}$
$\{\sigma\}_r \ni \sigma$
$|X| \ni x$ non ramifiée $\mapsto z_1(\sigma_x), \ldots, z_r(\sigma_x)$ valeurs propres de Frob_x.

Théorème. – $(\mathrm{i})_r$ *Pour toute $\pi \in \{\pi\}_r$, il existe une unique $\sigma = \sigma_\pi \in \{\sigma\}_r$, non ramifiée là où π est non ramifiée, avec*

$$\{z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)\} = \{z_1(\sigma_x), \ldots, z_r(\sigma_x)\}\,.$$

$(\mathrm{ii})_r$ *Pour toute $\sigma \in \{\sigma\}_r$, il existe une unique $\pi \in \{\pi\}_r$ telle que $\sigma = \sigma_\pi$.*

Réductions :

- $r = 1$: théorie du corps de classes
- Unicité dans (i) : th. de densité de Chebotarev

- Unicité dans (ii) : th. de “multiplicité 1 fort” de Piatetski-Shapiro

Démonstration *par récurrence* sur r.

On suppose que $r \geq 2$ et $(\mathrm{i})_{r'}$, $(\mathrm{ii})_{r'}$ sont connues pour $r' < r$.

Alors $(\mathrm{ii})_r$ est aussi connue. Cela utilise :

– les “théorèmes réciproques” de Piatetski-Shapiro (arguments de fonctions L de paires),

– les assertions $(\mathrm{i})_{r'}$ avec $r' < r$,

– les équations fonctionnelles de Grothendieck,

– la formule du produit de Laumon.

Il reste à construire

$$\pi \mapsto \sigma_\pi\,, \qquad \{\pi\}_r \to \{\sigma\}_r\,.$$

Les $\pi \in \{\pi\}_r$ sont aussi des modules irréductibles sur l'algèbre de Hecke

$$\mathcal{H}^r = C_c^\infty(\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})) + \text{convolution}$$

$$(\mathrm{dg} \text{ mesure de Haar normalisée par } \mathrm{dg}(K) = 1)$$

$K = K_\emptyset = \mathrm{GL}_r(O_\mathbb{A}) = \varprojlim\limits_N \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$

$$N \underset{\text{fini}}{=} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N \underset{\text{fermé}}{\hookrightarrow} X : \textit{niveau.}$$

Pour tout niveau N, on note

$$K_N = \mathrm{Ker}[K \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)]\,.$$

$\mathcal{H}^r$ est la réunion filtrante des sous-algèbres unitaires

$$\mathcal{H}^r_N = C_c(K_N \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) / K_N) + \text{convolution}\,.$$

On note

$$\{\pi\}_r^N = \{\pi \in \{\pi\}_r \mid \pi^{K_N} \neq 0 \quad \text{et} \quad \chi_\pi(a) = 1\}\,.$$

C'est un ensemble fini.

Si $\pi \in \{\pi\}_r^N$, π^{K_N} est un module irréductible sur $\mathcal{H}_N^r$ et il caractérise π. Il suffit de construire

$$\pi \mapsto \sigma_\pi \, , \qquad \{\pi\}_r^N \to \{\sigma\}_r \, .$$

Pour cela, nous allons considérer les champs

$$\mathrm{Cht}_N^r$$

de chtoucas de Drinfeld de rang r avec structures de niveau N. Ils sont munis de

- un morphisme lisse de dimension $2r-2$

$$(\infty, 0) : \mathrm{Cht}_N^r \to (X - N) \times (X - N) \, ,$$

- une action des groupes

$$F^\times \backslash \mathbb{A}^\times \qquad \text{et} \qquad \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$$

se prolongeant en une action par correspondances de l'algèbre de Hecke

$$\mathcal{H}_N^r \, .$$

Conséquence : Si $F^2 = F(X \times X) =$ corps des fonctions sur $X \times X$, les espaces de cohomologie ℓ-adique à supports compacts

$$H_c^*(\mathrm{Cht}_N^r)$$

au-dessus du point générique de $X \times X$ sont munis d'une action de $\mathcal{H}_N^r$ et de G_{F^2}.

Notre objectif : *Si $q', q'' : X \times X \rightrightarrows X$ sont les 2 projections, isoler dans*

$$H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r / a^{\mathbb{Z}})$$

un morceau de la forme

$$\bigoplus_{\pi \in \{\pi\}_r^N} \pi^{K_N} \otimes q'^* \, \sigma_\pi \otimes q''^* \, \check{\sigma}_\pi(1-r) \, .$$

Définition de Cht^r et des Cht_N^r :

Ils sont solutions de problèmes de modules.

Définition (Drinfeld). – (i) *Pour tout schéma $S/\mathbb{F}_q$, un chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ de rang r sur S consiste en :*

- *un fibré $\mathcal{E}$ de rang r sur $X \times S$,*

- *une modification de $\mathcal{E}$ c'est-à-dire un diagramme*

$$\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}''$$

  où $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ = fibrés de rang r sur $X \times S$, j, t = plongements tels que Coker j et Coker t sont supportés par les graphes de 2 morphismes

$$\infty, 0 : S \to X$$

  et sont inversibles sur $\mathcal{O}_S$,

- *un isomorphisme*

$${}^\tau\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''.$$

(ii) *Si $\infty, 0 : S \to X$ évitent N, une structure de niveau N sur $\mathcal{E}$ est un isomorphisme*

$$v : \mathcal{E}_N = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times S}} \mathcal{O}_{N\times S} = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^r_{N\times S}$$

rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_N \arrow[r, "\sim"] \arrow[drr, "v"', "\sim"] & \mathcal{E}'_N & \mathcal{E}''_N \arrow[l, "\sim"'] & {}^\tau\mathcal{E}_N \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dl, "{}^\tau v", "\sim"'] \\
 & & \mathcal{O}^r_{N\times S} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cht}^r &= \text{champ des chtoucas de rang } r \\
&= \text{champ algébrique au sens de Deligne-Mumford} \\
(\infty, 0) &= \mathrm{Cht}^r \to X \times X \text{ lisse de dimension } 2r-2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cht}^N_r &= \text{champ des chtoucas de rang } r \text{ avec structure de niveau } N \\
&= \text{champ algébrique au sens de Deligne-Mumford.}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Cht}_N^r \to \mathrm{Cht}^r \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$ est représentable fini étale galoisien de groupe $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

Action de $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$:

$$F^\times\backslash\mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \cong \{\text{fibrés inversibles } \mathcal{L} \text{ sur } X\}$$

$F^\times\backslash\mathbb{A}^\times/(O_{\mathbb{A}}^\times\cap K_N) \cong \{$fibrés inversibles $\mathcal{L}$ sur X avec structures de niveau $N\}$ d'où l'action sur $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{E})$ par

$$(\mathcal{L},\widetilde{\mathcal{E}}) \mapsto \mathcal{L}\otimes\widetilde{\mathcal{E}}\,.$$

Action de $\mathcal{H}_\emptyset^r$ sur Cht^r :

Il suffit de préciser la correspondance associée à une double classe $K\cdot g\cdot K$, avec $g=(g_x)_{x\in|X|}\in\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Soit $T\subset|X|$ un sous-ensemble fini tel que :

$$x\notin T \Rightarrow g_x\in\mathrm{GL}_r(O_x)\,.$$

Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un chtouca sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ dont le zéro et le pôle sont dans $U=X-T$.

Pour $x\in T$, $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X} O_x$ définit un réseau fixé par Frob dans $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X} F_x$ et il existe un isomorphisme respectant Frob

$$\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X} F_x \cong (F_x\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q)^r$$

tel que $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X} O_x$ provienne d'un réseau de F_x^r.

Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ un autre chtouca tel que $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X} F_x$ et $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X} F_x$ s'identifient. Les 2 réseaux

$$\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X} O_x \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X} O_x$$

définissent un élément de

$$\mathrm{GL}_r(O_x)\backslash\mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x)$$

qui ne dépend pas de l'isomorphisme

$$\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X} F_x = \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X} F_x \cong (F_x\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}}_q)^r\,.$$

Un point $(\widetilde{\mathcal{E}},\widetilde{\mathcal{F}})$ de la correspondance $K\cdot g\cdot K$ consiste en

- deux chtoucas $\widetilde{\mathcal{E}}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ dont les zéros et pôles sont dans $X - T$,
- une identification entre leurs restrictions à $X - T = U$ (induisant des identifications $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} F_x = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} F_x$, $\forall\, x$),

tels que pour tout $x \in T$, la paire de réseaux

$$(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} O_x, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} O_x)$$

définisse l'élément $g_x \in \mathrm{GL}_r(O_x) \backslash \mathrm{GL}_r(F_x) / \mathrm{GL}_r(O_x)$.

Remarque très importante : *Si $\widetilde{\mathcal{E}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont 2 chtoucas qui se correspondent au sens de Hecke, ils s'identifient sur un ouvert non vide de X.*

On remarque

$$\mathrm{Cht}^r = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Cht}^{r,\mathrm{d}}$$

où chaque $\mathrm{Cht}^{r,\mathrm{d}}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Pour cette raison, on forme

$$\mathrm{Cht}^r / a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1 \leq d \leq r |\deg(a)|} \mathrm{Cht}^{r,\mathrm{d}} .$$

Il a un nombre fini de composantes connexes et il est localement de type fini, mais

il n'est pas de type fini

$\rightsquigarrow$ les $H_c^*(\mathrm{Cht}_N^r / a^{\mathbb{Z}})$ sont de dimension infinie,
$\rightsquigarrow$ pour $x \in |(X - N) \times (X - N)|$, $\deg(x) \mid s$ et $f \in \mathcal{H}_N^r$, le nombre de points fixes

$$\mathrm{Lef}_x(f \times \mathrm{Frob}^s, \mathrm{Cht}_N^r / a^{\mathbb{Z}})$$

est infini.

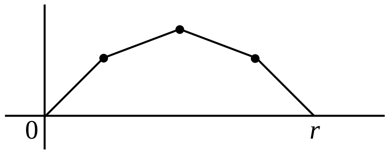
Troncatures par le polygone canonique de Harder-Narasimhan

Si $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow {}^\tau\mathcal{E})$ est un chtouca sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, un sous-objet $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ consiste en deux sous-fibrés $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{E}'$ de même rang tel que $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$ et ${}^\tau\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$.

On peut poser

$$\mathrm{rg}\, \widetilde{\mathcal{F}} = \mathrm{rg}\, \mathcal{F} = \mathrm{rg}\, \mathcal{F}'$$

et $\deg \widetilde{\mathcal{F}} = \deg \mathcal{F}$.



On appelle polygone une application $p : [0,r] \to \mathbb{R}$ tel que

- $p(0) = p(r) = 0$
- p est affine sur chaque intervalle $[r'-1, r']$, $0 < r' \leq r$.

Le polygone canonique de Harder-Narasimhan $\overline{p}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est le plus petit polygone tel que pour tout sous-objet $\overline{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$

$$\deg \widetilde{\mathcal{F}} - \frac{\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}}}{r} \deg \widetilde{\mathcal{E}} \leq p(\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}})\,.$$

Il est convexe.

Proposition. – *Pour p un polygone convexe de troncature,*

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} & \subset & \mathrm{Cht}^{r,d} & \mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p} \\ \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} & \subset & \mathrm{Cht}^{r}/a^{\mathbb{Z}} & \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

sont des ouverts de type fini.

Théorème. – *Pour $x \in |(X-N)\times(X-N)|$ s'envoyant sur $\infty \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$ avec $\deg(x) \mid s$ et $f \in \mathcal{H}_N^r$, on a la formule de comptage des points fixes*

$$\frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r!} \mathrm{Lef}_{(\mathrm{Frob}_X^k \times \mathrm{Id}_X)(x)}(f \times \mathrm{Frob}^s, \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$$

$$= q^{(r-1)s} \sum_{\pi \in \{\pi\}_N^r} \mathrm{Tr}_\pi(f)(z_1(\pi_\infty)^{-s/\deg(\infty)} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s/\deg(\infty)})$$

$$(z_1(\pi_0)^{s/\deg(0)} + \cdots + z_r(\pi_0)^{s/\deg(0)})$$

+ autres termes où apparaissent les valeurs propres de Hecke des repr. aut. cusp. des $\mathrm{GL}_{r_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{r_k}$,

$$r_1 + \cdots + r_k = r \qquad (k \geq 2)\,.$$

Ingrédients :

- formule des traces d'Arthur-Selberg,
- description adélique des chtoucas (Drinfeld),
- lemme fondamental (fonctions sphériques de Drinfeld).

Remarque très importante : Le terme principal ne dépend pas de p.

Il correspond exactement à la représentation cherchée

$$\bigoplus_{\pi} \pi \otimes q'^{*}\, \sigma_{\pi} \otimes q''^{*}\, \check{\sigma}_{\pi}(1-r)\,.$$

Nouveau problème qui se pose : Les ouverts $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ ne sont pas stables par les correspondances de Hecke $f \in \mathcal{H}_N^r$.

La formule des points fixes n'a pas de sens cohomologique (sauf pour la correspondance unité $\mathbb{1}_N$).

Idée : Construire des compactifications $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ des $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ de façon à étendre les correspondances f par normalisation et retrouver une action sur la cohomologie.

$\rightarrow$ Quand $N=\emptyset$, on construira $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ propre et lisse sur $X\times X$.

Quand $N\neq\emptyset$, ce sera plus compliqué ...

Nouveau problème : Les correspondances de Hecke prolongées par normalisation agissent individuellement sur la cohomologie mais elles ne définissent pas une action de $\mathcal{H}_N^r$.

En résumé :

chtoucas		troncature		compactification
$\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}$	$\hookleftarrow$	$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$	$\hookrightarrow$	$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$
$\vdots$ $\downarrow$		$\vdots$ $\downarrow$		$\vdots$ $\downarrow$
• lisse de dim $2r-2$ sur $(X-N)\times(X-N)$		• de type fini		• propre et lisse sur $X\times X$ (si $N=\emptyset$)
• action de $\mathcal{H}_N^r$		• comptage des points fixes		• correspondances agissant sur la cohomologie
mais		**mais**		**mais**
• pas de type fini		• plus de correspondances de Hecke		• pas d'action de $\mathcal{H}_N^r$ • pas de comptage des points fixes

Idée : Isoler dans la cohomologie ℓ-adique de ces 3 objets un morceau qui sera le même pour les 3 et le calculer.

Définition. – *Une représentation ℓ-adique irréductible de G_{F^2} sera dite r-négligeable si elle est facteur direct d'une représentation de la forme*

$$q'^*\,\sigma_1 \otimes q''^*\,\sigma_2 \qquad (q',q'' : X\times X \rightrightarrows X)$$

avec σ_1,σ_2 deux représentations irréductibles de G_F de dimensions $< r$. Elle sera dite essentielle sinon.

On montrera : Les 3 objets ont la même cohomologie essentielle. Elle est

$$\bigoplus_{\pi\,\in\,\{\pi\}_N^r} \pi \otimes q'^*\,\sigma_\pi \otimes q''^*\,\check{\sigma}_\pi(1-r)\,.$$

II. Les grandes lignes de la démonstration

Compactifications dont le bord est r-négligeable

• Le cas sans niveau : $N = \emptyset$

Pour tout polygone de troncature $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ (assez convexe), il existe une compactification

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1 \leq d \leq r|\deg(a)|} \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$$

de $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ telle que :

- $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ est propre et lisse sur $X \times X$,
- il est même lisse sur :

$$\begin{array}{ccccc} X & \times & X & \times & \mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1} \\ & & & & \updownarrow \\ & & & & \text{bord} = \text{diviseur à croisements normaux} \end{array}$$

- ses strates de bord sont indexées par les partitions

$$\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k) \rightsquigarrow \text{notées } \mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p}$$

et sont essentiellement de la forme

$$\mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1} \times_X \cdots \times_X \mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k} \,;$$

elles sont munies de morphismes sur :

$$\begin{array}{ccccc} X & \times & X^{k-1} & \times & X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{pôle} & & \text{“dégénérateurs”} & & \text{zéro} \end{array}$$

Proposition. – *Sous les hypothèses de récurrence, la cohomologie (ℓ-adique à supports compacts) des strates de bord*

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p}$$

est r-négligeable.

Démonstration. – On calcule la cohomologie en 2 temps :

$$\begin{array}{l} \mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\le p_1} \times_X \cdots \times_X \mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\le p_k} \\ \qquad\qquad \big\downarrow \text{ cohomologie sur } X \times X^{k-1} \times X \\ (q_0^*\,\sigma_1 \otimes q_1^*\,\sigma_1') \otimes \cdots \otimes (q_{k-1}^*\,\sigma_k \otimes q_k^*\,\sigma_k') \text{ (avec } \dim \sigma_i, \sigma_i' < r\,,\ \forall\, i) \\ \qquad\qquad \big\downarrow \text{ cohomologie sur } X \times X \\ (\sigma_1 \otimes \sigma_k') \otimes \lambda \text{ (avec } \lambda = \text{caractère de } \widehat{\mathbb{Z}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q)) \end{array}$$

• **Le cas avec niveau $N \neq 0$:**

$\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$ est un revêtement fini étale galoisien (de groupe $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$) de $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$. Soit

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}} = \coprod_{1\le d\le r|\deg(a)|} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}/a^{\mathbb{Z}}$$

la normalisation de $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$ dans $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}/a^{\mathbb{Z}}$.

Elle est propre sur $(X-N)\times(X-N)$ mais elle *n'est pas lisse.* Soit

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}} = \coprod_{1\le d\le r|\deg(a)|} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\le p}}'$$

l'ouvert défini par la condition que non seulement le pôle ∞ et le zéro 0 mais aussi les *dégénérateurs évitent* N.

Théorème de stabilité. – *Les correspondances de Hecke $f \in \mathcal{H}_N^r$ stabilisent l'ouvert* $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}}$.

Proposition. – (i) $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\le p}}'/a^{\mathbb{Z}}$ *est lisse sur $X\times X$ et même sur*

$$\begin{array}{lllll} X & \times & X & \times & \mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1} \\ & & & & \quad\updownarrow \\ & & & & \textit{bord} = DCN \\ & & & & \textit{strates indexées par les partitions } \underline{r} = (r = r_1+\cdots+r_k) \end{array}$$

(ii) *La cohomologie de ses strates de bord est r-négligeable* (*sous les hypothèses de récurrence*).

Corollaire. – *Chaque $f \in \mathcal{H}_N^r$ agit sur la cohomologie de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$.*

On note :

$\pi^1_{(X-N)\times(X-N)}$ le groupe fondamental de $(X-N)\times(X-N)$,
$W_{(X-N)\times(X-N)} = \pi^1_{(X-N)\times(X-N)} \times_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$ son groupe de Weil.

Lemme. – *Il existe une combinaison linéaire formelle $H^*_{N,\mathrm{cusp}}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de représentations irréductibles de $W_{(X-N)\times(X-N)}$ telle que :*

(i) *Toutes les composantes de la différence*

$$H^*_{N,\mathrm{cusp}} - \frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r!}(\mathrm{Frob}_X^k \times \mathrm{Id}_X)^*\, H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})$$

sont r-négligeables (où $H_c^*(\cdot) = \sum\limits_{\nu}(-1)^\nu H_c^\nu(\cdot)^{ss}$ est la cohomologie "alternée" au-dessus du point générique de $X\times X$).

(ii) *Pour tout $x \in |X\times X|$ au-dessus de $\infty \neq 0 \in |X-N|$ et pour tout multiple $s = \deg(\infty)s' = \deg(0)u'$ de $\deg(x)$*

$$\mathrm{Tr}_{H^*_{N,\mathrm{cusp}}}(\mathrm{Frob}_x^{-\frac{s}{\deg(x)}}) = q^{(r-1)s}\sum_{\substack{\pi\in\{\pi\}_r^N \\ \chi_\pi(a)=1}}(z_1(\pi_\infty)^{-s'}+\cdots+z_r(\pi_\infty)^{-s'})$$
$$(z_1(\pi_0)^{u'}+\cdots+z_r(\pi_0)^{u'})\,.$$

Ingrédients :

- formule de comptage des points fixes,
- correspondance $\pi' \mapsto \sigma_{\pi'}$ déjà connue en rangs $< r$.

Proposition. – *Aucune des composantes irréductibles de $H^*_{N,\mathrm{cusp}}$ n'est r-négligeable. Toutes apparaissent avec des multiplicités positives et sont pures de poids 0 ($\Leftrightarrow$ conjecture de Ramanujan-Petersson).*

Démonstration. –

• Dans l'énoncé du lemme, on peut remplacer

$$H_c^*(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}) \quad \text{par} \quad IH_c^*(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$$

(ce qui rend possible des arguments de pureté).

• Soit $H = H^*_{N,\mathrm{cusp}}(r-1)$. Les composantes de H sont pures de poids dans $]-2,2[$ (estimée de Jacquet et Shalika) et symétriques.

Soit $q'^*\,\sigma' \otimes q''^*\,\sigma''$ une représentation de $W_{(X-N)\times(X-N)}$ r-négligeable et pure de poids 0. On a $\sigma' = \sigma_{\pi'}$, $\sigma'' = \sigma_{\pi''}$ avec $\pi' \in \{\pi\}_{r'}$, $\pi'' \in \{\pi\}_{r''}$, $r', r'' < r$.

• Pour $\pi \in \{\pi\}_r^N$, la fonction $\mathrm{L}(\pi \times \check{\pi}', Z)$ n'a pas de pôle dans une zone $|Z| < q^{-1+\varepsilon}$ (avec $\varepsilon > 0$ assez petit) et la série

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\pi\times\check{\pi}',Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\pi\times\check{\pi}',Z)} &= \sum_{\infty\,\in\,(X-N)} \deg(\infty) \sum_{k\geq 1} (z_1(\pi_\infty)^{-k} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-k}) \\ &\quad (z_1(\pi'_\infty)^k + \cdots + z_{r'}(\pi'_\infty)^k)\, Z^{k\deg(\infty)-1} \\ &= \sum_{s\geq 1} Z^{s-1} \sum_{\substack{\infty\,\in\,|X-N| \\ \frac{s}{\deg(\infty)} = s'\,\in\,\mathbb{N}}} \deg(\infty) \\ &\quad (z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'}) \\ &\quad (z_1(\pi'_\infty)^{s'} + \cdots + z_{r'}(\pi'_\infty)^{s'})\end{aligned}$$

converge absolument dans $|Z| < q^{-1+\varepsilon}$.

• De même pour $\frac{\mathrm{L}'_{X-N}(\check{\pi}\times\check{\pi}'',Z)}{\mathrm{L}_{X-N}(\check{\pi}\times\check{\pi}'',Z)}$.

• Donc la série "produit" (terme à terme)

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq 1} Z^{n-1} \sum_{\substack{\infty,0\,\in\,|X-N| \\ \frac{s}{\deg(\infty)} = s'\,\in\,\mathbb{N},\ \frac{s}{\deg(0)} = u'\,\in\,\mathbb{N}}} \deg(\infty)\deg(0) \\ &(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'})(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'}) \\ &(z_1(\pi'_\infty)^{s'} + \cdots + z_{r'}(\pi'_\infty)^{s'})(z_1(\pi''_0)^{u'} + \cdots + z_{r''}(\pi''_0)^{u'})\end{aligned}$$

est absolument convergente pour $|Z| < q^{-2+2\varepsilon}$.

• Comme $\sigma' = \sigma_{\pi'}$, et $\sigma'' = \sigma_{\pi''}$, la série

$$\frac{\mathrm{L}'_{(X-N)\times(X-N)}(H\otimes(\check{\sigma}'\otimes\check{\sigma}''),Z)}{\mathrm{L}_{(X-N)\times(X-N)}(H\otimes(\check{\sigma}'\otimes\check{\sigma}''),Z)}$$

converge absolument pour $|Z| < q^{-2+2\varepsilon}$.

$\Rightarrow$ Donc le morceau de poids maximal (≥ 0) de H n'a aucune composante r-négligeable.

$\Rightarrow$ S'il était de poids > 0, ce serait de poids 1, il proviendrait de H^{2r-1} $(\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$ et ferait apparaître des coefficients -1.

$\Rightarrow$ H est pure de poids 0 et n'a pas de composante r-négligeable.

Conclusion de ce qui précède : La partie essentielle (= non r-négligeable) de la cohomologie est concentrée en degré moitié $2r-2$.

Elle est la même dans tous les

$$H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})\,,\ IH_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}})$$

et aussi $H_c^{2r-2}(\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}})$.

Action de $\mathcal{H}_N^r$ (et de Frob_∞, Frob_0**) :** Soit

$$H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}}) = \varinjlim_p H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}})\,.$$

Il est muni d'actions de :

- l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_N^r$,
- $W_{(X-N)\times(X-N)}$,
- des 2 "endomorphismes de Frobenius partiels" Frob_∞, Frob_0 au-dessus de $\mathrm{Frob}_X\times\mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X\times\mathrm{Frob}_X$ (avec $\mathrm{Frob}_\infty\circ\mathrm{Frob}_0=\mathrm{Frob}_0\circ\mathrm{Frob}_\infty=\mathrm{Frob}$).

• Cela se résume en une action de

$$\mathcal{H}_N^r\times(W_{(X-N)\times(X-N)}\rtimes\mathbb{Z})\,.$$

Lemme. – *Il existe une filtration finie*

$$0=H_0\subsetneq H_1\subsetneq\cdots\subsetneq H_m=H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r/a^{\mathbb{Z}})$$

respectée par $\mathcal{H}_N^r\times(W_{(X-N)\times(X-N)}\rtimes\mathbb{Z})$ telle que

- *$\forall\, i$, H_{2i+1}/H_{2i} n'a que des composantes r-négligeables,*
- *$\forall\, i$, H_{2i+2}/H_{2i+1} n'a que des composantes essentielles.*

Démonstration. – On note $H = H_c^{2r-2}(\mathrm{Cht}_N^r /a^{\mathbb{Z}})$.

• On pose $H_0 = 0$.

• Pour H_{2i} déjà défini, on pose :
H_{2i+1}/H_{2i} = somme des sous-représentations de dim finie de H/H qui sont r-négligeables ($\Leftrightarrow$ leurs sous-quotients irréductibles sont r-négligeables)
H_{2i+2}/H_{2i+1} = somme des sous-représentations de dimension finie de H/H_{2i+1} qui sont essentielles.

• Alors :

- les H_i sont stabilisés par toutes les actions,

- si $i \geq 1$ et $H/H_i \neq 0$, on a $H_i \subsetneq H_{i+1}$,

- comme $\bigoplus\limits_i H_{2i+2}/H_{2i+1}$ est de dimension bornée, on a $H_i = H$ si $i \gg 0$.

$\Rightarrow$ D'où une représentation semi-simple $H_{N,\,\mathrm{cusp}}$ de $\mathcal{H}_N^r \times (W_{(X-N)\times(X-N)} \rtimes \mathbb{Z})$ dont la semi-simplifiée comme représentation de $W_{(X-N)\times(X-N)}$ est $H^*_{N,\,\mathrm{cusp}}$.

Théorème. – *Soit* $f \in \mathcal{H}_N^r$.

Pour tout point fermé $x \in |X \times X|$ *au-dessus de* $\infty \neq 0 \in |X - N|$ *et pour tout multiple* $s = \deg(\infty)\, s' = \deg(0)\, u'$ *de* $\deg(x)$, *on a*

$$\mathrm{Tr}_{H_{N,\,\mathrm{cusp}}}(f \times \mathrm{Frob}_x^{-\frac{s}{\deg(x)}}) = q^{(r-1)s} \sum_{r\,\in\,\{\pi\}_N^r} \mathrm{Tr}_\pi(f)$$

$$(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'})(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'})\,.$$

Esquisse de démonstration. –

• L'action de $f \in \mathcal{H}_N^r$ sur $H_{N,\,\mathrm{cusp}}$ est la même que sur la partie essentielle de $H_c^{2r-2}(\mathcal{X})$ où

$$\mathcal{X} = \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \qquad \text{si} \qquad N = \emptyset\,,$$

$$\mathcal{X} = \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}} \qquad \text{si} \qquad N \neq \emptyset\,.$$

• On rappelle que le bord de $\mathcal{X}$ est un DCN dont les strates $\mathcal{X}_{\underline{r}}$ sont indexées par les partitions $\underline{r} = (r_1 + \cdots + r_k = r)$ avec $k = |\underline{r}| \geq 2$. On a la formule générale de points fixes :

Proposition. – *Il existe des correspondances cohomologiques* $\mathrm{cl}(f)_{\underline{r}}$ *dans les strates de bord* $\mathcal{X}_{\underline{r}}$ *telles que pour tout* x *et tout* s *assez grand*

$$\mathrm{Lef}_x(f \times \mathrm{Frob}^s, \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \leq p}/a^{\mathbb{Z}}) = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \operatorname{Tr}_{H_c^{\nu}(\mathcal{X})}(f \times \mathrm{Frob}_x^{-\frac{s}{\deg(x)}})$$

$$+ \quad \sum_{\underline{r}} (-1)^{|\underline{r}|-1} \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \operatorname{Tr}_{H_c^{\nu}(\mathcal{X}_{\underline{r}})}(\mathrm{cl}(f)_{\underline{r}} \times \mathrm{Frob}_x^{-\frac{s}{\deg(x)}}) \,.$$

Ingrédients : C'est inspiré d'arguments de Pink.

- Formule d'adjonction.
- Dans $\mathcal{X} = \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ ou $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}$, les correspondances de Hecke $f \in \mathcal{H}_N^r$ stabilisent l'ouvert des chtoucas

$$\mathcal{X}_{\emptyset} = \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p} \leq p}/a^{\mathbb{Z}}$$

  "*au voisinage de leurs points fixes*".
- Dans le cas où $\mathcal{X}$ n'est pas propre ($N \neq \emptyset$), théorème de Fujiwara sur la conjecture de Deligne (pour annuler les termes à l'infini dans la formule des points fixes).

Fin de la démonstration du théorème. –
• On combine la formule de comptage et la formule de points fixes de la proposition pour obtenir

$$\sum_{\nu} (-1)^{\nu} \operatorname{Tr}_{H_c(\mathcal{X})}(f \times \mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)})$$

$$+ \sum_{\underline{r}} (-1)^{|\underline{r}|-1} \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \operatorname{Tr}_{H_c^{\nu}(\mathcal{X}_{\underline{r}})}(\mathrm{cl}(f)_{\underline{r}} \times \mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)})$$

$$= q^{(r-1)s} \sum_{\pi \in \{\pi\}_N^r} \operatorname{Tr}_{\pi}(f)(z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'})(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'})$$

+ autres termes où apparaissent les valeurs propres de Hecke des repr. aut. cusp. des $\mathrm{GL}_{r_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{r_k}$,

$$r_1 + \cdots + r_k = r \qquad (k \geq 2) \,.$$

• On conclut en identifiant la "partie essentielle" des 2 côtés de la formule.

Ingrédients :

$$\left.\begin{array}{l}\text{- les } H_c^{\nu}(\mathcal{X}_{\underline{r}}) \text{ sont } r\text{-négligeables,}\\ \text{- la correspondance } \pi' \mapsto \sigma_{\pi'} \text{ est déjà connue en rangs } < r'\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{hypothèses de}\\ \text{récurrence}\end{array}$$

- arguments de fonctions L de paires (automorphes et galoisiennes).

Corollaire. – *Pour toute* $\pi \in \{\pi\}_r^N$*, il existe une représentation* ℓ*-adique* H_π *de* $W_{(X-N)\times(X-N)} \rtimes \mathbb{Z}$*, pure de poids* 0*, telle que pour tout* $x \mapsto (\infty, 0)$ *et tout multiple* $s = \deg(\infty)\, s' = \deg(0)\, u'$ *de* $\deg(x)$

$$\mathrm{Tr}_{H_\pi}(\mathrm{Frob}_x^{-s/\deg(x)}) = (z_1(\pi_\infty)^{-s'} + \cdots + z_r(\pi_\infty)^{-s'})(z_1(\pi_0)^{u'} + \cdots + z_r(\pi_0)^{u'})\,.$$

Théorème. – *Pour* $\pi \in \{\pi\}_r^N$*, il existe une représentation* σ *de* W_{X-N}*, pure de poids* 0*, et irréductible de dimension* r*, telle que*

$$H_\pi \cong q'^*\,\sigma \otimes q''^*\,\check{\sigma} \qquad (q', q'' : X \times X \rightrightarrows X)$$

comme représentations de $W_{(X-N)\times(X-N)}$*, et que*

$$\sigma = \sigma_\pi\,.$$

III. Compactifications sans niveau

$X =$ courbe projective, lisse (géométriquement connexe)/$\mathbb{F}_q$,
$r \geq 2$ entier.

Ce dont on a besoin :

• On a défini des ouverts

$$\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \subset \mathrm{Cht}^{r,d} \subset \mathrm{Cht}^r$$

de type fini et lisses sur $X \times X$.

• On veut construire des champs $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ tels que

- $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ contient $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ comme ouvert dense,

- le morphisme de structure $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p} \to X \times X$ se prolonge en un morphisme propre et lisse
$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to X \times X \,,$$

- le bord $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} - \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ est un diviseur à croisements normaux relatif,

- la cohomologie ℓ-adique sur $X \times X$ des strates du bord est "r-négligeable",

- dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod\limits_{1\leq d\leq r|\deg(a)|} \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$, les correspondances de Hecke stabilisent l'ouvert $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ "au voisinage de leurs points fixes".

Rappel. – *Un chtouca de rang r sur un schéma $S/\mathbb{F}_q$ consiste en*

(i) *un fibré $\mathcal{E}$ sur $X \times S$ localement libre de rang r,*

(ii) *une modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$,*

(iii) *un isomorphisme ${}^{\tau}\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$.*

Idée : Elargir le problème de modules en remplaçant dans (iii) "isomorphisme" par "homomorphisme complet".

Les homomorphismes complets :

Soient d'abord :
A = anneau de valuation discrète, π_A = uniformisante,
$K_A = \mathrm{Frac}(A) \qquad \kappa_A = A/(\pi_A)$.
Soit $v \in \mathrm{GL}_r(K_A) \cap (M_r - \{0\})(A)$.
On veut comprendre comment u dégénère au-dessus de κ_A. D'après la théorie des diviseurs élémentaires, on peut écrire
$$v = g' \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \pi_A^{d_1} & & & \\ & & \pi_A^{d_1+d_2} & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \pi_A^{d_1+\cdots+d_{r-1}} \end{pmatrix} g$$

avec $d_1, d_2, \dots, d_{r-1} \in \mathbb{N}$ et $g, g' \in \mathrm{GL}_r(A)$.
Soit $\underline{r}$ l'unique partition $(r = r_1 + \cdots + r_k)$ telle que, pour $1 \le s < r$

$$d_s = 0 \Leftrightarrow s \in \begin{array}{c} \underline{r}^- \\ \| \\ \{0, r_1, \dots, r_1 + \cdots + r_{k-1}\} \end{array} \cap \begin{array}{c} \underline{r}^+ \\ \| \\ \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r\} \end{array}.$$

Pour tout s, $1 \le s \le r$, l'homomorphisme

$$\left(\prod_{t<s} \pi_A^{-d_t(s-t)}\right) \cdot \Lambda^s v : \Lambda^s K_A^r \to \Lambda^s K_A^r$$

est à coefficients dans A et sa réduction modulo π_A

$$v_s : \Lambda^s \kappa_A^r \to \Lambda^s \kappa_A^r$$

est non nulle. Si $s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+$, v_s est de rang 1 et se factorise en

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^s \kappa_A^r & \xrightarrow{v_s} & \Lambda^s \kappa_A^r \\ \downarrow\!\!\!\downarrow & & \uparrow \\ \det(\kappa_A^r / F^s) & \xrightarrow{\sim} & \det(E_s) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} F^s & = & \text{sous-espace de codim } s \text{ de } \kappa_A^r, \\ E_s & = & \text{sous-espace de dim } s \text{ de } \kappa_A^r. \end{array}$$

De plus, quand s varie dans $\underline{r}^- \cup \underline{r}^+$

$$\begin{array}{rcl} (F^s) & = & \text{filtration décroissante de } \kappa_A^r, \\ (E_s) & = & \text{filtration croissante de } \kappa_A^r. \end{array}$$

Pour $s \in \left\{ \begin{smallmatrix} \underline{r}^- \\ \underline{r}^+ \end{smallmatrix} \right\}$, on note $\left\{ \begin{smallmatrix} s^+ = \text{ successeur} \\ s^- = \text{ prédécesseur} \end{smallmatrix} \right\}$ de s. Si $s \in \underline{r}^-$, v_{s+1} se factorise en

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{s+1} \kappa_A^r & \xrightarrow{v_{s+1}} & \Lambda^{s+1} \kappa_A^r \\ \downarrow\!\!\!\downarrow & & \uparrow \\ \det(\kappa_A^r / F^s) \otimes (F^s / F^{s^+}) & \xrightarrow{\sim} & \det(E_s) \otimes (E_{s^+} / E_s) \end{array}$$

d'où un isomorphisme induit

$$\overline{v}_s : F^s/F^{s^+} \xrightarrow{\sim} E_{s^+}/E_s\,.$$

Remarque fondamentale : La théorie des diviseurs élémentaires et donc toute la description qui précède sont valables dans n'importe quel anneau local A à condition de supposer que pour tout s l'idéal engendré par les mineurs d'ordre s de u est principal.

Définition. – *Le schéma Ω^r des homomorphismes complets est le schéma déduit de $M_r - \{0\}$ en éclatant successivement les fermés des matrices de rangs ≤ 1, $\leq 2, \ldots, \leq r-1$.*

Proposition. – (i) *Ω^r contient GL_r comme ouvert dense et il est muni de deux actions à droite et à gauche de GL_r.*

(ii) *Ω^r est lisse et son bord est un DCN.*

Plus précisément, il est muni d'un morphisme lisse respecté par GL_r

$$\Omega^r \to (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}\,.$$

(ii) *Les strates de bord $\Omega^r_{\underline{r}}$ de Ω^r sont indexées par les partitions $\underline{r} = (r_1 + \cdots + r_k = r)$. Elles ont une description modulaire.*

D'après (i), on peut parler d'"homomorphisme complet"

$$\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{E}$$

entre 2 fibrés $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ de rang r sur un schéma S.

Cela consiste en

- une famille de fibrés inversibles $\mathcal{L}_s$, $1 \leq s < r$, munis de sections globales ℓ_s sur S,

- des homomorphismes partout non nuls

$$v_s : \Lambda^s\,\mathcal{F} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)} \to \Lambda^s\,\mathcal{E},\ 1 \leq s \leq r\,,$$

 qui vérifient en particulier les relations

$$\Lambda^s\,v_1 = \Big(\prod_{t<s} \ell_t^{(s-t)}\Big) \cdot v_s,\ 1 \leq s \leq r\,.$$

Un tel homomorphisme complet est de type $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$ si on a :

$\ell_s = 0$ si $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$,
ℓ_s est inversible sinon.

Il consiste en

- une famille de fibrés inversibles $\mathcal{L}_s$, $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$,
- une filtration décroissante $(\mathcal{F}^s)_{s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+}$ de $\mathcal{F}$ par les sous-fibrés maximaux de rangs $r - s$,
- une filtration croissante $(\mathcal{E}_s)_{s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+}$ de $\mathcal{E}$ par les sous-fibrés maximaux de rangs s,
- des isomorphismes

$$\mathcal{F}^s / \mathcal{F}^{s^+} \otimes \Big(\bigotimes_{t \leq s} \mathcal{L}_t \Big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{s^+} / \mathcal{E}_s \, .$$

Le champ des chtoucas itérés

Définition. – *Un pré-chtouca itéré de rang r sur un schéma $S/\mathbb{F}_q$ consiste en*

- *un fibré $\mathcal{E}$ de rang r sur $X \times S$,*
- *une modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ (avec $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{E}''$ supportés par les graphes de 2 morphismes $\infty, 0 : S \to X$ et inversibles sur $\mathcal{O}_S$),*
- *des fibrés inversibles $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{r-1}$ sur S munis de sections globales $\ell_1, \ldots, \ell_{r-1}$,*
- *un homomorphisme complet*

$$^{\tau}\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}''$$

dont les fibrés inversibles avec sections associés sur $X \times S$ sont les $(\mathcal{L}_1, \ell_1)^{\otimes (q-1)}, \ldots, (\mathcal{L}_{r-1}, \ell_{r-1})^{\otimes (q-1)}$.

Soit $\mathcal{C}^r$ = champ (algébrique) des pré-chtoucas itérés. Il est muni de

$$\mathcal{C}^r \to (X \times X) \times (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}\,.$$

Soient $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$ ses strates (images réciproques des points de $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}$). Soit $(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \Leftarrow {}^\tau\mathcal{E}\,;\ (\mathcal{L}_s, \ell_s)_{1 \leq s < r})$ un pré-chtouca itéré de type $\underline{r}$.

L'homomorphisme complet ${}^\tau\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}''$ induit deux filtrations par des sous-fibrés maximaux :

- $(\mathcal{E}''_s)$ = filtration croissante de $\mathcal{E}''$,
- $(\overline{\mathcal{E}}_s)$ = filtration décroissante de ${}^\tau\mathcal{E}$.

On considère les conditions suivantes :
(i) Notant $\mathcal{E}'_s = \mathcal{E}''_s$ si $s < r$ et $\mathcal{E}'_r = \mathcal{E}'$, tous les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_s$ sont localement libres sur $\mathcal{O}_{X\times S}$.
(ii) Si $s \in \underline{r}^+$, $\mathcal{E}'_s \to \mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est surjectif, si bien que son noyau $\mathcal{E}_s \hookrightarrow \mathcal{E}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{X\times S}$ (on pose aussi $\mathcal{E}_0 = 0$).
(iii) Pour tout $s \in \underline{r}^+ \cap \underline{r}^-$, on a

$$\overline{\mathcal{E}}_s \cap {}^\tau\mathcal{E}_s = 0 \quad \text{dans} \quad {}^\tau\mathcal{E}$$

et

$$\overline{\mathcal{E}}_s + {}^\tau\mathcal{E}_{s^+} = {}^\tau\mathcal{E}\,.$$

Elles définissent un ouvert $\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}$ de $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$. Leur réunion est un ouvert $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ de $\mathcal{C}^r$: c'est le champ des chtoucas itérés.

- Un chtouca itéré dans $\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}$ consiste en
  - un fibré $\mathcal{E}$ sur $X \times S$ et une modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$,
  - des filtrations $(\overline{\mathcal{E}}_s)$, $(\mathcal{E}''_s)$, $(\mathcal{E}'_s)$, $(\mathcal{E}_s)$ comme ci-dessus,
  - des fibrés inversibles $(\mathcal{L}_s)_{s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+}$ sur la base S,
  - des isomorphismes

$$\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s \otimes \left(\bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes q}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \otimes \left(\bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t\right).$$

Lemme. – *Pour tout $s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$, le quotient*

$$^{\tau}\mathcal{E}/(\overline{\mathcal{E}}_s \oplus {}^{\tau}\mathcal{E}_s)$$

est supporté par le graphe d'un morphisme

$$x_s : S \to X \qquad (\text{“dégénérateur” en rang } s)$$

et inversible sur $\mathcal{O}_S$.

Démonstration. – Il suffit de le montrer quand S est un point géométrique. On sait déjà que $^{\tau}\mathcal{E}/(\overline{\mathcal{E}}_s \oplus {}^{\tau}\mathcal{E}_s)$ est de torsion. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\deg {}^{\tau}\mathcal{E}/\overline{\mathcal{E}}_s &= \sum_{t \leq s} \deg \overline{\mathcal{E}}_{t^-}/\overline{\mathcal{E}}_t = \sum_{t \leq s} \deg \mathcal{E}''_t/\mathcal{E}''_{t^-} \\
&= \Big(\sum_{t \leq s} \deg \mathcal{E}_t/\mathcal{E}_{t^-}\Big) + 1 = \deg \mathcal{E}_s + 1 = \deg {}^{\tau}\mathcal{E}_s + 1 \,.
\end{aligned}$$

$\square$

En $r_1 = 0^+$ le premier élément de la partition $\underline{r}$, posons

$$\mathcal{A}_{r_1} = \mathcal{E}_{r_1} \hookrightarrow \mathcal{E} \,,$$

$$\mathcal{A}'_{r_1} = \mathcal{E}'_{r_1} = \mathcal{E}''_{r_1} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}'' \,.$$

Le composé

$$^{\tau}\mathcal{A}_{r_1} \hookrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E} \to {}^{\tau}\mathcal{E}/\overline{\mathcal{E}}_{r_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_{r_1} = \mathcal{A}'_{r_1}$$

s'intègre dans un diagramme

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{r_1} & \hookrightarrow & \mathcal{A}'_{r_1} \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{A}_{r_1} & & \end{pmatrix}$$

qui est un chtouca de rang r_1, de pôle ∞ et de zéro x_{r_1}.

Pour $s \in \underline{r}^+$, $s > r_1$, posons

$$\mathcal{A}_s = \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-} \cong \mathcal{E}'_s/\mathcal{E}'_{s^-}$$

$$\mathcal{A}'_s = \overline{\mathcal{E}}_{s^-} \cap {}^{\tau}\mathcal{E}_s = \mathrm{Ker}\,[\overline{\mathcal{E}}_{s^-} \oplus {}^{\tau}\mathcal{E}_s \twoheadrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}] \,.$$

Les deux composés

$$\mathcal{A}'_s \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}_s \twoheadrightarrow {}^\tau\mathcal{E}_s/{}^\tau\mathcal{E}_{s^-} = {}^\tau\mathcal{A}_s$$

et

$$\mathcal{A}'_s \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^q \hookrightarrow \overline{\mathcal{E}}_{s^-} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^q \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^q$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t \hookrightarrow \mathcal{A}_s \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t$$

s'intègrent dans un diagramme

$$\left(\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A}_s \otimes \bigotimes\limits_{t<s} \mathcal{L}_t \\ & \nearrow & \\ \mathcal{A}'_s \otimes \bigotimes\limits_{t<s} \mathcal{L}_t^q & \hookrightarrow & {}^\tau(\mathcal{A}_s \otimes \bigotimes\limits_{t<s} \mathcal{L}_t) \end{array}\right)$$

qui définit un chtouca "à gauche" de rang $s - s^-$, de pôle x_{s^-} et de zéro x_s (avec $x_r = 0$).

Proposition. – *Le morphisme ainsi défini*

$$\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}} \to \mathrm{Cht}^{r_1} \times_X {}^{r_2}\,\mathrm{Cht} \times_X \cdots \times_X {}^{r_k}\,\mathrm{Cht}$$

est fini, surjectif et radiciel.

IV. Troncatures et structures de niveau sur les compactifications

On a défini

$$\overline{\mathrm{Cht}^r} = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \overline{\mathrm{Cht}^{r,d}} = \text{champ des "chtoucas itérés" sur } X\,;$$

c'est un champ algébrique localement de type fini (mais non séparé) et muni d'un morphisme

$$\overline{\mathrm{Cht}^r} \to X \times X \times (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}\,.$$

Les images réciproques des points de $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}$ (indexés par les partitions $\underline{r} = (r = r_1 + \cdots + r_k)$) sont les strates localement fermées $\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}$. La strate ouverte est

$$\mathrm{Cht}^r_\emptyset = \mathrm{Cht}^r$$

et les autres sont munies d'un morphisme fini, surjectif et radiciel

$$\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}} \to \mathrm{Cht}^{r_1} \times_X {}^{r_2}\,\mathrm{Cht} \times_X \cdots \times_X {}^{r_k}\,\mathrm{Cht}\ .$$

On cherche à définir une troncature sur $\overline{\mathrm{Cht}^r}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'', (\mathcal{L}_s, \ell_s)_{1 \leq s < r}, {}^\tau\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}'')$ un point d'une strate $\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}$ et $(\mathcal{E}_s)$, $(\mathcal{E}'_s)$, $(\mathcal{E}''_s)$, $(\overline{\mathcal{E}}_s)$ les filtrations induites de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$, ${}^\tau\mathcal{E}$.

Définition. – (i) *On appelle "bon" sous-objet d'un tel point $\widetilde{\mathcal{E}}$ tout couple $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ de sous-fibrés maximaux de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ tels que*

- $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$ *et* $\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = \mathrm{rg}\,\mathcal{F}'$
- *il existe* $s \in \underline{r}^+$ *vérifiant*

$$\mathcal{E}_{s^-} \subsetneq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}_s\,, \quad \mathcal{E}'_{s^-} \subsetneq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_s$$

- *le plongement*

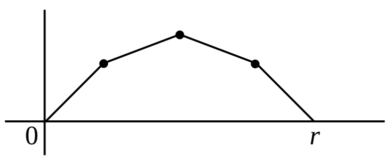
$$\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s \cong \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \hookrightarrow \mathcal{E}'_s/\mathcal{E}'_{s^-}$$

  envoie ${}^\tau\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-} / {}^\tau\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{E}}_s$ *dans* $\mathcal{F}' \cap \mathcal{E}'_s / \mathcal{F}' \cap \mathcal{E}'_{s^-}$.

(ii) *Un tel "bon" sous-objet sera dit*

- *de type* I *si* $s = r_1 = 0^+$ *ou si* ${}^\tau\mathcal{F} + \overline{\mathcal{E}}_{s^-} = {}^\tau\mathcal{E}$,
- *de type* II *si* $s > r_1 = 0^+$ *et* ${}^\tau\mathcal{F} + \overline{\mathcal{E}}_{s^-} \subsetneq {}^\tau\mathcal{E}$.

Considérons un polygone convexe de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$



Lemme. – (i) *Les deux conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \bullet \textit{ Pour tout } s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+, \textit{ on a} \\ \qquad p(s) - 1 < \deg \mathcal{E}_s - \frac{s}{r} \deg \mathcal{E} \leq p(s)\,. \\ \bullet \textit{ Pour tout ``bon'' sous-objet } (\mathcal{F}, \mathcal{F}') \textit{ de } \widetilde{\mathcal{E}}, \textit{ on a} \\ \qquad \deg \mathcal{F} - \frac{\mathrm{rg}\, \mathcal{F}}{s} \deg \mathcal{E} \leq p(\mathrm{rg}\, \mathcal{F}) \\ \textit{si } (\mathcal{F}, \mathcal{F}') \textit{ est de type } \mathrm{I}, \textit{ et} \\ \qquad \deg \mathcal{F} - \frac{\mathrm{rg}\, \mathcal{F}}{s} \deg \mathcal{E} \leq p(\mathrm{rg}\, \mathcal{F}) - 1 \\ \textit{si } (\mathcal{F}, \mathcal{F}') \textit{ est de type } \mathrm{II}. \end{cases}$$

définissent un ouvert $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p} \leq p}$ *de* $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^r$.

(ii) *Il existe un unique ouvert* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}}$ *de* $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ *dont la trace dans chaque* $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^r$ *est* $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p} \leq p}$.

Remarque : On a en particulier $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}} \cap \mathrm{Cht}^r = \mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}$.

Donnons une autre description des troncatures sur les strates.

Pour tout entier r', on a un morphisme représentable, fini, surjectif et radiciel

$$\begin{gathered} {}^{r'}\mathrm{Cht} \to \mathrm{Cht}^{r'} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{E}' & \hookrightarrow & \mathcal{E} \\ & \searrow & \\ & & {}^\tau\mathcal{E} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{E}' & \hookrightarrow & {}^\tau\mathcal{E} \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E}' & & \end{pmatrix} \end{gathered}$$

et donc, on a un morphisme fini, surjectif, radiciel

$$\begin{aligned} \mathrm{Cht}_{\underline{r}}^r &\to \mathrm{Cht}^{r_1} \times_X {}^{r_2}\mathrm{Cht} \times_X \cdots \times_X {}^{r_k}\mathrm{Cht} \\ &\to \mathrm{Cht}^{r_1} \times_X \mathrm{Cht}^{r_2} \times_{X,\mathrm{Frob}} \cdots \times_{X,\mathrm{Frob}} \mathrm{Cht}^{r_k} \end{aligned}$$

au-dessus de $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$.

Revenons au polygone de troncature $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ et fixons un degré $d \in \mathbb{Z}$.

Pour $0 \leq s \leq r$, soit $d(s)$ l'unique entier tel que

$$d(s) - \frac{s}{r}\, d \in \,]p(s)-1, p(s)]\,.$$

On pose

$$d_1 = d(r_1) = d(r_1) - d(0)$$
$$p_1(0) = p_1(r_1) = 0$$
$$p_1(s) = d(s) - \frac{s}{r_1}\, d(r_1),\ 1 \leq s \leq r_1\,,$$

et, pour $2 \leq i \leq k$,

$$d_i = d(r_1 + \cdots + r_i) - d(r_1 + \cdots + r_{i-1}) - 1$$

$$p_i(0) = p_i(r_i) = 0$$

$$\begin{aligned} p_i(s) &= d(r_1 + \cdots + r_{i-1} + s) - d(r_1 + \cdots + r_{i-1}) - 1 \\ &- \frac{s}{r_i}\,[d(r_1 + \cdots + r_i) - d(r_1 + \cdots + r_{i-1}) - 1],\ 1 \leq s \leq r_i\,. \end{aligned}$$

Lemme. – *L'ouvert* $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p} \subset \mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}$ *est l'image réciproque par le morphisme fini, surjectif radiciel*

$$\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r} \to \mathrm{Cht}^{r_1} \times_X \mathrm{Cht}^{r_2} \times_{X,\mathrm{Frob}} \times \cdots \times_{X,\mathrm{Frob}} \mathrm{Cht}^{r_k}$$

de l'ouvert

$$\mathrm{Cht}^{r_1,d_1,\overline{p}\leq p_1} \times \cdots \times \mathrm{Cht}^{r_k,d_k,\overline{p}\leq p_k}\ .$$

Remarque : Cela implique que la cohomologie de $\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ est "r-négligeable".

On dit que le polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ est "assez convexe" si tous les sauts de pentes

$$[p(s) - p(s-1)] - [p(s) - p(s+1)] = \partial p(s)$$

sont assez grands.

Proposition. – *Si p est assez convexe (en fonction du genre de X), le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}} \to X \times X \times (\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}$$

est lisse.

Théorème. – *Si p est assez convexe, $(\partial p(s) \geq 2, \quad \forall\, s)$, le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \to X \times X$$

est de type fini et propre (*en particulier* séparé).

Théorème. – *Dans*

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\leq d\leq r|\deg(a)|} \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}\,,$$

les correspondances de Hecke $f \in \mathcal{H}_\emptyset^r$ stabilisent l'ouvert des chtoucas

$$\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$$

"au voisinage de leurs points fixes".

Passons maintenant aux

Structures de niveau

Soit donc $N \hookrightarrow X$ un niveau, c'est-à-dire un sous-schéma fermé fini.

Le morphisme de restriction de X à N

Les foncteurs

$$\mathcal{E}(= \text{fibré sur } X\times S) \mapsto \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times S}} \mathcal{O}_{N\times S} = \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N = \mathcal{E}_N$$

définissent un morphisme

$$\mathrm{Res} : \overline{\mathrm{Cht}^r} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) \quad \xrightarrow{\cdot\,\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N} \quad \mathcal{C}^{r,N}$$

où $\mathcal{C}^{r,N}$ = champ classifiant les

- $\mathcal{E}$ fibré de rang r sur $N \times S$,

- $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{r-1}$ fibrés inversibles sur S avec sections $\ell_1, \ldots, \ell_{r-1}$,
- homomorphisme complet
$$^{\tau}\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}$$
dont l'image dans $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}(N \times S)$ est
$$(\mathcal{L}_1, \ell_1)^{\otimes(q-1)}, \ldots, (\mathcal{L}_{r-1}, \ell_{r-1})^{\otimes(q-1)} .$$

Il consiste en des homomorphismes partout non nuls

$$^{\tau}\Big(\Lambda^s \mathcal{E} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\Big) \xrightarrow{u_s} \Lambda^s \mathcal{E} \otimes \bigotimes_{t<s} \mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}, \ 1 \leq s \leq r ,$$

qui vérifient en particulier

$$\Lambda^s u_1 = \Big(\prod_{t<s} \ell_t^{(q-1)(s-t)}\Big) \cdot u_s .$$

La condition

$$^{\tau}\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} \text{ isomorphisme} \, (\Leftrightarrow \ell_1, \ldots, \ell_{r-1} \text{ inversibles})$$

définit un ouvert dense de $\mathcal{C}^{r,N}$

$$\mathcal{C}_{\emptyset}^{r,N} = \bullet / \operatorname{GL}_r(\mathcal{O}_N) = \text{ champ classifiant de } \operatorname{GL}_r(\mathcal{O}_N)$$

qui admet pour revêtement fini étale galoisien

$$\mathcal{C}_{N,\emptyset}^{r} = \bullet = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q .$$

Cht^r est l'image réciproque de $\mathcal{C}_{\emptyset}^{r,N}$ par Res et

$$\mathrm{Cht}_N^r = [\mathrm{Cht}^r \times_{X \times X} (X-N) \times (X-N)] \times_{\mathcal{C}_{\emptyset}^{r,N}} \mathcal{C}_{N,\emptyset}^{r} .$$

Théorème. – (i) *Si p est assez convexe en fonction du genre de X et de N,*

$$(q, \mathrm{Res}) : (X-N) \times (X-N) \times_{X \times X} \overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}}/a^{\mathbb{Z}} \to (X-N) \times (X-N) \times \mathcal{C}^{r,N}$$

est lisse.

(ii) *Si $\mathcal{L}$ est un faisceau ℓ-adique sur $\mathcal{C}^{r,N}$ supporté par le bord $\mathcal{C}^{r,N} - \mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$, les faisceaux de cohomologie*

$$R^i\, q_*(\mathrm{Res})^*\, \mathcal{L}$$

sont lisses sur $(X-N)\times(X-N)$ et r-négligeables.

Corollaire. – *Si $\mathcal{C}^r_N$ = champ représentable sur $\mathcal{C}^{r,N}$ qui prolonge le revêtement $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset}$ de $\mathcal{C}^{r,N}_{\emptyset}$,*

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}} = [(X-N)\times(X-N)\times_{X\times X}\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}]\times_{\mathcal{C}^{r,N}}\mathcal{C}^r_N$$

est lisse sur $(X-N)\times(X-N)\times\mathcal{C}^r_N$; il contient $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}$ comme ouvert ; la cohomologie de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}} - \mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}$ est r-négligeable.

S'il existe $\mathcal{C}^r_N$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mathcal{C}^r_N \text{ projectif sur } \mathcal{C}^{r,N}, \\[2ex] \bullet\ \mathcal{C}^r_N \text{ lisse}, \\[2ex] \bullet\ \mathcal{C}^r_N - \mathcal{C}^r_{N,\emptyset} = \mathrm{DCN} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{oui si } N \text{ réduit} \\ \text{? si } N \text{ a des multiplicités} \end{array}$$

alors $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}$ vérifie :

- $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}$ propre sur $(X-N)\times(X-N)$,
- lisse sur $(X-N)\times(X-N)$,
- bord = DCN relatif et strates r-négligeables.

Soit $\mathcal{C}'^r_N \to \mathcal{C}^{r,N}$ le champ classifiant les familles

$$(\mathcal{E};\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{r-1};\ell_1,\ldots,\ell_{r-1};\ {}^{\tau}\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{E})$$

comme plus haut + homomorphisme complet

$$\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{O}^r_{N\times S}$$

d'image $(\mathcal{L}_1,\ell_1),\ldots,(\mathcal{L}_{r-1},\ell_{r-1})$ dans $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{k-1}(N\times S)$, représenté par des homomorphismes partout non nuls

$$\Lambda^s\,\mathcal{E}\otimes\bigotimes_{t<s}\mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\xrightarrow{v_s}\Lambda^s\,\mathcal{O}^r_{N\times S},\quad 1\leq s\leq r\,,$$

vérifiant en particulier

$$\Lambda^s\,v_1=\Big(\prod_{t<s}\ell_t^{(s-t)}\Big)v_s$$

et la condition supplémentaire

$$\underline{{}^\tau v_s=v_s\circ u_s}\,.$$

$\mathcal{C}'^r_N$ s'envoie dans l'ouvert $\mathcal{C}'^{r,N}$ de $\mathcal{C}^{r,N}$ où les u_s sont partout non τ-nilpotents.

Lemme. – *$\mathcal{C}'^r_N$ est un revêtement fini, plat, ramifié de $\mathcal{C}'^{r,N}$ qui prolonge le revêtement étale $\mathcal{C}^r_{N,\emptyset}$ de $\mathcal{C}^{r,N}_\emptyset$.*

Il est lisse sur $(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)^{r-1}$.

Lemme. – *L'ouvert $\overline{\mathrm{Cht}^r}'$ de $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ image réciproque de $\mathcal{C}'^{r,N}$ est aussi défini par la condition que pôle, zéro et dégénérateurs évitent N.*

Théorème de stabilité. – *Soient $\widetilde{\mathcal{E}}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ deux points de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$ à valeurs dans un trait.*

On suppose que leurs générisations $\widetilde{\mathcal{E}}_\eta$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_\eta$ sont deux chtoucas images l'un de l'autre par une correspondance de Hecke (éventuellement composée avec des puissances de Frob_∞, Frob_0).

Alors, si $x\in\{$pôle, zéro, dégénérateurs de la spécialisation $\widetilde{\mathcal{E}}_s\}$, il existe $x'\in\{$pôle, zéro, dégénérateurs de la spécialisation $\widetilde{\mathcal{F}}_s\}$ et $n,n'\in\mathbb{N}$ tels que

$$\mathrm{Frob}^n(x)=\mathrm{Frob}^{n'}(x')\,.$$

Corollaire. – *Le champ*

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}}'/a^{\mathbb{Z}}&=[(X-N)\times(X-N)\times_{X\times X}\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/a^{\mathbb{Z}}]\times_{\mathcal{C}^{r,N}}\mathcal{C}'^r_N\\&=\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}'\times_{\mathcal{C}'^{r,N}}\mathcal{C}'^r_N\end{aligned}$$

vérifie :

- $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ = *ouvert dense,*
- *lisse sur* $(X-N)\times(X-N)$,
- *bord* = DCN *relatif,*
- *cohomologie du bord (et de ses strates) r-négligeable,*
- *il est* stabilisé par les correspondances de Hecke,
- *l'ouvert* $\mathrm{Cht}_N^{r,\overline{p}\leq p}/a^{\mathbb{Z}}$ *est stabilisé "localement au voisinage des points fixes".*

V. Critère valuatif de propreté. Stabilisation globale et locale

On fixe toujours :

X courbe projective, lisse, géométriquement connexe $/\,\mathbb{F}_q$

r = rang, d = degré, $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ polygone convexe de troncature.

On cherche à prouver que

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \qquad (\supset \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p})$$

vérifie le critère valuatif de propreté.

Soit donc :

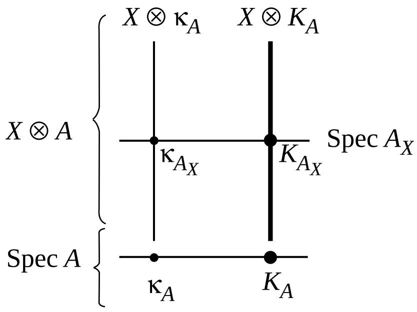
A = anneau de valuation discrète,

$K_A = \mathrm{Frac}(A)$,

κ_A = corps résiduel,

π_A = uniformisante.

On considère la surface régulière $X \otimes A$:



On a noté A_X l'anneau local dans X du point générique de sa fibre spéciale $X \otimes \kappa_A$. C'est un anneau de valuation discrète. Son corps résiduel κ_{A_X} est le corps des fonctions de $X \otimes \kappa_A$ et son corps des fractions est le corps des fonctions de X ou de sa fibre générique $X \otimes K_A$.

On se donne un point

$$\widetilde{\mathcal{E}} \in \mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p} \le p}(K_A)\,;$$

on cherche à montrer qu'il a un prolongement unique dans

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p} \le p}}(A)\,.$$

On écrit

$$\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \overset{u}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} {}^{\tau}\mathcal{E})$$

comme diagramme de fibrés sur $X \otimes K_A$.
Soit
V = fibre générique de $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$
= espace de dim r sur K_{A_X} muni de

$${}^{\tau}V \overset{u}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} V \qquad (V = \text{“}\varphi\text{-espace”})\,.$$

Lemme. – *La catégorie des fibrés sur $X \otimes A$ (surface régulière) est équivalente à la catégorie des fibrés sur la courbe générique $X \otimes K_A$ munis d'un réseau de leur fibre générique.*

Tout A_X-réseau M dans V induit

$$\mathcal{E}(M) \hookrightarrow \mathcal{E}'(M) \hookleftarrow \mathcal{E}''(M) \quad \text{fibrés sur } X \otimes A$$

où les quotients sont automatiquement supportés par les graphes de

$$\infty, 0 : \operatorname{Spec} A \rightrightarrows X\,.$$

Par restriction, on a

$$\mathcal{E}^M \hookrightarrow \mathcal{E}'^M \hookleftarrow \mathcal{E}''^M \quad \text{fibrés sur } X \otimes \kappa_A$$

dont la fibre générique est

$$V^M = M/\pi_A\, M\,.$$

C'est un chtouca sur A si et seulement si

$$M = \text{“}\varphi\text{-réseau”}$$

au sens que

$${}^\tau V \xrightarrow[\sim]{u} V \qquad \text{induit} \qquad {}^\tau M \xrightarrow{\sim} M\,.$$

Fait : Il y a unicité (Cht^r est séparé) mais pas nécessairement existence du φ-réseau.

De plus, même s'il y a un φ-réseau, son chtouca induit peut être en dehors de $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p} \leq p}$.

Définition. – *Un “φ-réseau itéré” M relativement à des entiers $d_1, \ldots, d_{r-1} \geq 0$ est un A_X-réseau M de V tel que, si on pose*

$$u_s = \Bigg(\prod_{1 \leq t < s} \pi_A^{d_t(s-t)} \Bigg)^{-(q-1)} \Lambda^s\, u, \quad 1 \leq s \leq r\,,$$

alors chaque u_s induit un morphisme bien défini

$$u_s : {}^\tau \Lambda^s\, M \to \Lambda^s\, M$$

dont la restriction $\overline{u}_s$ à $\Lambda^s(M/\pi_A\, M) = \Lambda^s\, V^M$ vérifie

$$\overline{u}_s \neq 0 \quad \textit{et} \quad {}^\tau \Lambda^s\, V^M = \operatorname{Ker}(\overline{u}_s) \oplus {}^\tau \operatorname{Im}(\overline{u}_s)\,.$$

Autrement dit, un "φ-réseau itéré" M est un φ-réseau tel que l'homomorphisme complet ${}^\tau M \Rightarrow M$ induit par u ne présente par de τ-nilpotence, même en réduction mod. π_A.

Proposition. – *Quitte à remplacer A par une extension finie totalement ramifiée, le φ-espace V admet des φ-réseaux itérés.*

Lemme (Drinfeld). – *Quitte à remplacer A par une extension finie totalement ramifiée, le φ-espace V admet des réseaux M qui vérifient*

- *u envoie ${}^\tau M$ dans M,*
- *$\overline{u} : V^M \to V^M$ n'est pas nilpotent.*

Démonstration. – Soit $\varphi : V \to V$ le morphisme τ-linéaire associé à $u : {}^\tau V \xrightarrow{\sim} V$.

Soit $x : V - \{0\} \to \mathbb{R}$ une valuation quelconque.

Alors
$$x_\varphi : v \mapsto x_\varphi(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{x(\varphi^n(v))}{q^n}$$
est aussi une valuation et elle vérifie
$$x_\varphi(\varphi(v)) = q \cdot x_\varphi(v), \quad \forall\, v \neq 0\,.$$
On vérifie que x_φ est nécessairement à valeurs dans un $\frac{1}{N}\,\mathbb{Z}$.

Quitte à remplacer A par une extension finie totalement ramifiée, on peut supposer que x_φ prend la valeur 0.

Alors $\{v \in V,\ x_\varphi(v) \geq 0\} = M$ répond à la question.

Corollaire du lemme. – *Si $\widehat{V}$ désigne la complétion de V, il admet un sous-espace $\widehat{V}' \neq 0$ qui possède un φ-réseau.*

Démonstration. – Pour M comme dans le lemme et $\widehat{M}$ sa complétion, prendre
$$\Big(\bigcap_{n\geq 0} \varphi^n(\widehat{M})\Big) \otimes_{\widehat{A}_X} \widehat{K}_X = \widehat{V}'\,.$$

Démonstration de la proposition. – Chercher un réseau M dans V revient à chercher un réseau $\widehat{M}$ dans $\widehat{V}$.

D'après le corollaire, il existe une filtration croissante $(\widehat{V}_s)$ de $\widehat{V}$ par des sous-espaces $\widehat{V}_s$ de dimensions $s \in \underline{r}^+$ telle que chaque $\widehat{V}_s/\widehat{V}_{s^-}$ admette un

φ-réseau $\widehat{M}_s$. Soit $\widehat{M}'_s$ un réseau de $\widehat{V}_s$ dont l'image dans $\widehat{V}_s/\widehat{V}_{s^-}$ est $\widehat{M}_s$. Alors

$$\widehat{M} = \sum_{s \in \underline{r}^+} \Big(\prod_{\substack{t \in \underline{r}^+ \\ t < s}} \pi_A^{d_t} \Big) \widehat{M}'_s$$

répond à la question si les d_t, $t \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+$, sont assez grands. $\square$

Soit M un φ-réseau itéré de V.

Son type est l'unique partition $\underline{r}$ telle que

$$d_s \geq 1 \Leftrightarrow s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+ \, , \quad 1 \leq s < r \, .$$

L'homomorphisme complet

$$^{\tau}V^M \to V^M \qquad (\text{où}\, V^M = M/\pi_A\, M)$$

consiste en

- une filtration croissante (V_s^M) de V^M avec
$$\mathrm{rg}\, V_s^M = s \, , \quad s \in \underline{r}^- \cap \underline{r}^+ \, ,$$
- une filtration décroissante $(\overline{V}_s^M)$ de ${}^{\tau}V^M$ avec
$$^{\tau}V^M = {}^{\tau}V_s^M \oplus \overline{V}_s^M \, ,$$
- des isomorphismes
$$\overline{V}_{s^-}^M / \overline{V}_s^M \xrightarrow{\sim} V_s^M / V_{s^-}^M \, , \quad s \in \underline{r}^+ \, .$$

Définition. – *Un sous-espace W de V^M est dit "bon" si*

- *il existe $s \in \underline{r}^+$ tel que $V_{s^-}^M \subsetneq W \subseteq V_s^M$,*
- *l'isomorphisme $\overline{V}_{s^-}^M / \overline{V}_s^M \xrightarrow{\sim} V_s^M / V_{s^-}^M$ induit*
$$\overline{V}_{s^-}^M \cap {}^{\tau}W \xrightarrow{\sim} W / V_{s^-}^M \, .$$

Transformation "élémentaire" des φ-réseaux itérés : *Soit M un φ-réseau itéré relativement à $d_1, \dots, d_{r-1}$ et notons $\underline{r}$ son type.*

Soit W un "bon" sous-espace de V^M de rang w. Alors

$$M' = \mathrm{Ker}[M \twoheadrightarrow M/\pi_A\, M = V^M \twoheadrightarrow V^M/W]$$

est un φ-réseau itéré relativement à $d'_1, \dots, d'_{r-1}$ où $d'_s = d_s$ si $s \neq w$ et $d'_w = d_w + 1$. Le type $\underline{r}'$ de M' est donné par

$$\underline{r}'^{+} = \underline{r}^{+} \cup \{w\}\,.$$

Théorème. – *Tout φ-réseau itéré M de V peut-être transformé par une suite finie de transformations élémentaires dans un sens ou dans l'autre en un φ-réseau itéré M' qui induit un point de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\le p}}\,(A)$.*

Ce M' est unique.

Revenons au diagramme de fibrés sur $X \otimes \kappa_A$

$$\mathcal{E}^M \hookrightarrow \mathcal{E}'^M \hookleftarrow \mathcal{E}''^M \qquad \text{(de fibre générique } V^M)$$

induit par un φ-réseau itéré M.

On a des filtrations induites par des fibrés maximaux

$$(\mathcal{E}_s^M),\ (\mathcal{E}_s'^M),\ (\mathcal{E}_s''^M) \quad \text{et} \quad (\overline{\mathcal{E}}_s^M)$$

plus des isomorphismes bien définis génériquement

$$(\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M/\overline{\mathcal{E}}_s^M) \approx (\mathcal{E}_s''^M/\mathcal{E}_{s^-}''^M)\,.$$

Lemme. – *Pour tout $s \in \underline{r}^- \cup \underline{r}^+$, on a un diagramme de morphismes partout bien définis :*

$$\begin{tikzcd}
 & & & \det(\mathcal{E}_s^M) \arrow[d, hook] \\
\det({}^\tau\mathcal{E}_s^M) \arrow[r, hook] & \det({}^\tau\mathcal{E}^M/\overline{\mathcal{E}}_s^M) \arrow[r, hook] & \det(\mathcal{E}_s''^M) \arrow[r, hook] & \det(\mathcal{E}_s'^M)
\end{tikzcd}$$

De plus, $\mathcal{E}_s'^M/\mathcal{E}_s^M$ est plongé dans $\mathcal{E}'^M/\mathcal{E}^M$ qui est de dimension 1 et supporté par $\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) = \infty(\kappa_A)$.

Corollaire. – *Pour tout s, il existe un unique point $x(\mathcal{E}_s^M)$ sur X tel que*

$$\det({}^\tau\mathcal{E}_s^M) \cong \det(\mathcal{E}_s^M)(\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) - x(\mathcal{E}_s^M))\,.$$

C'est le "dégénérateur" en rang s.

Si W est un "bon" sous-espace de V^M, on note $\mathcal{E}_w^M$ le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}^M$ qu'il engendre.

Lemme. – *Pour tout bon sous-espace $W \subsetneq V^M$ de rang w et si M' désigne le transformé élémentaire de M par W, on a deux suites exactes canoniques :*

$$0 \to \overline{\mathcal{E}}_w^{M'} \to {}^\tau\mathcal{E}^{M'} \to {}^\tau\mathcal{E}_w^M \to 0$$

$$0 \to {}^\tau\mathcal{E}_w^M \to {}^\tau\mathcal{E}^M \to \overline{\mathcal{E}}_w^{M'} \to 0$$

De plus, on a un plongement canonique

$$\mathcal{E}_w^{M'} \hookrightarrow \mathcal{E}_w^M$$

et le quotient $\mathcal{E}_w^M/\mathcal{E}_w^{M'}$ est de dimension 0 ou 1 sur κ_A.

Démonstration. –

$$M' \subset M \text{ induit } \mathcal{E}^{M'} \to \mathcal{E}^M$$

et

$$\pi_A\, M \subset M' \text{ induit } \mathcal{E}^M \to \mathcal{E}^{M'}\,.$$

On a même $\mathcal{E}(M') = \operatorname{Ker}[\mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)/\mathcal{E}_w^M]$. On remarque que, bien sûr, $\deg\mathcal{E}^M = \deg\mathcal{E}^{M'}$, et qu'on a d'après le lemme

$$\deg\mathcal{E}_s^M - \deg\mathcal{E}_s^{M'} = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall\, s \in \underline{r}^+ \cup \{w\} = \underline{r}'^+\,.$$

Proposition. – (i) *Si W est un "bon" sous-espace de M, on a un isomorphisme canonique*

$$\det({}^\tau\mathcal{E}_w^M) = \det(\mathcal{E}_w^M)(\infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) - x(\mathcal{E}_w^M))$$

pour un unique point $x(\mathcal{E}_w^M)$ *avec*

$$x(\mathcal{E}_w^M) = x(\mathcal{E}_{s^-}^M) \quad ou \quad x(\mathcal{E}_s^M) \quad si \quad V_{s^-}^M \subsetneq W \subsetneq V_s^M \,.$$

(ii) *Pour tout* $s \in \underline{r}^+ \cup \{w\}$, *on a*

$$x(\mathcal{E}_s^{M'}) = x(\mathcal{E}_s^M) \quad si \quad \deg \mathcal{E}_s^M = \deg \mathcal{E}_s^{M'}$$

$$x(\mathcal{E}_s^{M'}) = \mathrm{Frob}(x(\mathcal{E}_s^M)) \quad si \quad \deg \mathcal{E}_s^M = \deg \mathcal{E}_s^{M'} + 1 \,.$$

Esquisse de preuve de (ii). – Notons $\infty = \infty(\widetilde{\mathcal{E}}^M) = \infty(\widetilde{\mathcal{E}}^{M'})$, $x_s = x(\mathcal{E}_s^M)$, $x'_s = x(\mathcal{E}_s^M)$. Si $\deg \mathcal{E}_s^M = \deg \mathcal{E}_s^{M'} + 1$, il existe un point y et un isomorphisme canonique

$$\det(\mathcal{E}_s^M) \cong \det(\mathcal{E}_s^{M'})(y) \,.$$

En comparant avec

$$^\tau \det(\mathcal{E}_s^M) \cong \det(\mathcal{E}_s^M)(\infty - x_s)$$

$$^\tau \det(\mathcal{E}_s^{M'}) \cong \det(\mathcal{E}_s^{M'})(\infty - x'_s)$$

on en déduit

$$y = x_s \quad \text{et} \quad x'_s = \tau(x_s)$$

ou bien

$$y = \tau(y) \quad \text{et} \quad x'_s = x_s \,.$$

On peut exclure le second cas. □

On en déduit :

Théorème de stabilité globale. – *Soient* $\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{\mathcal{F}}$ *deux points de* $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}(K_A)$ *qui se correspondent au sens de Hecke et qui se prolongent en des points de* $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p} \leq p}(A)$.

Alors les ensembles constitués par les pôles, zéros et dégénérateurs des spécialisations de $\widetilde{\mathcal{E}}$ *et* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *ne diffèrent que par des puissances de Frob.*

Démonstration. – Les correspondances de Hecke n'agissent qu'en un nombre fini de places donc $\widetilde{\mathcal{E}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ ont même fibre générique V.

Leurs spécialisations sont de la forme $\widetilde{\mathcal{E}}^M$, $\widetilde{\mathcal{F}}^{M'}$ avec $M, M' = 2$ φ-réseaux itérés dans V.

D'après la proposition (et le fait que M, M' peuvent être reliés par une suite de transformations élémentaires), il suffit de montrer que les dégénérateurs $x_s = x(\mathcal{E}_s^M)$ et $x'_s = x(\mathcal{F}_s^M)$ [**note** : on a donc remplacé M' par M!] diffèrent par une puissance de Frob.

On a par définition

$$^\tau \det(\mathcal{E}_s^M) \cong \det(\mathcal{E}_s^M)(\infty - x_s)$$

$$^\tau \det(\mathcal{F}_s^M) \cong \det(\mathcal{F}_s^M)(\infty - x'_s)$$

et aussi

$$\det(\mathcal{F}_s^M) \cong \det(\mathcal{E}_s^M)(\Sigma\, m_\iota\, x_\iota)$$

d'où

$$(x'_s - x_s) + \sum_\iota m_\iota(\tau(x_\iota) - x_\iota) = 0$$

et

$$x'_s \in \tau^{\mathbb{Z}}(x_s)\,.$$

$\square$

VI. La démonstration du critère valuatif de propreté

On considère donc un point $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{E})$ de $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ à valeurs dans le corps des fractions K_A d'un anneau de valuation discrète A. On doit montrer que (quitte à remplacer A par une extension finie) il se prolonge en un unique point de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ à valeurs dans A.

Ce point correspondra nécessairement à un φ-réseau itéré M dans la fibre générique V de $\widetilde{\mathcal{E}}$ ou, ce qui est équivalent, son complété $\widehat{M}$ dans $\widehat{V} = V \otimes_{K_{A_X}} \widehat{K}_{A_X}$.

Tout φ-réseau itéré M de V induit une partition $\underline{r}_M = (r = r_1 + \cdots + r_k)$ et une filtration de $\widehat{V}$ par des sous-φ-espaces $\widehat{V}_s(M)$ de rangs $s \in \{0, r_1, r_1 + r_2, \ldots, r\} = \underline{r}_M^- \cup \underline{r}_M^+$.

L'application

$$\widehat{W} \mapsto \widehat{W}^{\widehat{M}} = \widehat{M} \cap \widehat{W} / \pi_A(\widehat{M} \cap \widehat{W})$$

induit une bijection de l'ensemble des sous-φ-espaces $\widehat{W}$ de $\widehat{V}$ compatibles avec la filtration $(\widehat{V}_s(M))_{s \in \underline{r}_M^- \cup \underline{r}_M^+}$ (c'est-à-dire compris entre deux $\widehat{V}_s(M)$ consécutifs) sur l'ensemble des "bons sous-espaces" de $V^M = M/\pi_A M$.

On a noté $\mathcal{E}(M)$, $\mathcal{E}'(M)$, $\mathcal{E}''(M)$ les fibrés sur $X \otimes A$ qui prolongent $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ suivant un φ-réseau itéré M et $\mathcal{E}^M$, $\mathcal{E}'^M$, $\mathcal{E}''^M$ leurs réductions modulo π_A. Celles-ci sont munies de filtrations croissantes $(\mathcal{E}_s^M)$, $(\mathcal{E}_s'^M)$, $(\mathcal{E}_s''^M)$ par des sous-fibrés maximaux de rangs $s \in \underline{r}_M^- \cup \underline{r}_M^+$ et ${}^\tau\mathcal{E}^M$ est muni d'une filtration décroissante $(\overline{\mathcal{E}}_s^M)$ par des sous-fibrés maximaux de rangs $r-s$ tels que ${}^\tau\mathcal{E}_s^M \cap \overline{\mathcal{E}}_s^M = 0$, $\forall\, s$. De plus, se donner un "bon sous-espace" de rang w de V^M équivaut à se donner un "bon sous-objet" $\mathcal{E}_w^M \hookrightarrow \mathcal{E}_w^{M'} \hookleftarrow \mathcal{E}_w^{M''}$ de rang w dans $\mathcal{E}^M \hookrightarrow \mathcal{E}'^M \hookleftarrow \mathcal{E}''^M$.

Un φ-réseau itéré M induit un point de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}\,(A)$ si et seulement si il vérifie les conditions suivantes :

(1) Pour tout $s \in \underline{r}_M^- \cap \underline{r}_M^+$, le faisceau de torsion ${}^\tau\mathcal{E}^M/(\overline{\mathcal{E}}_s^M \oplus {}^\tau\mathcal{E}_s^M)$ est de degré 1.

(2) Pour tout $s \in \underline{r}_M^+$, l'homomorphisme $\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M/\overline{\mathcal{E}}_s^M \to \mathcal{E}_s''^M/\mathcal{E}_{s^-}''^M$ est partout bien défini et inversible sur $X \otimes \kappa_A$, le faisceau de torsion $\mathcal{E}_s'^M/\mathcal{E}_s^M$ est de degré 1 et on a $\mathcal{E}_s''^M = \mathcal{E}_s'^M$ si $s < r$.

(3) Pour tout $s \in \underline{r}_M^-$, on a ${}^\tau\mathcal{E}_{s^+}^M + \overline{\mathcal{E}}_s^M = {}^\tau\mathcal{E}^M$.

(4) Pour tout $s \in \underline{r}_M^- \cap \underline{r}_M^+$, on a $\deg \mathcal{E}_s^M = d(s)$.

(5) Pour tout "bon sous-objet" $\mathcal{E}_w^M$ de rang w, on a

$$\deg \mathcal{E}_w^M \leq d(w) \qquad \text{si} \qquad \mathcal{E}_w^M \text{ est de type I, et}$$

$$\deg \mathcal{E}_w^M \leq d(w) - 1 \qquad \text{si} \qquad \mathcal{E}_w^M \text{ est de type II.}$$

Lemme. – *Pour tout φ-réseau itéré M de V, on a*

(i) *Tous les faisceaux de torsion ${}^\tau\mathcal{E}^M/({}^\tau\mathcal{E}_s^M \oplus \overline{\mathcal{E}}_s^M)$ sont de degrés* 0 *ou* 1.

(ii) *Si $s_0 \in \underline{r}_M^- \cap \underline{r}_M^+$, la condition* (1) *est vérifiée par tous les $s \geq s_0$ si et seulement si la condition* (2) *l'est par tous les $s \geq s_0$.*

□

On passe d'un φ-réseau itéré M à un autre par des transformations élémentaires "à la Langton" associées ici aux "bons sous-espaces" W de V^M.

Proposition. – *Soit W un bon sous-espace de V^M de rang w_0 (ou, ce qui est équivalent, un bon sous-objet $\mathcal{E}_{w_0}^M$ de $\mathcal{E}^M$ ou un bon sous-φ-espace $\widehat{W}$ de $\widehat{V}$) et*

$$M' = \operatorname{Ker}[M \to M/\pi_A M = V^M \twoheadrightarrow V^M/W]$$

le transformé (élémentaire) de M par W ou $\widehat{W}$. Alors

(i) *On a des isomorphismes canoniques*

$$\overline{\mathcal{E}}_{w_0}^{M'} \cong {}^{\tau}\mathcal{E}^M / {}^{\tau}\mathcal{E}_{w_0}^M, \qquad {}^{\tau}\mathcal{E}_{w_0}^M \cong {}^{\tau}\mathcal{E}^{M'} / \overline{\mathcal{E}}_{w_0}^{M'}.$$

(ii) *On a des plongements canoniques*

$$\mathcal{E}_{w_0}^{M'} \hookrightarrow \mathcal{E}_{w_0}^M, \qquad \mathcal{E}^M/\mathcal{E}_{w_0}^M \hookrightarrow \mathcal{E}^{M'}/\mathcal{E}_{w_0}^{M'},$$

dont les conoyaux sont de torsion et ont même degré égal à 0 ou 1. Ce degré est 1 si et seulement si

$${}^{\tau}\mathcal{E}_{w_0}^{M'} \oplus \overline{\mathcal{E}}_{w_0}^{M'} \subsetneq {}^{\tau}\mathcal{E}^{M'}.$$

Dans cette situation, la partition de r et la filtration de $\widehat{V}$ associées à M' sont données par

$$\underline{r}_{M'}^{+} = \underline{r}_M^{+} \cup \{w_0\} \qquad \{\widehat{V}_{s'}(M')\} = \{\widehat{V}_s(M)\} \cup \{\widehat{W}\}.$$

On dit que M est un transformé réciproque de M'. Il est uniquement déterminé par M' et par le rang $w_0 \in \underline{r}_{M'}^{-} \cap \underline{r}_{M'}^{+}$.

On considère aussi les suites finies de φ-réseaux itérés

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots \supsetneq M_k = M'$$

où chacun est le transformé élémentaire du précédent par un même sous-φ-espace $\widehat{W}$ de $\widehat{V}$ de rang w_0. On dit que M' est le transformé strict de M par $\widehat{W}$ si

$$\mathcal{E}_{w_0}^{M_0} = \mathcal{E}_{w_0}^{M_1} = \cdots = \mathcal{E}_{w_0}^{M_{k-1}} \supsetneq \mathcal{E}_{w_0}^{M_k}$$

et on dit que M est le modifié maximal de M' par $\widehat{W}$ (ou en le rang w_0) si

$$\mathcal{E}_{w_0}^{M_0} = \mathcal{E}_{w_0}^{M_1} = \cdots = \mathcal{E}_{w_0}^{M_k}$$

et si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- ou bien $\widehat{W}$ ne figure pas dans la filtration canonique $\{\widehat{V}_s(M)\}_s$ de $\widehat{V}$ associée à M,
- ou bien
$$ {}^{\tau}\mathcal{E}_{w_0}^M \oplus \overline{\mathcal{E}}_{w_0}^M \subsetneq {}^{\tau}\mathcal{E}^M . $$

Enfin, on dit que M est le transformé réciproque strict de M' par $\widehat{W}$ (ou en w_0) s'il existe k', $0 < k' \leq k$ tel que

$$ \mathcal{E}_{w_0}^{M_0} = \cdots = \mathcal{E}_{w_0}^{M_{k'-1}} \supsetneq \mathcal{E}_{w_0}^{M_{k'}} = \cdots = \mathcal{E}_{w_0}^{M_k} $$

et que M_0 soit le modifié maximal de $M_{k'-1}$ en le rang w_0.

Voici les deux résultats fondamentaux qui assurent l'existence de transformés stricts, de modifiés maximaux ou de transformés réciproques stricts :

Proposition. – *Soient M un φ-réseau itéré de V et $\widehat{W}$ un sous-φ-espace de rang w_0 de $\widehat{V}$ compatible avec la filtration $\{\widehat{V}_s(M)\}$ et tel que*

$$ \deg \mathcal{E}_{w_0}^M > d(w_0) . $$

Alors M admet un transformé strict par $\widehat{W}$.

Démonstration. – C'est la proposition 14 du paragraphe 2d de [Lafforgue, 1998]. □

Proposition. – *Soit $\{\widehat{W}_w\}$ une filtration du φ-espace V.*

Alors, pour tout φ-réseau itéré M dont la filtration de $\widehat{V}$ associée est contenue dans $\{\widehat{W}_w\}$ et pour tout élément $\widehat{W}_{w_0} \in \{\widehat{W}_w\}$, M admet un transformé réciproque strict (et a fortiori un modifié maximal dont la filtration associée comprend $\widehat{W}_{w_0}$) ou bien un modifié maximal dont la filtration associée ne comprend pas $\widehat{W}_{w_0}$, quitte à remplacer A par une extension finie (éventuellement ramifiée) qui ne dépend que des pentes minimales μ^- et maximales μ^+ de tous les sous-quotients $\mathcal{E}_{w^+}^M / \mathcal{E}_w^M$.

Démonstration. – Si $\widehat{W}_{w_0}$ figure dans la filtration de $\widehat{V}$ associée à M, l'existence d'un transformé réciproque de M par $\widehat{W}_{w_0}$ est la proposition 15 du paragraphe 2d de [Lafforgue, 1998] corrigée par la remarque qui suit la proposition III.11 de [Lafforgue, 2002]. La preuve passe par la construction de structures de niveau $I = N$ (de degré assez grand en fonction de toutes les μ^+ et μ^-) sur les $\mathcal{E}^M$. On choisit le niveau $I = N$ en dehors des pôle, zéro et dégénérateurs et on remarque que si on a mis des structures de niveau N pour un φ-réseau itéré M de chaque type $\underline{r}$ dans notre famille, on en a pour tous car on peut toujours passer de l'un à l'autre par des transformations élémentaires par des $\widehat{W}_w$.

La conclusion de la proposition résulte alors de ce qu'il n'existe pas de suite infinie de φ-réseaux itérés

$$M = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_k \subsetneq \ldots$$

où, pour tout indice k, M_{k+1} est le transformé réciproque de M_k par $\widehat{W}_{w_0}$ et les plongements

$$\mathcal{E}_{w_0}^{M_k} \hookrightarrow \mathcal{E}_{w_0}^{M_{k+1}}, \qquad \mathcal{E}^{M_{k+1}}/\mathcal{E}_{w_0}^{M_{k+1}} \hookrightarrow \mathcal{E}^{M_k}/\mathcal{E}_{w_0}^{M_k}$$

sont des isomorphismes. □

Armé des trois propositions précédentes, on peut combiner des suites de transformations élémentaires des φ-réseaux itérés dans un sens ou dans l'autre pour obtenir :

Proposition. – *Soient M un φ-réseau itéré dans V et $\{\widehat{W}_w\}$ une filtration de $\widehat{V}$ par des sous-φ-espaces qui est la réunion de la filtration canoniquement associée à M et d'un élément $\widehat{W}_{w_0}$ tel que*

$$\deg \mathcal{E}_{w_0}^M > d(w_0)\,.$$

On suppose que pour tout $w > w_0$ [resp. tout $w \neq w_0$] dans la suite des rangs de $\{\widehat{W}_w\}$, on a

$$\overline{\mathcal{E}}_w^M + {}^\tau\mathcal{E}_w^M \subsetneq {}^\tau\mathcal{E}^M\,.$$

Alors, quitte à remplacer A par une extension finie qui ne dépend que de la filtration $\{\widehat{W}_w\}$ et des pentes minimales μ^- et maximales μ^+ des gradués $\mathcal{E}_{w^+}^M/\mathcal{E}_{w^-}^M$, on peut construire par une suite de transformations élémentaires à partir de M un φ-réseau itéré M' tel que :

- *La filtration de $\widehat{V}$ associée à M' est contenue dans $\{\widehat{W}_w\}$ et elle comprend l'élément $\widehat{W}_{w_0}$.*

- *Pour tout rang $w > w_0$ [resp. $w \neq w_0$] tel que $\widehat{W}_w$ figure dans la filtration de $\widehat{V}$ associée à M', on a l'égalité $\deg \mathcal{E}_w^{M'} = \deg \mathcal{E}_w^M$ et des isomorphismes canoniques*

$$\begin{cases} \mathcal{E}^M/\mathcal{E}_w^M \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{M'}/\mathcal{E}_w^{M'}, \quad \overline{\mathcal{E}}_w^M \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_w^{M'}, \quad \text{si } w > w_0, \\ \mathcal{E}_w^{M'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_w^M, \quad {}^\tau\mathcal{E}_w^{M'}/\overline{\mathcal{E}}_w^{M'} \xrightarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{E}_w^M/\overline{\mathcal{E}}_w^M, \quad \text{si } w < w_0, \end{cases}$$

avec donc

$$\overline{\mathcal{E}}_w^{M'} + {}^\tau\mathcal{E}_w^{M'} \subsetneq {}^\tau\mathcal{E}^{M'}.$$

- *On a $\deg \mathcal{E}_{w_0}^{M'} = \deg \mathcal{E}_{w_0}^M - 1$ et*

$$\overline{\mathcal{E}}_{w_0}^{M'} + {}^\tau\mathcal{E}_{w_0}^{M'} \subsetneq {}^\tau\mathcal{E}^{M'}.$$

- *On a des plongements canoniques*

$$\mathcal{E}_{w^+}^M/\mathcal{E}_w^M \hookrightarrow \mathcal{E}_{w^+}^{M'}/\mathcal{E}_w^{M'}, \ \forall\, w \geq w_0$$

et

$$\mathcal{E}_{w_0}^{M'} \hookrightarrow \mathcal{E}_{w_0}^M$$

[resp. et $\mathcal{E}_w^{M'}/\mathcal{E}_{w^-}^{M'} \hookrightarrow \mathcal{E}_w^M/\mathcal{E}_{w^-}^{M'}, \forall\, w \leq w_0$*].*

Démonstration. – Traitons d'abord la première assertion.

Comme $\deg \mathcal{E}_{w_0}^M > d(w_0)$, M admet un transformé strict M^1 par $\widehat{W}_{w_0}$.

Si le conoyau du plongement canonique $\mathcal{E}^M/\mathcal{E}_{w_0^+}^M \hookrightarrow \mathcal{E}^{M^1}/\mathcal{E}_{w_0^+}^{M^1}$ est 0, on pose $M^2 = M^1$.

Si au contraire il est de dimension 1 sur κ_A, on note M^2 le transformé réciproque de M^1 par $\widehat{W}_{w_0^+}$ (il existe, quitte à avoir remplacé A par une extension finie comme dans l'énoncé, car nécessairement $\overline{\mathcal{E}}_{w_0^+}^{M^1} + {}^\tau\mathcal{E}_{w_0^+}^{M^1} \subsetneq {}^\tau\mathcal{E}^{M^1}$).

Puis on note $w_3 = w_0^+$ et M^3 le modifié maximal de M^2 en le rang w_3, $w_4 = w_3^+$ et M^4 le modifié maximal de M^3 en le rang w_4 et ainsi de suite, jusqu'à atteindre un rang w_k tel que $w_k^+ = r$ ou que $\widehat{W}_{w_k}$ figure dans la filtration de $\widehat{V}$ associée à M^k, et alors on s'arrête.

On remarque qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}^M/\mathcal{E}_{w_0^+}^M \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{M^2}/\mathcal{E}_{w_0^+}^{M^2}.$$

C'est évident si le plongement $\mathcal{E}^M/\mathcal{E}^M_{w_0^+} \hookrightarrow \mathcal{E}^{M^1}/\mathcal{E}^{M^1}_{w_0^+}$ est un isomorphisme puisqu'alors on a posé $M^2 = M^1$. Dans le cas contraire, il suffit de prouver que le plongement

$$^{\tau}\mathcal{E}^{M^2}/\,^{\tau}\mathcal{E}^{M^2}_{w_0^+} \cong \overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0^+} \hookrightarrow \overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0}/\overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0} \cap \,^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}_{w_0^+} \cong \,^{\tau}\mathcal{E}^{M}/\,^{\tau}\mathcal{E}^{M}_{w_0^+}$$

est un isomorphisme. Or on a

$$\overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0^+} \oplus \,^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}_{w_0^+} \subseteq \overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0} + \,^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}_{w_0^+} \subsetneq \,^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}$$

dont la première inclusion est une égalité et on obtient $\overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0^+} \cong \overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0}/\overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0} \cap \,^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}_{w_0^+}$, puisque le quotient $^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}/(\overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0^+} \oplus \,^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}_{w_0^+})$ est de dimension 1 au plus.

A partir de là, il est facile de voir que :

- Ou bien $M' = M^k$ satisfait toutes les conditions requises dans l'énoncé.
- Ou bien il les satisfait toutes sauf la troisième, on a l'égalité $\deg \mathcal{E}^{M'}_{w_0} = \deg \mathcal{E}^{M}_{w_0}$ et des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{E}^M_{w^+}/\mathcal{E}^M_{w} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{M'}_{w^+}/\mathcal{E}^{M'}_{w}\,, \quad \forall\, w \geq w_0\,,$$

$$\mathcal{E}^{M'}_{w_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{M}_{w_0}\,.$$

Dans le premier cas, on a terminé. Dans le second cas on recommence à partir de M' ce qu'on a fait à partir de M (sans avoir à augmenter à nouveau l'anneau A) et ainsi de suite. Comme A ne change pas, on aboutit nécessairement au bout d'un nombre fini de pas.

Voyons maintenant la deuxième assertion.

On commence par appliquer à M le processus ci-dessus pour obtenir un φ-réseau itéré M^1 qui vérifie les conclusions de la première assertion.

Si le conoyau du plongement canonique $\mathcal{E}^{M^1}_{w_0^-} \hookrightarrow \mathcal{E}^{M}_{w_0^-}$ est 0, on pose $M^2 = M^1$.

Si au contraire il est de dimension 1 sur κ_A, on note M^2 le transformé réciproque de M^1 par $\widehat{W}_{w_0^-}$ (il existe et vérifie $\deg \mathcal{E}^{M^2}_{w_0^-} = \deg \mathcal{E}^{M^1}_{w_0^-} + 1 = \deg \mathcal{E}^{M}_{w_0^-}$ car nécessairement $\overline{\mathcal{E}}^{M^1}_{w_0^-} + \,^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}_{w_0^-} \subsetneq \,^{\tau}\mathcal{E}^{M^1}$).

Si $\deg \mathcal{E}_{w_0}^{M^2} = \deg \mathcal{E}_{w_0}^{M^1} = \deg \mathcal{E}_{w_0}^{M} - 1$, on note M^3 le modifié maximal de M^2 en le rang w_0 et si au contraire $\deg \mathcal{E}_{w_0}^{M^2} = \deg \mathcal{E}_{w_0}^{M^1} + 1 = \deg \mathcal{E}_{w_0}^{M}$, on note M^3 le transformé strict de M^2 par $\widehat{W}_{w_0}$. La filtration de $\widehat{V}$ associée à M^3 comprend l'élément $\widehat{W}_{w_0}$ (sans quoi M^3 se déduirait de M par une suite de transformations élémentaires réciproques et on aurait $\deg \mathcal{E}_{w_0}^{M^3} \geq \deg \mathcal{E}_{w_0}^{M}$).

Puis on note $w_4 = w_0^-$ et M^4 le modifié maximal de M en le rang w_4, $w_5 = w_4^-$ et M^5 le modifié maximal de M^4 en le rang w_5 et ainsi de suite, jusqu'à atteindre un rang w_k tel que $\widehat{W}_{w_k}$ figure encore dans la filtration de $\widehat{V}$ associée à M_k ou que $w_k^- = 0$, et alors on s'arrête.

Le φ-réseau itéré $M' = M^k$ vérifie $\deg \mathcal{E}_{w_0}^{M'} = \deg \mathcal{E}_{w_0}^{M^1} = \deg \mathcal{E}_{w_0}^{M} - 1$ et il est dans l'un des deux cas suivants :

- Ou bien le plus grand rang $w < w_0$ tel que $\widehat{W}_w$ figure dans la filtration de $\widehat{V}$ associée à M' vérifie $\deg \mathcal{E}_{w}^{M'} = \deg \mathcal{E}_{w}^{M}$ et alors M' satisfait toutes les conditions requises dans l'énoncé.

- Ou bien ce plus grand rang $w < w_0$ vérifie $\deg \mathcal{E}_{w}^{M'} = \deg \mathcal{E}_{w}^{M} - 1$.

Dans le premier cas on a terminé. Dans le second cas, on recommence à partir de M' ce qu'on a fait à partir de M^1 et ainsi de suite. Comme l'anneau A ne change pas, on aboutit nécessairement au bout d'un nombre fini de pas. $\square$

Il faut remarquer que dans la construction de cette proposition, le sous-ensemble des rangs $w > w_0$ [resp. et celui des rangs $w < w_0$] de la filtration $\{\widehat{W}_w\}$ tels que $\widehat{W}_w$ figure encore dans la filtration de $\widehat{V}$ associée à M' est constitué de tous ceux plus grands [resp. plus petits] qu'un certain rang.

Il en est de même des deux sous-ensembles (contenant les précédents) des rangs $w > w_0$ [resp. et des rangs $w < w_0$] de $\{\widehat{W}_w\}$ tels que $\deg \mathcal{E}_{w}^{M'} = \deg \mathcal{E}_{w}^{M}$. En tous les autres rangs w (qui donc constituent un intervalle contenant w_0), on a $\deg \mathcal{E}_{w}^{M'} = \deg \mathcal{E}_{w}^{M} - 1$.

La proposition ci-dessus est complétée par :

Corollaire. – *Dans la situation de la proposition, supposons de plus que pour tout rang $w > w_0$ de $\{\widehat{W}_w\}$, on ait*

$$\overline{\mathcal{E}}_{w}^{M} + {}^{\tau}\mathcal{E}_{w^+}^{M} = {}^{\tau}\mathcal{E}^{M} .$$

Alors pour tout rang $w > w_0$ tel que $\widehat{W}_w$ figure encore dans la filtration de $\widehat{V}$ associée à M', on a toujours

$$\overline{\mathcal{E}}_w^{M'} + {}^\tau\mathcal{E}_{w^+}^{M'} = {}^\tau\mathcal{E}^{M'}$$

et on a gagné la propriété supplémentaire

$$\overline{\mathcal{E}}_{w_0}^{M'} + {}^\tau\mathcal{E}_{w_0^+}^{M'} = {}^\tau\mathcal{E}^{M'} .$$

Démonstration. – Pour tout rang $w > w_0$ tel que $\widehat{W}_w$ figure dans la filtration associée à M', on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{E}^M/\mathcal{E}_w^M \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{M'}/\mathcal{E}_w^{M'} , \qquad \overline{\mathcal{E}}_w^M \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_w^{M'} ,$$

donc on a seulement besoin de montrer que

$$\overline{\mathcal{E}}_{w_0}^{M'} + {}^\tau\mathcal{E}_{w_0^+}^{M'} = {}^\tau\mathcal{E}^{M'} .$$

Il suffit de le faire dans le cadre de la première assertion de la proposition et pour cela on renvoie à la fin de la démonstration de la proposition 12 du paragraphe 2c de [Lafforgue, 1998]. □

On est maintenant paré pour donner la démonstration de la partie d'existence du critère valuatif de propreté pour le champ $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}$.

On rappelle que le polygone de troncature

$$p : [0, r] \to \mathbb{R}^+$$

est convexe et même qu'il vérifie par hypothèse

$$[p(r') - p(r'-1)] - [p(r'+1) - p(r')] \geq 2 , \qquad \forall\, r', 0 < r' < r .$$

Pour tout φ-réseau itéré M dans la fibre générique V de $\widetilde{\mathcal{E}}$, la réduction $\mathcal{E}^M$ de $\mathcal{E}(M)$ modulo π_A est munie de sa filtration canonique $(\mathcal{E}_w^M)_{w \,\in\, \underline{r}_M^- \cup \underline{r}_M^+}$. A toute filtration $(\mathcal{E}_w^M)_{w \,\in\, \underline{w}^- \cup \underline{w}^+}$ de $\mathcal{E}^M$ qui est constituée de bons sous-objets et raffine la précédente, on peut associer son polygone $[0, r] \to \mathbb{R}$ c'est-à-dire la ligne brisée qui joint les points

$$w \mapsto \deg \mathcal{E}_w^M - \frac{w}{r}\, d , \qquad w \in \underline{w}^- \cup \underline{w}^+ .$$

Parmi tous les polygones ainsi formés, il y en a un qui est plus grand que tous les autres. On le note $\overline{p}^M$ et on peut l'appeler le polygone canonique de M. Il n'est pas nécessairement convexe mais sa restriction à chaque intervalle $[r', r'^+]$, $r' \in \underline{r}_M^-$, est convexe et il vérifie

$$\overline{p}^M(w) = \deg \mathcal{E}_w^M - \frac{w}{r}\, d\,, \qquad \forall\, w \in \underline{r}_M^- \cup \underline{r}_M^+ .$$

On peut mesurer son défaut de convexité par le nombre

$$\mu^M = \sum_{0 \leq r' < r'' < r} \max \{0, [\overline{p}^M(r''+1) - \overline{p}^M(r'')] - [\overline{p}^M(r'+1) - \overline{p}^M(r')]\}$$

qui prend ses valeurs dans $\frac{1}{r!}\mathbb{N}$ et qui vaut 0 si et seulement si le polygone $\overline{p}^M$ est convexe.

Au début de ce paragraphe, on a dressé la liste des propriétés (1)–(5) que doit vérifier un φ-réseau itéré M pour définir un point de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}(A)$ qui prolonge $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Démonstration de l'existence d'un tel réseau. – On commence par choisir un φ-réseau itéré M^0 dont le type $\underline{r}_{M^0}$ est minimal au sens que si M est un φ-réseau itéré pouvant être joint à M^0 par une suite de transformations élémentaires dans un sens ou dans l'autre, il est impossible que son type $\underline{r}_M$ vérifie $\underline{r}_M^+ \subsetneq \underline{r}_{M^0}^+$.

Quitte à transformer M^0 en sens réciproque suffisamment de fois en tous les rangs $w \in \underline{r}_{M^0}^- \cap \underline{r}_{M^0}^+$ (c'est possible indéfiniment puisque $\underline{r}_{M^0}$ est minimal), on peut supposer que

$$\deg \mathcal{E}_w^{M^0} \geq d(w) + 1\,, \qquad \forall\, w \in \underline{r}_{M^0}^- \cap \underline{r}_{M^0}^+ .$$

Partant de M^0, on construit par récurrence une suite $M^0, M^1, \ldots, M^k, \ldots$ de φ-réseaux itérés en procédant de la manière suivante :

Supposant M^k déjà construit, on considère son polygone canonique $\overline{p}^{M^k}$.

- Si $\overline{p}^{M^k} \leq p$, on arrête la construction.
- Sinon, le maximum des $\overline{p}^{M^k}(r') - p(r')$, $0 \leq r' \leq r$, est un entier ≥ 1. Si w_k désigne le plus grand entier r' où il est atteint, il existe dans $\mathcal{E}^{M^k}$ un unique bon sous-objet $\mathcal{E}_{w_k}^{M^k}$ de rang w_k tel que

$$\deg \mathcal{E}_{w_k}^{M^k} - \frac{w_k}{r}\, d = \overline{p}^{M^k}(w_k)\,.$$

On applique alors à M^k et au bon sous-objet $\mathcal{E}_{w_k}^{M^k}$ de $\mathcal{E}^{M^k}$ la construction (de la deuxième assertion) de la proposition précédente et on définit un φ-réseau itéré M^{k+1} qui vérifie en particulier

– le rang w_k figure dans le type de M^{k+1} et

$$\deg \mathcal{E}_{w_k}^{M^{k+1}} = \deg \mathcal{E}_{w_k}^{M^k} - 1\,,$$

– tout rang $w \neq w_k$ qui figure dans le type de M^{k+1} figure aussi dans celui de M^k avec

$$\deg \mathcal{E}_{w}^{M^{k+1}} = \deg \mathcal{E}_{w}^{M^k}\,,$$

– en tout rang w qui figure dans le type de M^k, on a

$$\deg \mathcal{E}_{w}^{M^{k+1}} = \begin{cases} \deg \mathcal{E}_{w}^{M^k} - 1\,, \\ \\ \text{ou} \quad \deg_{w}^{M^k}\,, \end{cases}$$

– il y a des plongements canoniques dans un sens ou dans l'autre entre les gradués de $\mathcal{E}^{M^k}$ et de $\mathcal{E}^{M^{k+1}}$ et tous sont des isomorphismes sauf un exactement (dont le conoyau est de dimension 1 sur κ_A) de chaque côté de w_k.

On a pu supposer que M^0 vérifie la propriété (1) et d'après la proposition précédente il en est de même de tous les M^k. Ils vérifient aussi la propriété (2) qui est équivalente à (1).

Il résulte de la construction et des propriétés habituelles des polygones canoniques de Harder-Narasimhan que tous les M^k vérifient :

- Pour tout rang w qui est dans le type de M^k, on a

$$\deg \mathcal{E}_{w}^{M^k} = \overline{p}^{M^k}(w) + \frac{w}{r}\,d \geq d(w)\,.$$

- On a toujours

$$\mu^{M^{k+1}} \leq \mu^{M^k}$$

et si $\mu^{M^{k+1}} = \mu^{M^k}$, on a nécessairement

$$\overline{p}^{M^{k+1}} \leq \overline{p}^{M^k} \quad \text{et} \quad \overline{p}^{M^{k+1}} \neq \overline{p}^{M^k}\,.$$

Cela impose que la suite des M^k s'arrête en un certain indice k_0. Le φ-réseau itéré $M^{k_0} = M'$ répond alors à la question posée :

On sait déjà qu'il vérifie les propriétés (1) et (2).

De plus, son polygone canonique $\overline{p}^{M'}$ satisfait l'inégalité

$$\overline{p}^{M'} \leq p$$

si bien que M' vérifie la propriété (4), que $\overline{p}^{M'}$ est un polygone convexe et que pour tout bon sous-objet $\mathcal{E}_w^{M'}$ de $\mathcal{E}^{M'}$, on a

$$\deg \mathcal{E}_w^{M'} \leq d(w)\,.$$

Il reste seulement à montrer que si $\mathcal{E}_w^{M'}$ est un bon sous-objet de type II, on a même

$$\deg \mathcal{E}_w^{M'} \leq d(w) - 1$$

et que M' vérifie la propriété (3).

Considérons l'ensemble des indices $k < k_0$ tels que

$$\max_{0 \leq r' \leq r} \{\overline{p}^{M^k}(r') - p(r')\} = 1\,.$$

Ils forment un intervalle $[k_1, k_0[$ et tous les polygones $\overline{p}^{M^k}$, $k_1 \leq k < k_0$, sont automatiquement convexes.

On a

$$\deg(\mathcal{E}_w^{M^{k_1}}) = d(w) + 1\,, \qquad \forall\, w \in \underline{r}^-_{M^{k_1}} \cap \underline{r}^+_{M^{k_1}}\,,$$

si bien que le rang w_{k_1} est supérieur ou égal à tous les rangs du type $\underline{r}^-_{M^{k_1}} \cap \underline{r}^+_{M^{k_1}}$ de M^{k_1} et la suite des rangs w_k, $k_1 \leq k < k_0$, est strictement décroissante. D'après le corollaire précédent, chaque M^{k+1}, $k_1 \leq k < k_0$, vérifie la propriété (3) en tous les rangs $w \geq w_k$ de $\underline{r}^-_{M^{k+1}} \cap \underline{r}^+_{M^{k+1}}$ et finalement M' vérifie la propriété (3) en intégralité.

Enfin, soit $\mathcal{E}_w^{M'}$ un bon sous-objet de $\mathcal{E}^{M'}$ tel que

$$\deg \mathcal{E}_w^{M'} = d(w)$$

et soit $\widehat{W}_w$ le sous-espace associé de $\widehat{V}$. Comme

$$\overline{p}^{M^k} \leq p + 1\,, \qquad k_1 \leq k \leq k_0\,,$$

$\widehat{W}_w$ est compatible avec les filtrations de $\widehat{V}$ associées à tous les M^k, $k_1 \leq k \leq k_0$.

Si $w \leq w_{k_0-1}$, le bon sous-objet $\mathcal{E}_w^{M'}$ est nécessairement de type I. Sinon, il existe un entier $k_2, k_1 \leq k_2 < k_0$, tel que

$$w_{k_2} < w \leq w_{k_2-1} \quad \text{si} \quad k_1 < k_2\,,$$

ou

$$w_{k_1} < w \leq r \quad \text{si} \quad k_2 = k_1\,,$$

et on doit avoir

$$d(w) = \deg \mathcal{E}_w^{M'} \leq \deg \mathcal{E}_w^{M^{k_0-1}} \leq \cdots \leq \deg \mathcal{E}_w^{M^{k_2}} \leq d(w)$$

si bien que ces inégalités sont des égalités.

Ce n'est possible que si le bon sous-objet $\mathcal{E}_w^{M'}$ est de type I. En effet, le plus grand rang $< w$ qui figure dans le type $\underline{r}_{M'}^{-}$ de M' est égal à 0 (auquel cas $\mathcal{E}_w^{M'}$ est de type I) ou de la forme w_{k_3} avec $k_1 \leq k_2 \leq k_3 < k_0$. Dans ce dernier cas, ${}^{\tau}\mathcal{E}^{M^{k_3}} / {}^{\tau}\mathcal{E}_w^{M^{k_3}}$ et $\overline{\mathcal{E}}_{w_{k_3}}^{M'} / \overline{\mathcal{E}}_{w_{k_3}}^{M'} \cap {}^{\tau}\mathcal{E}_w^{M'}$ admettent deux filtrations dont les gradués sont isomorphes et l'égalité des degrés

$$\deg \mathcal{E}_w^{M^{k_3}} = \deg \mathcal{E}_w^{M'}$$

impose

$$\overline{\mathcal{E}}_{w_{k_3}}^{M'} + {}^{\tau}\mathcal{E}_w^{M'} = {}^{\tau}\mathcal{E}^{M'}$$

ce qui signifie que $\mathcal{E}_w^{M'}$ est de type I. $\square$

Remarques :

• On voit qu'ici chaque M^{k+1} est construit à partir de M^k en choisissant le rang w_k qui réalise le maximum de $r' \mapsto \overline{p}^{M_k}(r') - p(r')$ et qui est le plus grand pour cette propriété.

C'est différent de la procédure indiquée dans l'article [Lafforgue, 1998] (fin de la preuve de l'existence du prolongement page 1034) où l'on prenait un bon sous-objet $\mathcal{E}_w^{M^k}$ de $\mathcal{E}^{M^k}$ vérifiant $\deg \mathcal{E}_w^{M^k} > d(w)$ et de rang w maximal pour cette propriété. Comme Yakov Varshavsky l'a indiqué à l'auteur, cette procédure n'aboutit pas en général (dès le rang $r = 3$). Il faut choisir le rang w_k à chaque pas comme on vient de le faire.

• La démonstration du lemme V.20(iii) de l'article [Lafforgue, 2002] revenait à la procédure concrète de construction du φ-réseau itéré M' qui définit le prolongement dans $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}(A)$ à partir d'un φ-réseau (non itéré) M auquel correspond un prolongement dans $\mathrm{Cht}^{r,d}(A)$. Comme on vient de corriger ladite procédure, il faut aussi dire quelque chose à propos de ce lemme :

On note $\{\widehat{W}_w\}$ la filtration de $\widehat{V}$ associée à M' et $\{\mathcal{E}_w^{M'}\}$, $\{\mathcal{E}_w^{M}\}$ les filtrations correspondantes de $\mathcal{E}^{M'}$ et $\mathcal{E}^{M}$. Il s'agit de prouver que pour tout w

$$\deg \mathcal{E}_w^{M'} < \deg \mathcal{E}_w^{M} .$$

Cela résulte simplement de ce que, d'après la proposition 2 du paragraphe 2a de [Lafforgue, 1998], on peut passer de M à M' par une suite de transformations élémentaires (toutes dans le sens direct) par les sous-espaces $\widehat{W}_w$ si bien que pour tout w on a

$$\deg \mathcal{E}_w^{M'} < d - \deg \overline{\mathcal{E}}_w^{M'} \leq \deg \mathcal{E}_w^{M} .$$

• Pour la preuve de l'unicité du prolongement (qui est beaucoup plus courte), on renvoie aux deux dernières pages de l'article [Lafforgue, 1998].

Bibliographie succincte :

- V.G. Drinfeld, Langlands' conjecture for GL(2) over functional Fields, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki, p. 565-574 (1978).

- V.G. Drinfeld, Varieties of modules of F-sheaves, *Functional Analysis and its Applications* **21**, p. 107-122 (1987).

- V.G. Drinfeld, The proof of Petersson's conjecture for GL(2) over a global field of characteristic p, *Functional Analysis and its Applications* **22**, p. 28-43 (1988).

- V.G. Drinfeld, Cohomology of compactified manifolds of modules of F-sheaves of rank 2, *Journal of Soviet Mathematics* **46**, p. 1789-1821 (1989).

- L. Lafforgue, Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson, *Astérisque* **243**, SMF (1997).

- L. Lafforgue, Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld, *Journal of the AMS* **11**, p. 1001-1036 (1998).

- L. Lafforgue, Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, *Inventiones Mathematicae* **147**, p. 1-241 (2002).

- G. Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, *Publications mathématiques de l'IHES* **65**, p. 131-210 (1987).

- G. Laumon, La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions, *Séminaire Bourbaki*, exposé n° 873 (mars 2000).