Exposé IV : Problèmes posés dans le cas de l'induction automorphe sans ramification de GL_1 à GL_r

Laurent Lafforgue

Exposé à l'IHÉS le 1er juillet 2008

Introduction

Les précédents exposés I, II et III de juin 2008 ont permis de construire, grâce à la formule de Poisson, un noyau de la fonctorialité dans le cas de l'induction automorphe sans ramification de GL_1 à GL_2.

Nous examinons ici les premières questions rencontrées lorsque l'on tente de généraliser au cas de l'induction automorphe sans ramification de GL_1 à GL_r le procédé de construction purement adélique employé dans le cas $r = 2$.

Cet exposé IV est un exposé de recherche au sens où il porte sur un travail en cours dont on ne sait s'il aboutira.

Voici le contenu des différents paragraphes :

Les paragraphes 1 à 5 reprennent presque ligne à ligne les paragraphes 1 à 5 de l'exposé I. Les seuls changements proviennent de ce que E n'est plus une extension quadratique du corps de fonctions de base F mais une extension non ramifiée de degré r arbitraire, et de ce que le groupe GL_2 est remplacé par GL_r. La construction de noyaux locaux de l'induction automorphe de GL_1/E à GL_r/F est une généralisation immédiate de celle déjà exposée dans le cas $r = 2$; cette construction est donnée dans le paragraphe 5.

En chaque place x de F, les noyaux locaux de l'induction automorphe et leurs modifications obtenues par permutation des vecteurs de base associés à GL_r constituent deux familles de fonctions sur $E_x^\times \times \mathrm{GL}_r(F_x)$. On est à la recherche d'une transformation de Fourier partielle sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui, combinée avec la transformation de Fourier additive sur E_x, échange nos deux familles de fonctions sur $E_x^\times \times \mathrm{GL}_r(F_x)$. Ces transformations de Fourier partielles en toutes les places x de F devraient vérifier une formule de Poisson qui permette la construction de noyaux globaux de l'induction automorphe sur $\mathbb{A}_E^\times \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ invariants à gauche par $E^\times \times \mathrm{GL}_r(F)$.

Comme les caractères automorphes de $\mathbb{A}_E^\times$ ne se transfèrent pas nécessairement en des formes automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$, la formule de Poisson que nous cherchons devrait nécessairement comporter des "termes complémentaires" associés à des "points au bord" des réseaux de sommation. Afin d'en savoir plus sur la forme attendue de ces "termes complémentaires", nous avons besoin de généraliser la formule d'inversion de Shalika au cas de formes automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$ qui ne sont pas nécessairement cuspidales. Ce résultat, le seul du présent exposé, est l'objet du paragraphe 6.

Cette généralisation aux formes automorphes arbitraires de la formule d'inversion de Shalika fournit des indications assez précises sur le type de réseaux de sommation et de "points au bord" de ces réseaux que nous voudrions voir apparaître dans l'hypothétique formule de Poisson que nous cherchons. Ces indications poussent à rechercher des transformations de Fourier partielles sur les groupes locaux $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui aient une certaine forme. Le paragraphe 7 propose les définitions d'un certain nombre d'opérateurs de transformations de Fourier partielles qui pourraient constituer les pierres de construction élémentaire de l'opérateur cherché.

Enfin, le paragraphe 8 propose une combinaison possible de ces pierres de construction élémentaires et énonce une "conjecture de travail" sur l'échange par transformation de Fourier partielle des deux familles de fonctions définies sur $E_x^\times \times \mathrm{GL}_r(F_x)$. Dans l'état actuel de notre recherche, cette combinaison proposée et la conjecture locale associée ne sont ni plus ni moins vraisemblables que beaucoup d'autres variantes qu'il est facile d'imaginer. Seuls des calculs dans le cas $r = 3$ et au-delà – calculs que nous tentons de mener – permettront éventuellement d'avancer un peu plus loin.

1 Anneaux et groupes adéliques

Comme dans les trois exposés précédents, on travaille à partir du corps des fonctions F d'une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. On conserve toutes les mêmes notations relatives à F, à ses complétions F_x, $x \in |X|$, et à son anneau des adèles $\mathbb{A}_F = \mathbb{A}$.

Les assertions (ii) et (iii) de la proposition I.1 se généralisent en :

Proposition IV.1. – *Pour tout entier $r \geq 1$, le groupe $\mathrm{GL}_r(F)$ est un sous-groupe discret du groupe topologique localement compact $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.* □

La "formule du produit" implique la première assertion de la proposition suivante :

Proposition IV.2. – *Pour tout entier $r \geq 1$, le sous-groupe discret $\mathrm{GL}_r(F)$ est contenu dans le noyau $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})^0$ de l'homomorphisme composé*

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \xrightarrow{\det} \mathbb{A}^\times \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}\,.$$

Si $r \geq 2$, le quotient $\mathrm{GL}_r(F)\backslash\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})^0$ n'est pas compact mais il est de volume fini pour les mesures de Haar de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. □

On notera désormais $H = \mathrm{GL}_r$ considéré comme un groupe algébrique.

Le groupe topologique

$$H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = \left\{ (g_x)_{x\in|X|} \in \prod_{x\in|X|} \mathrm{GL}_r(F_x) \;\middle|\; g_x \in \mathrm{GL}_r(O_x) \text{ pour presque toute place } x \right\}$$

contient comme sous-groupe ouvert compact maximal le groupe des matrices à coefficients entiers adéliques inversibles

$$K_0^H = \prod_{x\in|X|} \mathrm{GL}_r(O_x)\,.$$

En toute place x, $\mathrm{GL}_r(O_x) = K_{0,x}^H$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathrm{GL}_r(F_x) = H(F_x)$.

Considérons enfin une extension E de F de degré r, que l'on suppose partout non ramifiée. Autrement dit, E est le corps des fonctions rationnelles sur un revêtement X' fini étale de degré r de la courbe X.

Pour toute place $x \in |X|$, considérons l'algèbre $E_x = E \otimes_F F_x$. Elle se décompose en un produit

$$E_x = E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$$

d'extensions $E_{x_1}, \ldots, E_{x_k}$ de F_x, dont les degrés $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ont pour somme $r_1 + \cdots + r_k = r$. Ces extensions de F_x ne sont autres que les complétions de E associées aux points fermés $x_1, \ldots, x_k$ de la fibre au-dessus de x du revêtement X' de la courbe X. Les corps de définition $\kappa(x_1), \ldots, \kappa(x_k)$ de ces points fermés $x_1, \ldots, x_k$ sont des extensions de $\kappa(x)$ de degrés respectifs $r_1, \ldots, r_k$. On notera $O_{E_x} = O_{E_{x_1}} \times \cdots \times O_{E_{x_k}}$. On dit que la place x est complètement scindée dans E lorsque tous les $r_1, \ldots, r_k$ valent 1 avec donc $k = r$, et qu'elle est inerte dans E lorsque $k = 1$ et $r_1 = r$.

On remarque que le produit tensoriel $E \otimes_F \mathbb{A}_F$ s'identifie à l'anneau des adèles $\mathbb{A}_E$ du corps de fonctions E.

On notera désormais

$$G = \mathrm{Res}_{E/F} \, \mathrm{GL}_1$$

le groupe algébrique sur F qui se déduit de GL_1 par restriction des scalaires à la Weil de E à F. Cela signifie que pour toute algèbre A on a

$$G(A) = \mathrm{GL}_1(E \otimes_F A) \, .$$

En particulier, on a en toute place x de F

$$G(F_x) = E_x^\times = E_{x_1}^\times \times \cdots \times E_{x_k}^\times \, .$$

De plus, $E_x^\times$ possède un sous-groupe ouvert compact maximal qui est

$$K_{0,x}^G = O_{E_x}^\times = O_{E_{x_1}}^\times \times \cdots \times O_{E_{x_k}}^\times \, .$$

On dispose aussi du groupe topologique adélique

$$\begin{aligned} G(\mathbb{A}) &= \mathbb{A}_E^\times \\ &= \left\{ (t_x)_{x \in |X|} \in \prod_{x \in |X|} E_x^\times \;\middle|\; t_x \in O_{E_x}^\times \text{ pour presque toute place } x \right\} \end{aligned}$$

et de son sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_0^G = \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^G = \prod_{x \in |X|} O_{E_x}^\times \, .$$

En toute place $x \in |X|$, on dispose de l'homomorphisme de norme local

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{Nm} & : & E_x^\times & \to & F_x^\times \\ & & t_x & \mapsto & \mathrm{Nm}(t_x) = \text{déterminant de l'endomorphisme de multiplication par } t_x \\ & & & & \text{dans } E_x \text{ vu comme espace vectoriel de dimension } r \text{ sur } F_x \, . \end{array}$$

Il envoie $O_{E_x}^\times$ dans $O_x^\times$.

Le produit des homomorphismes de norme locaux en toutes les places $x \in |X|$ définit un homomorphisme de norme global

$$\mathrm{Nm} : G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times \to \mathbb{A}_F^\times \, .$$

Il envoie le sous-groupe ouvert compact maximal K_0^G dans $O_{\mathbb{A}}^\times$ et le sous-groupe discret $E^\times$ dans $F^\times$.

2 Algèbres de Hecke sphériques et formes automorphes non ramifiées

En toute place x, on note $d^\times t_x$ la mesure de Haar sur $E_x^\times$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $O_{E_x}^\times$. On note $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur $E_x^\times = G(F_x)$ qui sont invariantes par $K_{0,x}^G = O_{E_x}^\times$. Cette algèbre a un élément unité qui est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{x,\emptyset}^G$ de $K_{0,x}^G$.

Quand E_x se décompose en $E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$, on a un isomorphisme

$$E_x^\times / O_{E_x}^\times = E_{x_1}^\times / O_{E_{x_1}}^\times \times \cdots \times E_{x_k}^\times / O_{E_{x_k}}^\times \xrightarrow[\sim]{x \circ \mathrm{Nm} \times \cdots \times x \circ \mathrm{Nm}} r_1 \mathbb{Z} \times \cdots \times r_k \mathbb{Z}$$

si bien que $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ s'identifie à l'algèbre de groupe de $r_1 \mathbb{Z} \times \cdots \times r_k \mathbb{Z}$. La mesure $d^\times t_x$ est le produit des mesures de Haar $d^\times t_1, \ldots, d^\times t_k$ sur $E_{x_1}^\times, \ldots, E_{x_k}^\times$ qui attribuent le volume 1 à $O_{E_{x_1}}^\times, \ldots, O_{E_{x_k}}^\times$.

On déduit de ces considérations :

Lemme IV.3. – *Quand, en la place $x \in |X|$, la F_x-algèbre $E_x = E \otimes_F F_x$ se décompose en $E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$, l'application*

$$\varphi_x \mapsto \int_{\substack{t=(t_1,\ldots,t_k) \\ \in E_x^\times = E_{x_1}^\times \times \cdots \times E_{x_k}^\times}} d^\times t_1 \ldots d^\times t_k \cdot \varphi_x(t_1, \ldots, t_k) \cdot X_1^{x(\mathrm{Nm}(t_1))} \ldots X_k^{x(\mathrm{Nm}(t_k))}$$

définit un isomorphisme

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{1 \le i \le k} \mathbb{C}[X_i^{\pm r_i}] = \bigotimes_{1 \le i \le k} \mathbb{C}[X_i^{\pm 1}, (\varepsilon_i \cdot X_i)^{\pm 1}, \ldots, (\varepsilon_i^{r_i - 1} \cdot X_i)^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}}$$

où, pour $1 \le i \le k$, ε_i est n'importe quelle racine de l'unité de degré r_i dans $\mathbb{C}^\times$. □

Le groupe topologique localement compact $G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$ peut être muni de la mesure de Haar $d^\times t$ qui est le produit sur toutes les places $x \in |X|$ des mesures $d^\times t_x$ sur les $G(F_x) = E_x^\times$. Elle attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $K_0^G = \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^G$.

On note $\mathcal{H}_\emptyset^G$ l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur $G(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$ qui sont invariantes par $K_0^G = O_{\mathbb{A}_E}^\times$. Cette algèbre possède un élément unité qui est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_\emptyset^G$ de K_0^G.

On a une décomposition naturelle

$$\mathcal{H}_\emptyset^G = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

avec

$$\mathbb{1}_\emptyset^G = \bigotimes_{x \in |X|} \mathbb{1}_{x,\emptyset}^G \, .$$

Tout caractère χ

$$\mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \to \mathbb{C}^\times$$

peut aussi être vu comme une représentation irréductible, de dimension 1, de l'algèbre $\mathcal{H}_\emptyset^G$. Il se décompose canoniquement en un produit

$$\chi = \bigotimes_{x \in |X|} \chi_x$$

où chaque χ_x est un caractère

$$E_x^\times / O_{E_x}^\times \to \mathbb{C}^\times$$

ou, ce qui revient au même, une représentation irréductible, de dimension 1, de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$.

Quand l'algèbre E_x se décompose en $E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$, se donner une telle représentation irréductible χ_x de l'algèbre $\bigotimes_{1\leq i\leq k} \mathbb{C}[X_i^{\pm r_i}] = \bigotimes_{1\leq i\leq k} \mathbb{C}[X_i^{\pm 1}, (\varepsilon_i \cdot X_i)^{\pm 1}, \ldots, (\varepsilon_i^{r_i-1} \cdot X_i)^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}}$ équivaut à se donner les images $z_{x_1}(\chi_x), \ldots, z_{x_k}(\chi_x)$ dans $\mathbb{C}^\times$ des variables $X_1, \ldots, X_k$; ces images sont bien déterminées à multiplication près par des puissances des racines de l'unité $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$.

Un caractère global $\chi : \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \to \mathbb{C}^\times$ est unitaire si et seulement si tous ses facteurs locaux χ_x : $E_x^\times / O_{E_x}^\times \to \mathbb{C}^\times$ le sont.

Et un caractère local $\chi_x : E_x^\times / O_{E_x}^\times \to \mathbb{C}^\times$ est unitaire si et seulement si ses “valeurs propres” $z_{x_1}(\chi_x), \ldots,$ $z_{x_k}(\chi_x)$ sont de module 1.

On rappelle la définition suivante :

Définition IV.4. – *On appelle représentations automorphes de $\mathcal{H}_\emptyset^G$ ses représentations irréductibles (de dimension 1) qui apparaissent dans la décomposition spectrale de l'espace de Hilbert*

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_0^G) = L^2(E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times)$$

muni de l'action de $\mathcal{H}_\emptyset^G$ par convolution.

Autrement dit, ce sont les caractères unitaires

$$\chi : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \to \mathbb{C}^\times .$$

□

Passons maintenant au groupe $H = \mathrm{GL}_r$.

On note $T = \mathbb{G}_m^r$ son tore maximal des matrices diagonales,

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & * \end{pmatrix} \right\} ,$$

B son sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \ldots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & * \end{pmatrix} \right\} ,$$

et N_B le radical unipotent de B

$$N_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

En toute place x, on note dg_x la mesure de Haar sur $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $K_{0,x}^H = \mathrm{GL}_r(O_x)$. On note $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur $H(F_x)$ qui sont invariantes à gauche et à droite par $K^H_{0,x}$. On l'appelle l'algèbre de Hecke sphérique de $H(F_x)$. Elle admet pour élément unité la fonction caractéristique $\mathbb{I}^H_{x,\emptyset}$ de $K^H_{0,x}$.

Rappelons la décomposition d'Iwasawa :

Lemme IV.5. – *Tout élément g_x de $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$ peut s'écrire sous la forme*

$$g_x = \mu \cdot u \cdot g_\emptyset \,,$$

avec $\mu \in T(F_x) = (F_x^\times)^r$, $u \in N_B(F_x)$, $g_\emptyset \in \mathrm{GL}_r(O_x)$.

De plus, si on note

- *$d\mu$ la mesure de Haar sur $T(F_x) = (F_x^\times)^r$ qui attribue le volume 1 à $T(O_x) = (O_x^\times)^r$,*
- *du la mesure de Haar de $N_B(F_x)$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact $N_B(O_x)$,*
- *$dg_\emptyset$ la restriction de dg_x à $\mathrm{GL}_r(O_x) = K^H_0$,*

on dispose de la formule suivante pour l'intégration des fonctions h_x localement constantes à support compact sur $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$

$$\int_{H(F_x)} dg_x \cdot h_x(g_x) = \int_{T(F_x)} d\mu \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot \int_{K^H_0} dg_\emptyset \cdot h_x(\mu \cdot u \cdot g_\emptyset)\,.$$

□

On note $\delta_{B(F_x)}$ le “caractère modulaire”

$$\begin{array}{rcl} T(F_x) = (F_x^\times)^r & \to & q_x^{\mathbb{Z}}\,, \\ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) & \mapsto & \delta_{B(F_x)}(\mu) = \displaystyle\prod_{1\le i<j\le r} \left|\frac{\mu_i}{\mu_j}\right|_x = \prod_{1\le i<j\le r} q_x^{x(\mu_j)-x(\mu_i)}\,. \end{array}$$

Rappelons l'énoncé du théorème de Satake :

Théorème IV.6. – *L'application*

$$h_x \mapsto \int_{\substack{\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_2)\\ \in T(F_x)=(F_x^\times)^r}} d\mu \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot h_x(\mu\cdot u) \cdot X_1'^{x(\mu_1)} \ldots X'^{x(\mu_r)} \cdot \delta^{1/2}_{B(F_x)}(\mu)$$

définit un isomorphisme

$$S^H_x : \mathcal{H}^H_{x,\emptyset} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1'^{\pm1}, \ldots, X_r'^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_r}\,.$$

En particulier, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}^H_{x,\emptyset}$ est commutative. □

Le groupe topologique localement compact $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ peut être muni de la mesure de Haar dg qui est le produit sur toutes les places $x \in |X|$ des mesures dg_x sur les $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$. Elle attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal

$$K^H_0 = \prod_{x\in|X|} K^H_{0,x} = \mathrm{GL}_r(O_\mathbb{A})\,.$$

On note $\mathcal{H}^H_\emptyset$, et on appelle algèbre de Hecke sphérique globale, l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui sont invariantes à gauche et à droite par $K^H_0 = \mathrm{GL}_r(O_\mathbb{A})$. Cette algèbre admet pour élément unité la fonction caractéristique $\mathbb{I}^H_\emptyset$ de K^H_0.

On a une décomposition naturelle

$$\mathcal{H}_\emptyset^H = \bigotimes_{x\in|X|} \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$$

avec

$$\mathbb{1}_\emptyset^H = \bigotimes_{x\in|X|} \mathbb{1}_{x,\emptyset}^H \, ,$$

si bien que, comme produit tensoriel d'algèbres commutatives, $\mathcal{H}_\emptyset^H$ est elle-même une algèbre commutative.

Toute représentation irréductible π de cette algèbre commutative $\mathcal{H}_\emptyset^H$ est nécessairement de dimension 1. Elle se décompose canoniquement en un produit tensoriel

$$\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x \, ,$$

où chaque π_x est une représentation irréductible (de dimension 1) de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$.

Se donner une telle représentation irréductible de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1'^{\pm1}, \ldots, X_r'^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_r}$ équivaut à se donner, à l'ordre près, les images $z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x) \in \mathbb{C}^\times$ des r variables $X_1', \ldots, X_r'$.

On pose en rang r la définition suivante :

Définition IV.7. – *On appelle représentations automorphes de $\mathcal{H}_\emptyset^H$ ses représentations irréductibles (de dimension 1) qui apparaissent dans la décomposition spectrale de l'espace de Hilbert*

$$L^2(H(F)\backslash H(\mathbb{A})/K_0^H) = L^2(\mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_r(O_\mathbb{A}))$$

muni de l'action de $\mathcal{H}_\emptyset^H$ par convolution à droite. □

Considérons une représentation irréductible $\pi = \bigotimes_{x\in|X|} \pi_x$ de l'algèbre $\mathcal{H}_\emptyset^H$. Elle est caractérisée par la donnée, pour toute place $x \in |X|$, des r "valeurs propres de Hecke" $z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$ bien définies à l'ordre près.

On appelle "forme automorphe propre" de π toute fonction

$$h : H(F)\backslash H(\mathbb{A})/K_0^H \to \mathbb{C}$$

telle que, pour toute place $x \in |X|$ et tout élément h_x de l'algèbre de Hecke sphérique locale $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$, on ait la formule suivante pour le produit de convolution

$$h * h_x = S_x^H(h_x)(z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)) \cdot h \, .$$

Le "théorème de mutiplicité 1" de Piatetski-Shapiro vaut en rang r arbitraire :

Théorème IV.8. – *Pour toute représentation automorphe π de $\mathcal{H}_\emptyset^H$, l'espace de ses "formes automorphes propres" est de dimension* 1. □

3 Définition locale du transfert de Langlands

Rappelons que nous travaillons sur les deux groupes algébriques sur F

$$G = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathrm{GL}_1 \quad \text{et} \quad H = \mathrm{GL}_r \, .$$

En toute place $x \in |X|$, nous allons définir un homomorphisme d'algèbres commutatives

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

qui constitue la règle locale de Langlands pour le transfert automorphe par induction de G à H.

Posons :

Définition IV.9. – *En toute place $x \in |X|$, on appelle homomorphisme de transfert par induction de G à H et on note*

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

l'homomorphisme défini de la manière suivante :

Si l'algèbre $E_x = E \otimes_F F_x$ se décompose en le produit $E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$, avec l'isomorphisme induit

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{1 \le i \le k} \mathbb{C}[X_i^{\pm 1}, (\varepsilon_i \cdot X_i)^{\pm 1}, \dots, (\varepsilon_i^{r_i - 1} \cdot X_i)^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}} ,$$

ρ_x^* est le composé de l'isomorphisme de Satake

$$S_x^H : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1'^{\pm 1}, \dots, X_r'^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}$$

et de l'homomorphisme qui consiste en la substitution des variables (à l'ordre près)

$$(X_1', \dots, X_r') \mapsto \coprod_{1 \le i \le k} (X_i, \varepsilon_i \cdot X_i, \dots, \varepsilon_i^{r_i - 1} \cdot X_i) .$$

□

La composition avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ permet d'associer à tout caractère χ_x de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ vu comme un homomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}$$

un caractère de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ noté $(\rho_x)_* \, \chi_x$.

Autrement dit, pour tout caractère non ramifié

$$\chi_x : E_x^\times / O_{E_x}^\times \to \mathbb{C}^\times ,$$

$(\rho_x)_* \, \chi_x$ est l'unique représentation irréductible π_x de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ telle que, si $E_x = E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$, on ait égalité à l'ordre près des familles de r valeurs propres de Hecke

$$(z_1(\pi_x), \dots, z_r(\pi_x)) = \coprod_{1 \le i \le k} (z_{x_i}(\chi_x), \varepsilon_i \cdot z_{x_i}(\chi_x), \dots, \varepsilon_i^{r_i - 1} \cdot z_{x_i}(\chi_x)) .$$

Dans cette série d'exposés, nous recherchons une démonstration purement adélique du théorème suivant :

Théorème IV.10. – *Pour tout caractère automorphe non ramifié*

$$\chi = \prod_{x \in |X|} \chi_x : E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \to \mathbb{C}^\times ,$$

il existe une (unique) représentation automorphe $\pi = \bigotimes_{x \in |X|} \pi_x$ de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_\emptyset^H$ du groupe $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, telle que

$$\forall \, x \in |X| , \qquad \pi_x = (\rho_x)_* \, \chi_x .$$

Remarque. Ce théorème implique que, pour tout caractère automorphe $\chi = \prod_{x\in|X|} \chi_x$ comme dans l'énoncé, il existe une forme automorphe non nulle (et unique à multiplication près par un scalaire)

$$h : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) \to \mathbb{C}$$

telle que, en toute place $x \in |X|$, on ait en décomposant $E_x = E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$

$$h * h_x = S_x^H(h_x) \left(\prod_{1\leq i\leq k} (z_{x_i}(\chi_x), \varepsilon_i \cdot z_{x_i}(\chi_x), \ldots, \varepsilon_i^{r_i-1} \cdot z_{x_i}(\chi_x)) \right) \cdot h\,, \quad \forall\, h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H\,.$$

Mais réciproquement, si on prouve l'existence d'une forme automorphe h vérifiant une telle propriété relativement à un caractère automorphe χ de $\mathbb{A}_E^\times/O_{\mathbb{A}_E}^\times$, la représentation irréductible π de $\mathcal{H}_\emptyset^H$ engendrée par cette forme h sera nécessairement automorphe, c'est-à-dire apparaîtra dans la décomposition spectrale hilbertienne de $L^2(H(F)\backslash H(\mathbb{A})/K_0^H)$. Cela résulte de ce que toutes les valeurs propres $z_{x_i}(\chi_x)$, $1 \leq i \leq k$, en chaque place $x \in |X|$ sont de module 1.

4 Fonctions sphériques et fonctions de Whittaker

En toute place $x \in |X|$, construisons sur $G(F_x)/K_{0,x}^G$ et $H(F_x)/K_{0,x}^H$ des formes propres relatives aux caractères unitaires des algèbres de Hecke sphériques locales $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$.

Lemme IV.11. – *Si l'algèbre E_x se décompose en $E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$, et $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ est une famille de k nombres complexes de module 1, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{x,\lambda_\bullet}^G : E_x^\times = E_{x_1}^\times \times \cdots \times E_{x_k}^\times & \to & \mathbb{C} \\ t = (t_1, \ldots, t_k) & \mapsto & \lambda_1^{x(\mathrm{Nm}(t_1))} \ldots \lambda_k^{x(\mathrm{Nm}(t_k))} \end{array}$$

est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

- *elle est invariante par $K_{x,0}^G = O_{E_x}^\times = O_{E_{x_1}}^\times \times \cdots \times O_{E_{x_k}}^\times$;*
- $\Phi_{x,\lambda_\bullet}^G * \varphi_x = S_x^G(\varphi_x)(\lambda_1^{r_1}, \ldots, \lambda_k^{r_k}) \cdot \Phi_{x,\lambda_\bullet}^G$, $\forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$;
- $\Phi_{x,\lambda_\bullet}^G(1) = 1$.

□

Après le groupe multiplicatif $G(F_x)$, passons au groupe matriciel $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$.

Nous avons besoin de choisir un caractère additif continu non trivial

$$\psi : F_x \to \mathbb{C}^\times\,.$$

On rappelle que son conducteur est noté N_ψ.

Un tel caractère additif induit un caractère du radical unipotent $N_B(F_x)$ défini comme

$$\begin{array}{rcl} \psi_B : N_B(F_x) & \to & \mathbb{C}^\times\,, \\ u = \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \ldots & u_{1,r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{r-1,r} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \psi\left(\sum_{1\leq i<r} u_{i,i+1}\right)\,. \end{array}$$

La décomposition d'Iwasawa de tous les éléments $g \in H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$,

$$g = \mu \cdot u \cdot g_\emptyset ,$$

telle que rappelée dans le lemme IV.5, permet d'énoncer la proposition suivante qui explicite et caractérise ce que l'on appelle les fonctions de Whittaker sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$:

Proposition IV.12. – *Soit $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une famille de r nombres complexes de module 1.*

On note

$$W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet} : H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C} ,$$

et on appelle fonction de Whittaker associée à $\lambda_\bullet$ et ψ, la fonction définie de la manière suivante :

(i) *Dans le cas où le caractère ψ est régulier (c'est-à-dire de conducteur $N_\psi = 0$), la valeur de $W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}$ en un point de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ écrit sous la forme*

$$\mu \cdot u \cdot g_\emptyset$$

avec

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) \in T(F_x) = (F_x^\times)^r$,

$u \in N_B(F_x)$,

$g_\emptyset \in \mathrm{GL}_r(O_x)$,

est

$$W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}(\mu \cdot u \cdot g_\emptyset) = \begin{cases} \psi_B(\mu \cdot u \cdot \mu^{-1}) \cdot q_x^{\left(\sum\limits_{1 \le i \le r} \frac{2i-1-r}{2} \cdot x(\mu_i)\right)} \cdot \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda_1^{x(\mu_1)+r-1} & \dots & \lambda_r^{x(\mu_1)+r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{x(\mu_{r-1})+1} & \dots & \lambda_r^{x(\mu_{r-1})+1} \\ \lambda_1^{x(\mu_r)} & \dots & \lambda_r^{x(\mu_r)} \end{vmatrix}}{\prod\limits_{1 \le i < j \le r} (\lambda_i - \lambda_j)} \\ \qquad \text{si } x(\mu_1) \ge x(\mu_2) \ge \dots \ge x(\mu_{r-1}) \ge x(\mu_r) \\ 0 \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Dans le cas où le caractère ψ n'est pas régulier, on l'écrit sous la forme $\psi(a) = \psi_0(\gamma_0^{-1} \cdot a)$ avec $\gamma_0 \in F_x^\times$, $x(\gamma_0) = N_\psi$ et ψ_0 régulier, et la fonction $W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}$ est définie par la formule*

$$\begin{aligned} W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}(g) &= W^{H,\psi_0}_{x,\lambda_\bullet}\left(\begin{pmatrix} \gamma_0^{-r+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \gamma_0^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right) \\ &= W^{H,\psi_0}_{x,\lambda_\bullet}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_0^{r-1} \end{pmatrix} \cdot g \right) \cdot (\lambda_1 \dots \lambda_r)^{-(r-1)N_\psi} . \end{aligned}$$

Alors la fonction de Whittaker $W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}$ vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent :

- *elle est invariante à droite par $K^H_{x,0} = \mathrm{GL}_r(O_x)$;*
- $W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}(u \cdot g) = \psi_B(u)^{-1} \cdot W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}(g)$, $\forall\, u \in N_B(F_x)$;

- $W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet} * h_x = S^H_x(h_x)(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\cdot W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}$, $\forall\, h_x \in \mathcal{H}^H_{x,\emptyset}$;
- *on a*

$$W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}(1) = 1 \ \textit{dans le cas}\ \text{(i)}\ \textit{où}\ \psi\ \textit{est régulier}$$

et

$$W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}\left(\begin{pmatrix} \gamma_0^{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \gamma_0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \ \textit{dans le cas}\ \text{(ii)}.$$

□

Insistons sur le fait que la fonction de Whittaker $W^{H,\psi}_{x,\lambda_\bullet}$ ne dépend pas de l'ordre des r composantes de $\lambda_\bullet = (\lambda_1,\dots,\lambda_r)$.

5 Noyaux locaux de la fonctorialité

Les homomorphismes de transfert

$$\rho_x^* : \mathcal{H}^H_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$$

ont été définis par une certaine règle de substitution des valeurs propres de Hecke.

Si $E_x = E_{x_1} \times \dots \times E_{x_k}$, cette règle de substitution consiste à associer à toute suite de k nombres complexes inversibles $\lambda_\bullet = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ la suite $(\rho_x)_*\,\lambda_\bullet$ de r nombres complexes obtenue en mettant bout à bout les suites $(\lambda_i, \varepsilon_i\cdot\lambda_i,\dots,\varepsilon_i^{r_i-1}\cdot\lambda_i)$, $1 \le i \le k$.

Nous utilisons la même notation $(\rho_x)_*$ que pour l'application déjà définie entre les ensembles de caractères des algèbres $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ et $\mathcal{H}^H_{x,\emptyset}$ puisque les deux applications $(\rho_x)_*$ se correspondent via la paramétrisation des caractères de $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ ou $\mathcal{H}^H_{x,\emptyset}$ par leurs valeurs propres de Hecke.

Nous sommes conduits à poser la définition suivante :

Définition IV.13. – *On appelle noyaux locaux de la fonctorialité les fonctions*

$$K^{G,H,\psi}_{x,P_x} : G(F_x) \times H(F_x) \to \mathbb{C}$$

définies par une intégrale de la forme

$$K^{G,H,\psi}_{x,P_x}(t,g) = \int_{\substack{\lambda_\bullet=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\\ |\lambda_1|=\dots=|\lambda_k|=1}} d\lambda_1\cdot\dots\cdot d\lambda_k \cdot P_x(\lambda_\bullet)\cdot \overline{\Phi^G_{x,\lambda_\bullet}(t)}\cdot W^{H,\psi}_{x,(\rho_x)_*\lambda_\bullet}(g)$$

où

- *k est le nombre de facteurs de la décomposition $E_x = E_{x_1}\times\dots\times E_{x_k}$, c'est-à-dire le nombre de places $x_1,\dots,x_k$ de E au-dessus de la place x de F,*
- *P_x est un polynôme, élément de $\mathbb{C}[X_1^{\pm r_1},\dots,X_k^{\pm r_k}]$,*
- *t et g sont des éléments de $G(F_x) = E^\times_{x_1}\times\dots\times E^\times_{x_k}$ et de $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$,*
- *$\lambda_\bullet = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ décrit le produit de k copies du cercle unité de $\mathbb{C}^\times$,*
- *$d\lambda_1,\dots,d\lambda_k$ désignent la mesure invariante de volume 1 sur ces copies du cercle unité de $\mathbb{C}^\times$.* □

La raison pour laquelle on baptise ces fonctions

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} : G(F_x) \times H(F_x) \to \mathbb{C}$$

du nom de “noyaux locaux de la fonctorialité” est fournie par le lemme suivant :

Lemme IV.14. – *Si l'algèbre $E_x = E \otimes_F F_x$ se décompose en $E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$, P_x est un polynôme en k variables $X_1^{\pm r_1}, \ldots, X_k^{\pm r_k}$ et $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ est une suite de k nombres complexes de module 1, on a*

$$\int_{G(F_x)} d^\times t \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t,g) \cdot \Phi_{x,\lambda_\bullet}^G(t) = P_x(\lambda_\bullet) \cdot W_{x,(\rho_x)_* \lambda_\bullet}^{H,\psi}(g)\,.$$

□

Ce lemme signifie en effet que les noyaux d'intégration

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} : G(F_x) \times H(F_x) \to \mathbb{C}$$

transforment toute forme propre

$$G(F_x)/K_{0,x}^G \to \mathbb{C}$$

d'un caractère non ramifié χ_x de $G(F_x)$ en une forme propre

$$H(F_x)/K_{0,x}^H \to \mathbb{C}$$

de la représentation irréductible $\pi_x = (\rho_x)_*\, \chi_x$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$.

Les noyaux

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} : G(F_x) \times H(F_x) \to \mathbb{C}$$

sont invariants à droite par $K_{0,x}^G \times K_{0,x}^H$.

Pour toute fonction sphérique $h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$, on a la formule

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} * h_x = K_{x,P_x}^{G,H,\psi} *^{-1} (\rho_x^*)(h_x)$$

où le premier produit de convolution $*$ est relatif à la variable $g_x \in H(F_x)$, et le second $*^{-1}$ à la variable $t_x^{-1} \in G(F_x)$:

$$(K_{x,P_x}^{G,H,\psi} * h_x)(t,g) = \int_{H(F_x)} dg_x \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t, g \cdot g_x^{-1}) \cdot h_x(g_x)$$

$$(K_{x,P_x}^{G,H,\psi} *^{-1} \varphi_x)(t,g) = \int_{G(F_x)} d^\times t_x \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\psi}(t \cdot t_x^{-1}, g) \cdot \varphi_x(t_x^{-1})$$

Enfin, on a pour toute fonction sphérique $\varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$

$$K_{x,P_x}^{G,H,\psi} *^{-1} \varphi_x = K_{x,P_x \cdot S_x^G(\varphi_x)}^{G,H,\psi}\,.$$

6 La formule d'inversion de Shalika revisitée

Pour tout entier $r' \geq 1$, notons

$$w_{r'} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'inversion de l'ordre des indices dans le groupe linéaire $\mathrm{GL}_{r'}$.

Si $r' < r$, on considère $\mathrm{GL}_{r'}$ comme plongé dans $\mathrm{GL}_r = H$ via l'homomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_{r'} & \hookrightarrow & \mathrm{GL}_r = H \\ g' & \mapsto & \left(\begin{array}{cc|ccccc} g' & \vdots & & & 0 & & \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Comme nous l'avons fait dans le cas où E est une extension quadratique et $r = 2$, nous voudrions relier en toute place $x \in |X|$ les noyaux locaux

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) \times H(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (t, g) & \mapsto & K_{x,P_x}^{G,H,\psi_x}(t, g) \end{array}$$

et leurs modifications

$$(t, g) \mapsto K_{x,P_x}^{G,H,\bar{\psi}_x}(t^{-1}, w_r \cdot w_{r-1} \cdot g)$$

en combinant la ψ_x-transformation de Fourier sur $E_x \supset E_x^\times = G(F_x)$ et une transformation de Fourier partielle sur $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$.

Pour tout entier $r' \geq 1$, notons

$$B_{r'} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{GL}_{r'}$,

$$N_{r'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son radical unipotent,

$$T_{r'} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{G}_m^{r'}$$

le tore diagonal, et

$$Q_{r'} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{GL}_{r'-1} \cdot N_{r'} \,.$$

La transformation de Fourier partielle sur $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$ en chaque place $x \in |X|$ que nous cherchons devrait être compatible avec une formule de Poisson pour le réseau

$$N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)$$

complété par des “points au bord” qu'il nous faut deviner.

Plus précisément, les noyaux globaux

$$\begin{array}{rcl} G(\mathbb{A}) \times H(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C} \\ (t = (t_x)_{x \in |X|},\ g = (g_x)_{x \in |X|}) & \mapsto & \displaystyle\prod_{x \in |X|} K_{x,P_x}^{G,H,\psi_x}(t_x, g_x) \end{array}$$

et leurs modifications

$$(t,g) \mapsto \prod_{x \in |X|} K_{x,P_x}^{G,H,\bar{\psi}_x}(t_x^{-1}, w_r \cdot w_{r-1} \cdot g_x)$$

devraient devenir égaux après sommation sur les éléments du réseau produit

$$E^\times \times N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F) \,,$$

modulo des termes complémentaires associés aux “points au bord” de ce réseau.

La présence de tels termes complémentaires est nécessaire puisque les caractères automorphes de $E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$ se transfèrent en des formes automorphes

$$\mathrm{GL}_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui ne sont pas nécessairement cuspidales ; ces formes automorphes peuvent être des séries d'Eisenstein c'est-à-dire admettre des “termes constants” non nuls associés à divers sous-groupes paraboliques.

Les “termes complémentaires” associés à des “points au bord” que nous voudrions deviner doivent coïncider avec les “termes constants” des séries d'Einsenstein dans les noyaux du transfert global

$$E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times / O_{\mathbb{A}_E}^\times \times \mathrm{GL}_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) / \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) \to \mathbb{C}$$

que nous cherchons à construire.

Afin d'en savoir plus sur la forme des “termes complémentaires”, nous avons besoin de revisiter la formule d'inversion de Shalika, de façon qu'elle s'applique à des fonctions

$$Q_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui ne soient pas nécessairement cuspidales.

Comme dans l'exposé III, nous avons besoin d'un caractère additif non trivial

$$\psi : \mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$$

dont la restriction au sous-groupe discret F soit triviale.

Nous avons rappelé dans le paragraphe III.1 comment construire un tel caractère ψ à partir d'un caractère additif non trivial

$$\psi_q : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$$

et d'une forme différentielle rationnelle non nulle ω_X sur la courbe X.

Nous notons encore

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$$

les composantes de ψ en toutes les places $x \in |X|$, et N_{ψ_x} les conducteurs de ces caractères ψ_x.

Pour toute place x, on munit F_x de la mesure additive da_x qui attribue le volume $q_x^{\frac{N_{\psi_x}}{2}}$ au sous-groupe ouvert compact O_x. Puis on munit $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ de la mesure additive globale da qui est le produit des mesures locales da_x. On sait qu'elle attribue le volume 1 au quotient compact $F\backslash\mathbb{A}$.

Plus généralement, pour tout groupe algébrique N sur F supposé unipotent, chaque localisation $N(F_x)$ se trouve munie d'une mesure invariante du_x déduite, par dévissage, de la mesure da_x de F_x. Alors $N(\mathbb{A})$ est muni de la mesure invariante du qui est le produit des mesures locales du_x. Cette mesure globale attribue le volume 1 au quotient compact $N(F)\backslash N(\mathbb{A})$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous travaillons sur le groupe $H = \mathrm{GL}_r$.

Le caractère $\psi : F\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$ induit sur le radical unipotent $N_r(\mathbb{A}) = N_B(\mathbb{A})$ un caractère

$$\begin{array}{rcl} \psi_{(r)} : N_r(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}^\times \,, \\ u = \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \dots & u_{1,r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{r-1,r} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \psi\left(\displaystyle\sum_{1\le s<r} u_{s,s+1}\right) . \end{array}$$

Ce caractère est trivial sur le sous-groupe discret $N_r(F)$.

Plus généralement, associons à toute partition de l'entier r

$$\underline{r} = (1 \le r_1 < r_2 < \cdots < r_{\ell-1} < r_\ell = r) \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$$

le caractère

$$\begin{array}{rcl} \psi_{\underline{r}} : N_r(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}^\times \,, \\ u = \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \dots & u_{1,r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{r-1,r} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \psi\left(\displaystyle\sum_{\substack{1\le s<r \\ s\notin\underline{r}}} u_{s,s+1}\right) . \end{array}$$

Tous les caractères $\psi_{\underline{r}}$ sont triviaux sur $N_r(F)$.

Le groupe $T(\mathbb{A}) = T_r(\mathbb{A}) \cong (\mathbb{A}^\times)^r$ des matrices diagonales $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ de $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ agit sur l'ensemble des caractères

$$\psi : N_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

par

$$(\mu, \psi) \mapsto \mu \cdot \psi$$

où $\mu \cdot \psi$ est défini par

$$(\mu \cdot \psi)(u) = \psi(\mu^{-1} \cdot u \cdot \mu) \,.$$

Le fixateur dans $T(\mathbb{A})$ du caractère $\psi_{(r)}$ est le centre $Z_H(\mathbb{A}) = Z_r(\mathbb{A})$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, défini par les égalités

$$\mu_1 = \cdots = \mu_r \, ,$$

et, plus généralement, le fixateur dans $T(\mathbb{A})$ du caractère $\psi_{\underline{r}}$ associé à une partition $\underline{r}$ est $T_{\underline{r}}(\mathbb{A})$, si on note $T_{\underline{r}}$ le sous-tore de $T = T_r$ défini par les égalités

$$\mu_s = \mu_{s+1} \, , \quad \forall \, s \notin \underline{r} \, , \; 1 \leq s < r \, .$$

On rappelle qu'on a muni le groupe unipotent $N_r(\mathbb{A})$ de la mesure de Haar du qui attribue le volume 1 au quotient compact $N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})$.

Pour toute fonction

$$h : Q(F)\backslash H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

invariante à droite par un sous-groupe ouvert K de $\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) = K_0^H$, on peut définir

$$\begin{aligned} W_{(r)} \, h : N_r(F)\backslash H(\mathbb{A})/K &\to \mathbb{C} \, , \\ g &\mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} \psi_{(r)}(u) \cdot h(u \cdot g) \cdot du \, , \end{aligned}$$

et, plus généralement, les

$$\begin{aligned} W_{\underline{r}} \, h : (Q \cap T_{\underline{r}})(F) \cdot N_r(F)\backslash H(\mathbb{A})/K &\to \mathbb{C} \, , \\ g &\mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} \psi_{\underline{r}}(u) \cdot h(u \cdot g) \cdot du \, . \end{aligned}$$

Ces fonctions $W_{(r)} \, h$ et $W_{\underline{r}} \, h$ satisfont la règle de tranformation par les éléments $u \in N_r(\mathbb{A})$

$$W_{(r)} \, h(u \cdot g) = \psi_{(r)}(u)^{-1} \cdot W_{(r)} \, h(g) \, ,$$

$$W_{\underline{r}} \, h(u \cdot g) = \psi_{\underline{r}}(u)^{-1} \cdot W_{\underline{r}} \, h(g) \, .$$

Posons la définition suivante :

Définition IV.15. – *On considère une famille $h_\bullet$ de fonctions*

$$h_{\underline{r}} : (Q \cap T_{\underline{r}})(F) \cdot N_r(F)\backslash H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

indexées par les partitions $\underline{r} = (1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_{\ell-1} < r_\ell = r)$ de l'entier r. On suppose que ces fonctions sont invariantes à droite par un sous-groupe ouvert K de $\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) = K_0^H$ et vérifient les règles de transformation

$$h_{\underline{r}}(u \cdot g) = \psi_{\underline{r}}^{-1}(u) \cdot h_{\underline{r}}(g) \, , \quad \forall \, u \in N_r(\mathbb{A}) \, .$$

Une telle famille sera dite "sommable sur $\mathrm{GL}_{r-1}(F)$" si, pour tout rang $r' = 1, 2, \ldots, r-1$, elle satisfait la condition suivante :

$(*)_{r'}$ *Pour toute partition $\underline{r}' = (r'+1 \leq r'_1 < \cdots < r'_{\ell'-1} < r'_{\ell'} = r)$ de l'intervalle $[r', r]$, la somme localement finie*

$$\mathrm{Ps}_{r',\underline{r}'}(h_\bullet)(g) = \left[\sum_{\gamma \in Q_{r'}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r'}(F)} \mathrm{Ps}_{r'-1,\underline{r}'}(h_\bullet)(\gamma \cdot g) \right] + \mathrm{Ps}_{r'-1,\{r'\} \cup \underline{r}'}(h_\bullet)(g)$$

(avec $\mathrm{Ps}_{0,\underline{r}'}(h_\bullet)(g) = h_{\underline{r}'}(g)$, $\forall \, g$, $\forall \, \underline{r}'$, si $r'-1 = 0$) est invariante à gauche par $\mathrm{GL}_{r'}(F)$.

Remarque. Pour tout $r' \geq 2$, les sommes introduites dans l'énoncé de la condition $(*)_{r'}$ sont bien définies dès lors que les conditons $(*)_1, (*)_2, \ldots, (*)_{r'-1}$ sont déjà satisfaites. $\square$

Lorsque $r' = r - 1$ et, nécessairement, $\underline{r}' = (r)$, on écrira simplement

$$\mathrm{Ps}_{r-1,(r)}(h_\bullet) = \mathrm{Ps}_{r-1}(h_\bullet)\,.$$

Cette fonction est invariante à gauche par $Q(F)$.

La formule d'inversion de Shalika se généralise de la manière suivante :

Proposition IV.16. –

(i) *Soit*

$$h : Q(F)\backslash H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

une fonction invariante à droite par un sous-groupe ouvert K *de* $K_0^H = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$.

Alors la famille $W_\bullet\, h$ *de ses coefficients de Fourier*

$$W_{\underline{r}}\, h(g) = \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} du \cdot \psi_{\underline{r}}(u) \cdot h(u \cdot g)$$

indexés par les partitions $\underline{r} = (1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_\ell = r)$ *de l'entier* r *est "sommable sur* $\mathrm{GL}_{r-1}(F)$*" au sens de la définition précédente.*

De plus, on a l'égalité suivante entre fonctions sur $Q(F)\backslash H(\mathbb{A})/K_0^H$:

$$h = \mathrm{Ps}_{r-1}(W_\bullet\, h)$$

(ii) *Réciproquement, considérons une famille* $h_\bullet$ *de fonctions*

$$h_{\underline{r}} : (Q \cap T_{\underline{r}})(F) \cdot N_r(F)\backslash H(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

invariantes à droite par un sous-groupe ouvert K *de* K_0^H *et telles que*

$$h_{\underline{r}}(u \cdot g) = \psi_{\underline{r}}^{-1}(u) \cdot h_{\underline{r}}(g)\,, \quad \forall\, \underline{r}\,,\ \forall\, u \in N_r(\mathbb{A})\,,\ \forall\, g\,.$$

Supposons de plus que la famille $h_\bullet$ *est "sommable sur* $\mathrm{GL}_{r-1}(F)$*" au sens de la définition précédente.*

Alors la somme

$$\mathrm{Ps}_{r-1}(h_\bullet) = h$$

définit une fonction

$$h : Q(F)\backslash H(\mathbb{A})/K \to \mathbb{C}$$

telle que

$$W_{\underline{r}}\, h = h_{\underline{r}}\,, \quad \forall\, \underline{r}\,.$$

Démonstration.

(i) Si $r = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Raisonnant par récurrence, supposons donc que $r \geq 2$ et que l'assertion est déjà connue en rang $r - 1$.

Comme précédemment, on considère GL_{r-1} comme plongé dans GL_r ; alors tous ses sous-groupes, et en particulier Q_{r-1}, héritent de plongements dans GL_r.

On introduit encore le radical unipotent de Q_r :

$$V_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On dispose du lemme suivant :

Lemme IV.17. – *La correspondance*

$$\gamma \mapsto (v \mapsto \psi_{(r)}(\gamma \cdot v \cdot \gamma^{-1}))$$

définit une bijection de $Q_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)$ sur l'ensemble des caractères non triviaux de $V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})$.

Démonstration du lemme. Il résulte de ce que la correspondance

$$\gamma \mapsto (a \mapsto \psi(\gamma \cdot a))$$

définit une bijection de F sur l'ensemble des caractères de $F\backslash \mathbb{A}$. $\square$

Suite de la démonstration de la proposition IV.16. La fonction sur $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$

$$g \mapsto h(g)$$

est invariante à gauche par $Q(F)$ et, a fortiori, par $V(F)$.

Rappelant que le groupe additif $V_r(\mathbb{A})$ a été muni d'une mesure de Haar dv qui attribue le volume 1 au quotient compact $V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})$, la formule de Poisson relative au sous-groupe discret $V_r(F)$ de $V_r(\mathbb{A})$ et le lemme IV.17 ci-dessus impliquent l'égalité

$$h(g) = \left[\sum_{\gamma \in Q_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} \int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv \cdot \psi_{(r)}(\gamma \cdot v \cdot \gamma^{-1}) \cdot h(v \cdot g) \right] + \int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv \cdot h(v \cdot g)\,.$$

Or on a pour tout élément $\gamma \in Q_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)$

$$\begin{aligned} \int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv \cdot \psi_{(r)}(\gamma \cdot v \cdot \gamma^{-1}) \cdot h(v \cdot g) &= \int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv \cdot \psi_{(r)}(v) \cdot h(\gamma^{-1} \cdot v \cdot \gamma \cdot g) \\ &= \int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv \cdot \psi_{(r)}(v) \cdot h(v \cdot \gamma \cdot g)\,. \end{aligned}$$

Cela implique en particulier que, pour tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et tout $\gamma \in Q_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)$ la fonction

$$\begin{aligned} h_{g,\gamma} : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) &\to \mathbb{C} \\ g' &\mapsto h_{g,\gamma}(g') = \int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv \cdot \psi_{(r)}(v) \cdot h(v \cdot \gamma \cdot g' \cdot g) \end{aligned}$$

est invariante à gauche par $\gamma^{-1} \cdot Q_{r-1}(F) \cdot \gamma$.

D'autre part, la fonction

$$\begin{aligned} h_{g,0} : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) &\to \mathbb{C} \\ g' &\mapsto h_{g,0}(g') = \int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv \cdot h(v \cdot \gamma \cdot g' \cdot g) \end{aligned}$$

est invariante à gauche par $\mathrm{GL}_{r-1}(F)$, et on a

$$h(g'\cdot g) = \left[\sum_{\gamma\in Q_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} h_{g,\gamma}(g')\right] + h_{g,0}(g')\,.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence aux fonctions $g'\mapsto h_{g,\gamma}(g')$, $\gamma\in Q_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)$, et $g'\mapsto h_{g,0}(g')$ sur $\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} h_{g,\gamma}(g') & = & \mathrm{Ps}_{r-2,(r-1)}(W_\bullet\, h_{g,\gamma}(\gamma\cdot\bullet))(g') \\ & = & \mathrm{Ps}_{r-2,(r)}(W_\bullet\, h)(\gamma\cdot g'\cdot g) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} h_{g,0}(g') & = & \mathrm{Ps}_{r-2,(r-1)}(W_\bullet\, h_{g,0})(g') \\ & = & \mathrm{Ps}_{r-2,(r-1<r)}(W_\bullet\, h)(g'\cdot g)\,. \end{array}$$

L'assertion voulue en rang r résulte alors de la formule de définition

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ps}_{r-1}(W_\bullet\, h)(g) & = & \mathrm{Ps}_{r-1,(r)}(W_\bullet\, h)(g) \\ & = & \left[\displaystyle\sum_{\gamma\in Q_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} \mathrm{Ps}_{r-2,(r)}(W_\bullet\, h)(\gamma\cdot g)\right] + \mathrm{Ps}_{r-2,(r-1<r)}(W_\bullet\, h)(g)\,. \end{array}$$

(ii) Ayant défini la fonction h comme

$$g\mapsto h(g) = \mathrm{Ps}_{r-1}(h_\bullet)(g)\,,$$

nous devons prouver que, pour toute partition $\underline{r}$ de l'entier r, on a

$$W_{\underline{r}}\, h = h_{\underline{r}}\,.$$

Une fois encore, nous raisonnons par récurrence et supposons le résultat déjà en rang $r-1$.

Pour toute partition $\underline{r}$ de l'entier r et tout élément $\gamma\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)$, on a d'après le lemme IV.17

$$\int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv\cdot \psi_{(r)}(v)\cdot h_{\underline{r}}(\gamma\cdot v\cdot g) = \begin{cases} h_{\underline{r}}(\gamma\cdot g) & \text{si} \quad r-1\notin \underline{r} \;\text{ et }\; \gamma\in Q_{r-1}(F)\,, \\ 0 & \text{si} \quad r-1\in \underline{r} \;\text{ ou }\; \gamma\notin Q_{r-1}(F)\,, \end{cases}$$

et

$$\int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv\cdot h_{\underline{r}}(\gamma\cdot v\cdot g) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r-1\notin \underline{r}\,, \\ h_{\underline{r}}(\gamma\cdot g) & \text{si} \quad r-1\in \underline{r}\,. \end{cases}$$

Comme

$$\begin{array}{rcl} h(g) & = & \mathrm{Ps}_{r-1,(r)}(h_\bullet)(g) \\ & = & \left[\displaystyle\sum_{\gamma\in Q_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} \mathrm{Ps}_{r-2,(r)}(h_\bullet)(\gamma\cdot g)\right] + \mathrm{Ps}_{r-2,(r-1<r)}(h_\bullet)(g)\,, \end{array}$$

on obtient

$$\int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv\cdot \psi_{(r)}(v)\cdot h(v\cdot g) = \mathrm{Ps}_{r-2,(r)}(h_\bullet)(g)$$

et

$$\int_{V_r(F)\backslash V_r(\mathbb{A})} dv\cdot h(v\cdot g) = \mathrm{Ps}_{r-2,(r-1<r)}(h_\bullet)(g)\,.$$

On conclut en appliquant le résultat en rang $r-1$, déjà connu par hypothèse de récurrence, aux fonctions sur $\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})$

$$\begin{aligned} g' &\mapsto \mathrm{Ps}_{r-2,(r)}(h_\bullet)(g'\cdot g)\,, \\ g' &\mapsto \mathrm{Ps}_{r-2,(r<r-1)}(h_\bullet)(g'\cdot g)\,. \end{aligned}$$

On a fini de prouver la proposition IV.16. $\square$

La proposition IV.16 démontrée grâce au lemme IV.17 suggère que la formule de Poisson que nous cherchons sur $H(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ pourrait consister en une succession de sommations sur les éléments $\gamma \in Q_{r'}(F)\backslash\mathrm{GL}_{r'}(F)$, pour $1 \leq r' \leq r-1$, avec ajout d'un terme complémentaire à chaque étape r'.

Or chaque quotient $Q_{r'}\backslash\mathrm{GL}_{r'}$ est naturellement isomorphe à l'espace vectoriel de dimension r' privé du point 0.

La transformation de Fourier partielle sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ en une place $x \in |X|$ arbitraire que nous cherchons pourrait consister en une succession de transformation de Fourier sur les $Q_{r'}(F_x)\backslash\mathrm{GL}_{r'}(F_x) \cong F_x^{r'} - \{0\}$, $1 \leq r' \leq r-1$.

Pour $r' = 1$, nous pouvons penser à faire une transformation de Fourier additive sur F_x, ou bien une transformation de Fourier multiplicative sur $F_x^\times$. Le cas où $H = \mathrm{GL}_2$, que nous avons déjà traité, nous fait pencher vers une transformation de Fourier multiplicative. Dans ce cas, il n'y aurait pas de point au bord correspondant à la sommation sur $Q_1(F)\backslash\mathrm{GL}_1(F) = F^\times$ mais le terme complémentaire manquant pourrait être fourni, comme dans le cas où $H = \mathrm{GL}_2$, par le point 0 au bord de $E \supset E - \{0\} = E^\times = G(F)$.

Pour $2 \leq r' \leq r-1$, on ne voit pas ce que l'on pourrait faire d'autre qu'une transformation de Fourier additive sur $F_x^{r'} \supset F_x^{r'} - \{0\} \cong Q_{r'}(F_x)\backslash\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$. Le terme complémentaire attendu serait fourni par le point 0 au bord du réseau $F^{r'} \supset F^{r'} - \{0\} \cong Q_{r'}(F)\backslash\mathrm{GL}_{r'}(F)$.

7 Transformations de Fourier partielles sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$

Dans ce paragraphe, nous travaillons à nouveau en une place $x \in |X|$ fixée. Nous disposons en cette place du caractère additif non trivial

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times\,.$$

Ayant noté N_{ψ_x} le conducteur de ce caractère, on a muni F_x de la mesure additive da_x qui attribue le volume $q_x^{\frac{N_{\psi_x}}{2}}$ au sous-groupe ouvert compact O_x.

Considérons un entier $r' \geq 1$.

Le groupe $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ est contenu comme ouvert dense dans l'algèbre $M_{r'}(F_x) = \{m = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq r'}\}$ des matrices carrées $r' \times r'$ à coefficients dans F_x. Munissons $M_{r'}(F_x)$ de la mesure additive $dm = \prod\limits_{1\leq i,j\leq r} da_{i,j}$ qui attribue le volume $\left(q_x^{\frac{N_{\psi_x}}{2}}\right)^{r'^2}$ au sous-groupe ouvert compact $M_{r'}(O_x)$.

La ψ_x-transformée de Fourier d'une fonction $f : M_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$ est la fonction $\hat{f} : M_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$ définie par la formule

$$\begin{aligned} \hat{f}(m') &= \int_{M_{r'}(F_x)} dm \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}({}^t m' \cdot m)) \cdot f(m) \\ &= \int_{M_{r'}(F_x)} dm \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}(m \cdot {}^t m')) \cdot f(m)\,. \end{aligned}$$

Rappelons :

Théorème IV.18. –

(i) *Pour toute fonction* $f : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$ *admettant une* ψ_x*-transformée de Fourier* $\hat{f}$*, et pour tout élément* $g_0 \in \mathrm{GL}_{r'}(F_x)$*, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} M_{r'}(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ m & \mapsto & f(m \cdot g_0) \\ [\textit{resp.} \quad m & \mapsto & f(g_0 \cdot m)] \end{array}$$

admet pour ψ_x*-transformée de Fourier la fonction*

$$\begin{array}{rcl} M_{r'}(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ m' & \mapsto & |\det(g_0)|_x^{-r'} \cdot \hat{f}(m' \cdot {}^t g_0^{-1}) \\ [\textit{resp.} \quad m' & \mapsto & |\det(g_0)|_x^{-r'} \cdot \hat{f}({}^t g_0^{-1} \cdot m')] \,. \end{array}$$

(ii) *La* ψ_x*-transformation de Fourier* $f \mapsto \hat{f}$ *définit un automorphisme de l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur* $M_{r'}(F_x)$*.*

Son automorphisme réciproque n'est autre que la $\bar{\psi}_x$*-transformation de Fourier.*

(iii) *La* ψ_x*-transformation de Fourier préserve la norme hilbertienne invariante sur* $M_{r'}(F_x)$

$$f \mapsto \sqrt{\int_{M_{r'}(F_x)} dm \cdot |f(m)|^2}\,,$$

ainsi que le produit hermitien associé. □

Pour tout choix de deux exposants $s, s' \in \mathbb{R}$, introduisons maintenant un opérateur

$$f \mapsto \mathrm{Fr}^{\psi_x, s', s}(f)$$

agissant dans l'espace des fonctions $f : \mathrm{GL}_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$. Il est défini par la formule intégrale

$$\mathrm{Fr}^{\psi_x, s', s}(f)(m') = \int_{\mathrm{GL}_{r'}(F_x)} dm \cdot \psi(\mathrm{Tr}({}^t m' \cdot m)) \cdot \frac{|\det(m')|_x^{s'}}{|\det(m)|_x^{s}} \cdot f(m)\,.$$

Autrement dit, l'opérateur $f \mapsto \mathrm{Fr}^{\psi_x, s', s}(f)$ est le composé de la multiplication par le caractère $m \mapsto |\det(m)|_x^{-s}$, de la ψ_x-transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$, et de la multiplication par le caractère $m' \mapsto |\det(m')|_x^{s'}$.

Pour tout choix d'exposants $s, s' \in \mathbb{R}$, le théorème IV.18 implique :

Corollaire IV.19. –

(i) *Pour que l'opérateur* $\mathrm{Fr}^{\psi_x, s', s}$ *transforme la translation à droite [resp. à gauche] par un élément* $g_0 \in \mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ *en la translation à droite [resp. à gauche] par* ${}^t g_0^{-1}$*, il faut et il suffit que* $s + s' = r'$*.*

(ii) *L'opérateur* $\mathrm{Fr}^{\psi_x, s', s}$ *admet* $\mathrm{Fr}^{\bar{\psi}_x, s, s'}$ *pour opérateur réciproque.*

(iii) *Pour que l'opérateur* $\mathrm{Fr}^{\psi_x, s', s}$ *préserve la norme hilbertienne invariante sur* $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$

$$f \mapsto \sqrt{\int_{\mathrm{GL}_{r'}(F_x)} dg \cdot |f(g)|^2}$$

ainsi que le produit hermitien associé, il faut et il suffit que $s = s' = \frac{r'}{2}$*.*

Démonstration.
(i) Traitons le cas des translations à droite, celui des translations à gauche étant semblable.

Soit f une fonction sur $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ dont l'image par $\mathrm{Fr}^{\psi_x,s',s}$ est bien définie.

Notons $h(m) = f(m \cdot g_0)$ puis

$$f_1(m) = |\det(m)|_x^{-s} \cdot f(m)\,, \quad h_1(m) = |\det(m)|_x^{-s} \cdot h(m)\,.$$

On a

$$h_1(m) = |\det(m)|_x^{-s} \cdot f(m \cdot g_0) = |\det(g_0)|_x^{s} \cdot f_1(m \cdot g_0)\,.$$

Comme $f_2(m') = \hat{f}_1(m')$ est bien définie, $h_2(m') = \hat{h}_1(m')$ est aussi bien définie et, d'après le théorème IV.18(i), on a

$$h_2(m') = |\det(g_0)|_x^{s-r'} \cdot f_2(m' \cdot {}^t g_0^{-1})\,.$$

On note enfin

$$f_3(m') = |\det(m')|_x^{s'} \cdot f_2(m')\,, \quad h_3(m') = |\det(m')|_x^{s'} \cdot h_2(m')$$

avec donc

$$h_3(m') = |\det(g_0)|_x^{s+s'-r'} \cdot f_3(m' \cdot {}^t g_0^{-1})\,.$$

La conclusion annoncée en résulte puisque, par défininion, $f_3 = \mathrm{Fr}^{\psi_x,s',s}(f)$ et $h_3 = \mathrm{Fr}^{\psi_x,s',s}(h)$.

(ii) est une conséquence immédiate du théorème IV.18(ii).

(iii) résulte du théorème IV.18(iii) puisque, à une constante près, la mesure multiplicative dg sur $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ est le produit de la mesure additive dm restreinte de $M_{r'}(F_x)$ et du caractère $m \mapsto |\det(m)|_x^{-r'}$. □

Avant de poursuivre, faisons remarquer que la torsion par le caractère

$$(m', m) \mapsto \frac{|\det(m')|_x^{s'}}{|\det(m)|_x^{s}}$$

qui apparaît dans la définition de l'opérateur $\mathrm{Fr}^{\psi_x,s',s}$ est compatible avec d'éventuelles sommations sur les éléments de parties du sous-groupe discret $\mathrm{GL}_{r'}(F)$ de $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$. En effet, d'après la "formule du produit", le caractère global

$$\prod_{x \in |X|} |\det(\bullet)|_x$$

est trivial sur $\mathrm{GL}_{r'}(F)$.

Rappelons que nous avons considéré chaque groupe $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$, $1 \le r' \le r$, comme plongé dans $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Lorsque $s + s' = r' \le r$, la propriété du corollaire IV.19(i) permet d'induire à partir de $\mathrm{Fr}^{\psi_x,s',s}$ un opérateur $\mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x,s',s}$ de transformation de Fourier partielle sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$:

Définition IV.20. – *Soit r' un entier compris entre 1 et r, et $s, s' \in \mathbb{R}$ deux exposants tels que $s + s' = r'$.*

Étant donné deux fonctions f et f' sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$, on écrit

$$f' = \mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x,s',s}(f)$$

si, pour tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_{r'}(F_x) & \mapsto & \mathbb{C} \\ m' & \mapsto & f'(m' \cdot {}^t g^{-1}) \end{array}$$

est image par l'opérateur $\mathrm{Fr}^{\psi_x, s', s}$ *de la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_{r'}(F_x) & \mapsto & \mathbb{C} \\ m & \mapsto & f(m \cdot g)\,. \end{array}$$

Remarque. Cette définition est cohérente d'après la partie (i) du corollaire IV.19. $\square$

On déduit aussitôt de cette définition et du corollaire IV.19 :

Corollaire IV.21. – *Pour* $r' \in \{1, 2, \ldots, r\}$ *et* $s \in \mathbb{R}$, *l'opérateur* $\mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x, r'-s, s}$ *agissant dans l'espace des fonctions sur* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Il transforme la translation à droite par un élément* $g_0 \in \mathrm{GL}_r(F_x)$ *en la translation à droite par* ${}^t g_0^{-1}$.

D'autre part, il transforme la translation à gauche par un élément $g_0' \in \mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ *en la translation à gauche par* ${}^t g_0'^{-1}$.

(ii) *Il admet* $\mathrm{Fr}_{r'}^{\bar{\psi}_x, s, r'-s}$ *pour opérateur réciproque.*

(iii) *Pour qu'il préserve la norme hilbertienne invariante sur* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *et le produit hermitien associé, il faut et il suffit que* $s = r' - s = \frac{r'}{2}$. $\square$

Par composition, on obtient encore :

Corollaire IV.22. – *Pour* $r' \in \{2, 3, \ldots, r\}$ *et* $s \in \mathbb{R}$, *introduisons les deux opérateurs suivants agissant dans l'espace des fonctions sur* $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *:*

$$\mathrm{Fr}_{r'-1,r'}^{\psi_x, s-1, s} = \mathrm{Fr}_{r'-1}^{\bar{\psi}_x, s-1, r'-s} \circ \mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x, r'-s, s}$$

$$\mathrm{Fr}_{r',r'-1}^{\psi_x, s, s-1} = \mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x, s, r'-s} \circ \mathrm{Fr}_{r'-1}^{\bar{\psi}_x, r'-s, s-1}$$

Alors :

(i) *Ces opérateurs commutent avec la translation à droite par tout élément* $g_0 \in \mathrm{GL}_r(F_x)$.

D'autre part, ils commutent avec la translation à gauche par tout élément $g_0' \in \mathrm{GL}_{r'-1}(F_x)$.

(ii) *Les opérateurs* $\mathrm{Fr}_{r'-1,r'}^{\psi_x, s-1, s}$ *et* $\mathrm{Fr}_{r',r'-1}^{\bar{\psi}_x, s, s-1}$ *sont réciproques l'un de l'autre.*

Remarque. Les opérateurs $\mathrm{Fr}_{r'-1,r'}^{\psi_x, s-1, s}$ et $\mathrm{Fr}_{r',r'-1}^{\psi_x, s, s-1}$ ne respectent jamais la norme hilbertienne invariante sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$. $\square$

Pour tout $r' \in \{1, 2, \ldots, r\}$ et tout $s \in \mathbb{R}$, l'opérateur $\mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x, r'-s, s}$, agissant dans l'espace des fonctions sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$, peut être vu comme une transformation de Fourier partielle sur les variables de la partie $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Si $r' \geq 2$, les opérateurs $\mathrm{Fr}_{r'-1,r'}^{\psi_x, s-1, s}$ et $\mathrm{Fr}_{r',r'-1}^{\psi_x, s, s-1}$ peuvent être vus comme des transformations de Fourier partielles sur les variables du quotient $\mathrm{GL}_{r'-1}(F_x) \backslash \mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ de $\mathrm{GL}_{r'}(F_x) \hookrightarrow \mathrm{GL}_r(F_x)$.

Supposons enfin que l'on fasse agir les opérateurs $\mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x, r'-s, s}$ ou $\mathrm{Fr}_{r'-1,r'}^{\psi_x, s-1, s}$, dans l'espace des fonctions

$$f : \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

telles que

$$f(u \cdot g) = \psi_{(r')}(u)^{-1} \cdot f(g)\,, \qquad \forall\, u \in N_{r'}(F_x),\ \forall\, g \in \mathrm{GL}_r(F_x)\,.$$

Si f' désigne l'image d'une telle fonction f par l'opérateur $\mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x, r'-s,s}$ [resp. $\mathrm{Fr}_{r'-1,r'}^{\psi_x, s-1,s}$], elle vérifie automatiquement la condition

$$f'({}^t u^{-1} \cdot g) = \psi_{(r')}(u)^{-1} \cdot f'(g)\,, \qquad \forall\, u \in N_{r'}(F_x),\ \forall\, g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$$

$$[\text{resp. } f'(u \cdot g) = \psi_{(r'-1)}(u)^{-1} \cdot f'(g)\,, \qquad \forall\, u \in N_{r'-1}(F_x),\ \forall\, g \in \mathrm{GL}_r(F_x)].$$

L'opérateur $\mathrm{Fr}_{r'}^{\psi_x, s-1,s}$, agissant dans l'espace de ces fonctions f, peut être vu comme une transformation de Fourier partielle sur les variables de la partie $N_{r'}(F_x)\backslash \mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ de $N_{r'}(F_x)\backslash \mathrm{GL}_r(F_x)$.

Si $r' \geq 2$, l'opérateur $\mathrm{Fr}_{r'-1,r'}^{\psi_x, s-1,s}$ peut être vu comme une transformation de Fourier partielle sur les variables du quotient $Q_{r'}(F_x)\backslash \mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ de $N_{r'}(F_x)\backslash \mathrm{GL}_{r'}(F_x) \hookrightarrow N_{r'}(F_x)\backslash \mathrm{GL}_r(F_x)$.

8 Une conjecture d'échange par transformation de Fourier

Revenons maintenant aux noyaux locaux de la fonctorialité, introduits dans la définition IV.13,

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) \times H(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (t,g) & \mapsto & K_{x,P_x}^{G,H,\psi_x}(t,g)\,. \end{array}$$

Nous voudrions les relier à leurs modifications

$$(t,g) \mapsto K_{x,P_x}^{G,H,\bar{\psi}_x}(t^{-1}, w_r \cdot w_{r-1} \cdot g)$$

en combinant la ψ_x-transformation de Fourier sur $E_x \supset E_x^\times = G(F_x)$ et une transformation de Fourier partielle sur $H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$.

Rappelons que l'algèbre $E_x = E \otimes_F F_x$ est de la forme

$$E_x = E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}\,,$$

où $E_{x_1}, \ldots, E_{x_k}$ sont les complétions de E en les places $x_1, \ldots, x_k$ de E au-dessus de la place x de F. Ces $E_{x_1}, \ldots, E_{x_k}$ sont des corps, extensions de F_x de degrés $r_1, \ldots, r_k$ avec $r_1 + \cdots + r_k = r$.

La F_x-algèbre E_x, vue comme espace vectoriel de rang r sur F_x, est munie de la forme linéaire de trace

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr} : E_x & \to & F_x\,, \\ t & \mapsto & \mathrm{Tr}(t) = \text{trace de l'endomorphisme de multiplication par } t \text{ dans } E_x. \end{array}$$

Cette forme linéaire envoie $O_{E_x} = O_{E_{x_1}} \times \cdots \times O_{E_{x_k}}$ dans O_x.

Sa composition avec le caractère $\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère additif non trivial

$$\psi_x \circ \mathrm{Tr} : E_x \to F_x \to \mathbb{C}^\times\,.$$

D'autre part, on munit le groupe additif E_x de la mesure invariante dt qui attribue le volume $q_x^{r \cdot \frac{N_{\psi_x}}{2}}$ au sous-groupe ouvert compact O_{E_x}.

Le caractère $\psi_x \circ \mathrm{Tr}$ et la mesure associée dt définissent la transformation de Fourier sur E_x :

Proposition IV.23. – *La transformation*

$$f \mapsto \left(\hat{f} : t' \mapsto \hat{f}(t') = \int_{E_x} dt \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}(tt') \cdot f(t) \right)$$

définit un automorphisme de l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur E_x.

On l'appelle la ψ_x-transformation de Fourier sur E_x.

Son automorphisme réciproque n'est autre que la $\bar{\psi}_x$-transformation de Fourier sur E_x :

$$f \mapsto \left(t' \mapsto \int_{E_x} dt \cdot \bar{\psi}_x \circ \mathrm{Tr}(tt') \cdot f(t)\right) .$$

$\square$

Comme dans le cas $r = 2$, nous prenons la ψ_x-tranformation de Fourier comme transformation en la variable $t \in E_x^\times \subset E_x$.

Il nous faudrait aussi une transformation de Fourier partielle en la variable $g \in H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$.

Proposons l'opérateur

$$\mathrm{Fr}_{1,2,\dots,r-1}^{\psi_x,\frac{r-1}{2},\frac{r-2}{2},\dots,\frac{1}{2}} = \mathrm{Fr}_{1,2}^{\psi_x,\frac{r-1}{2}-1,\frac{r-1}{2}} \circ \mathrm{Fr}_{2,3}^{\psi_x,\frac{r-2}{2}-1,\frac{r-2}{2}} \circ \cdots \circ \mathrm{Fr}_{r-2,r-1}^{\psi_x,\frac{1}{2}-1,\frac{1}{2}}$$

agissant dans l'espace des fonctions de la variable $g \in H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$.

La raison pour laquelle nous choisissons les exposants de torsion successifs $\left(\frac{1}{2}-1,\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{2}-1,\frac{2}{2}\right), \dots, \left(\frac{r-2}{2}-1,\frac{r-2}{2}\right), \left(\frac{r-1}{2}-1,\frac{r-1}{2}\right)$ dans la définition de l'opérateur de transformation de Fourier partielle $\mathrm{Fr}_{1,2,\dots,r-1}^{\psi_x,\frac{r-1}{2},\frac{r-2}{2},\dots,\frac{1}{2}}$ est la présence du caractère

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_r \end{pmatrix} \mapsto \prod_{1\le i\le r} |\mu_i|_x^{\frac{r+1-2i}{2}} = \prod_{1\le i<j\le r} \left|\frac{\mu_i}{\mu_j}\right|_x^{\frac{1}{2}}$$

dans l'expression explicite des fonctions de Whittaker sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ (voir l'énoncé de la proposition IV.12(i) du paragraphe IV.4) et donc aussi dans les noyaux locaux $(t,g) \mapsto K_{x,P_x}^{G,H,\psi_x}(t,g)$.

L'opérateur $\mathrm{Fr}_{1,2,\dots,r-1}^{\psi_x,\frac{r-1}{2},\frac{r-2}{2},\dots,\frac{1}{2}}$ de transformation de Fourier partielle sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ serait le bon si la conjecture suivante était vérifiée :

Conjecture de travail IV.24. – *En toute place $x \in |X|$ où $E_x = E_{x_1} \times \cdots \times E_{x_k}$ comme ci-dessus, pour tout polynôme $P_x \in \bigotimes_{1\le i\le k} \mathbb{C}[X_i^{\pm r_i}] = \bigotimes_{1\le i\le k} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, (\varepsilon_i \cdot X_i)^{\pm 1}, \dots, (\varepsilon_i^{r_i-1} \cdot X_i)^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{r_i}}$, pour tout caractère multiplicatif unitaire (éventuellement ramifié)*

$$\omega : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times ,$$

et pour tout élément $g \in H(F_x) = \mathrm{GL}_r(F_x)$, les deux fonctions suivantes sur $E_x^\times$

$$t \mapsto \omega(\mathrm{Nm}(t))^{-1} \cdot |\mathrm{Nm}(t)|_x^{-\frac{r-1}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot \left(\mathrm{Fr}_{1,2,\dots,r-1}^{\psi_x,\frac{r-1}{2},\frac{r-2}{2},\dots,\frac{1}{2}} K_{x,P_x}^{G,H,\psi_x}\right) \left(t, \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g\right)$$

$$t \mapsto \omega(\mathrm{Nm}(t)) \cdot |\mathrm{Nm}(t)|_x^{\frac{r-3}{2}} \cdot \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \omega(\mu) \cdot K_{x,P_x}^{G,H,\bar{\psi}_x} \left(t^{-1}, w_r \cdot w_{r-1} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g\right)$$

se prolongent par continuité en des fonctions localement constantes à support compact sur E_x.

De plus, la seconde de ces fonctions est la ψ_x-transformée de Fourier de la première, à un signe près qui vaut

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left[\prod_{1\le i\le k}\ \prod_{0\le r'<r_i} \varepsilon_i^{r'}\right]^{N_{\psi_x}} \\ &= \left[\prod_{1\le i\le k} \varepsilon_i^{\frac{r_i(r_i-1)}{2}}\right]^{N_{\psi_x}} = \left[\prod_{1\le i\le k} (-1)^{r_i-1}\right]^{N_{\psi_x}} = (-1)^{(r-k)N_{\psi_x}}\,.\end{aligned}$$

Remarque. Quand $r=2$, l'opérateur $\mathrm{Fr}_{1,2,\ldots,r-1}^{\psi_x,\frac{r-1}{2},\ldots,\frac{1}{2}}$ est l'identité et on retrouve l'énoncé du théorème I.16. Mais cela ne suffit pas à tester la conjecture. □