La théorie de Caramello : un cadre en construction pour des correspondances du type de celle de Langlands ?

(notes d'un exposé donné le jeudi 14 février 2013)

par Laurent Lafforgue

La théorie de Caramello porte sur

- les *topos de Grothendieck*,
- leur rôle comme *"classifiants"* des théories (géométriques) du premier ordre.

Elle consiste à étudier systématiquement les

"équivalences de Morita"

entre théories mathématiques.

Définition –

Un topos (de Grothendieck) est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un "site" au sens de Grothendieck (c'est-à-dire une petite catégorie dont chaque objet est muni d'un ensemble de cribles appelés les cribles couvrants, le tout devant satisfaire certains axiomes).

Remarque :

Giraud a donné une caractérisation intrinsèque des topos. Cette caractérisation n'intervient pas dans la théorie de Caramello qui considère toujours les topos dans leurs relations à des sites qui les définissent.

Exemples de topos :

- la catégorie des ensembles, appelée le topos ponctuel (car associée au site constitué d'un unique objet, de l'identité de cet objet et de l'unique crible non vide),
- pour tout groupe topologique Γ, la catégorie des ensembles discrets munis d'une action continue de Γ, appelée "topos galoisien" de groupe Γ.

Définition –

Une "théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$" consiste en

- *des "sortes" d'objets,*
- *des symboles de flèches entre objets,*
- *des symboles de relations entre objets (consistant en des sous-objets des produits de ces objets),*
- *des axiomes imposés aux objets, flèches et relations.*

Remarques :

(i) "du premier ordre" signifie que, dans les axiomes, les quantificateurs peuvent porter sur les éléments (objets, flèches ou relations) mais pas sur des sous-ensembles d'éléments. Les théories algébriques sont toujours du premier ordre, mais pas les théories topologiques ou analytiques (qui sont généralement du second ordre) ni les théories homotopiques (qui peuvent être d'ordre arbitrairement grand).

(ii) "géométrique" signifie que les axiomes consistent en des implications entre formules dans la construction desquelles n'interviennent que des quantificateurs existentiels, des disjonctions infinitaires et des conjonctions finitaires. En fait, on peut associer à toute théorie du premier ordre une théorie géométrique du premier ordre (sa "morleyisation") qui a les mêmes modèles ensemblistes.

Définition –

(i) *Un modèle ensembliste d'une théorie $\mathbb{T}$ consiste en des ensembles (correspondant aux sortes d'objets), des applications entre ces ensembles (correspondant aux symboles de flèches) et des sous-ensembles des produits de ces ensembles (correspondant aux symboles de relations) qui vérifient les axiomes de $\mathbb{T}$.*

(ii) *Plus généralement, un modèle de $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$ consiste en des objets de $\mathcal{E}$ (correspondant aux sortes d'objets), des morphismes entre ces objets (correspondant aux symboles de flèches) et des sous-objets des produits de ces objets (correspondant aux symboles de relations) qui vérifient les axiomes de $\mathbb{T}$. Les modèles de $\mathbb{T}$ dans un tel topos $\mathcal{E}$ forment une catégorie notée $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$.*

Définition –

Un morphisme géométrique f entre deux topos $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ consiste en une paire de foncteurs

$$f_* : \mathcal{E} \to \mathcal{F}\,, \ \text{appelé le foncteur d'image directe,}$$

et

$$f^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}\,, \ \text{appelé le foncteur d'image réciproque,}$$

tels que f^* soit adjoint à gauche de f_* et commute aux limites projectives finies.

Remarque :

On dit que f est un plongement, et que $\mathcal{E}$ est un sous-topos de $\mathcal{F}$, si le foncteur d'image directe f_* est pleinement fidèle.

Lemme –

Pour toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$,

$$\mathcal{E} \to \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

définit un 2-foncteur contravariant sur la 2-catégorie des topos.

Théorème (Joyal-Reyes) –

Pour toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$, le 2-foncteur

$$\mathcal{E} \to \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

est représentable par un topos, bien défini à équivalence près, appelé le "topos classifiant" de $\mathbb{T}$.

Remarques :

(i) La référence la plus ancienne pour ce théorème attribué à Joyal et Reyes est le livre de Makkai et Reyes : "First-order categorical logic, model-theoretical methods in the theory of topoi and related categories" (Springer LNM 611, 1977). Les premiers calculs de topos classifiants de théories particulières étaient apparus dans le livre de Monique Hakim "Topos annelés et schémas relatifs" (Springer, 1972). On ignore dans quelle mesure ils remontent à Grothendieck.

(ii) Pour la démonstration, on construit explicitement à partir de la théorie $\mathbb{T}$

- un site, appelé le "site syntactique" de $\mathbb{T}$,
- un faisceau sur ce site,

et on vérifie que ce faisceau, vu comme un objet du topos associé au site syntactique, est un modèle universel de la théorie $\mathbb{T}$.

(iii) Le passage du site syntactique à son topos associé formalise le passage, dans toute théorie mathématique (du premier ordre), des axiomes (qui définissent la théorie et dont les combinaisons composent les démonstrations des théorèmes) aux objets d'étude de la théorie (sur lesquels portent les théorèmes). Autrement dit, il formalise le passage d'un langage formel, qui relève de la logique, au contenu proprement mathématique qu'il peut exprimer.

Autrement dit encore, tout mathématicien qui étudie des objets mathématiques (du premier ordre) et démontre des propriétés de ces objets à partir des axiomes de définition de la théorie joue, le plus souvent sans le savoir, à aller et venir entre un site et le topos qu'il définit.

(iv) Pour étendre ce théorème de représentabilité aux théories d'ordre supérieur, il faudrait considérer les topos d'ordre supérieur introduits par Toën et Vezzosi et étudiés par Lurie.

Ce théorème de représentabilité amène en particulier à poser la définition suivante :

Définition –

Une théorie (géométrique du premier ordre) $\mathbb{T}$ *est dite "galoisienne" si son topos classifiant est galoisien.*

Le théorème de représentabilité, et la notion de "topos classifiant" de n'importe quelle théorie géométrique du premier ordre qui en résulte, sont donc connus depuis les années 70. Mais leur étude générale a été largement délaissée depuis, jusqu'à ce que Caramello reprenne cette étude dans sa thèse (soutenue en 2009).

Ses travaux ont progressivement conduit Caramello à reconnaître le rôle central du fait suivant :

Proposition –

Tout topos (de Grothendieck) est équivalent au topos classifiant d'une théorie géométrique du premier ordre et, en règle générale, de beaucoup de telles théories qui peuvent être très différentes les unes des autres.

Remarques :

(i) Selon la note "What is a topos ?" publiée par Illusie dans les "Notices of the AMS" (volume 51, numéro 9, 2004), Grothendieck insistait déjà sur le fait que des sites complètement différents peuvent définir le même topos, "de la même façon qu'un groupe peut être défini par des générateurs et des relations de beaucoup de manières différentes". Significativement, cette métaphore de Grothendieck paraît s'appliquer mieux à la présentation générale des topos comme "topos classifiants" des théories du premier ordre qu'à la construction des topos particuliers utilisés en géométrie algébrique comme pourvoyeurs d'invariants cohomologiques.

(ii) Dans le livre de MacLane et Moerdijk, "Sheaves in geometry and logic", les topos classifiants sont construits seulement pour les théories géométriques (du premier ordre) finitaires, si bien qu'ils sont nécessairement cohérents. Tous les topos de Grothendieck deviennent les classifiants de théories géométriques à condition de considérer tout aussi bien les théories infinitaires, c'est-à-dire d'autoriser les axiomes à consister en des implications entre formules qui peuvent comprendre des disjonctions infinitaires.

(iii) La démonstration consiste, pour tout topos présenté comme associé à un certain site $(\mathcal{C}, J)$, à montrer que les foncteurs "plats et J-continus" sur $\mathcal{C}$ définissent une théorie géométrique du premier ordre dont le topos classifiant est équivalent au topos de départ.

(iv) Si l'on part d'une théorie géométrique puis qu'on associe à son site syntactique $(\mathcal{C}, J)$ la théorie géométrique constituée par les foncteurs plats et J-continus, les deux théories ont certes des topos classifiants équivalents mais elles sont sur deux langages différents, si bien que cela n'aurait même pas de sens de parler d'équivalence syntactique entre elles. Cependant, l'équivalence entre les topos classifiants des deux théories est induite par une interprétation de la première théorie dans la seconde, qui constitue donc un lien explicite entre les deux syntaxes.

Ce fait amène à poser la définition suivante :

Définition –

Deux théories (géométriques du premier ordre) sont dites "équivalentes au sens de Morita" ou "Morita-équivalentes" si leurs topos classifiants sont équivalents.

Remarque :

On peut donc voir deux telles théories comme deux syntaxes qui expriment les mêmes contenus sémantiques, ou deux langues qui expriment les mêmes contenus de sens, avec la possibilité induite de traduire ces contenus de l'une des langues dans l'autre.

Les recherches de Caramello l'ont amenée à fonder tous ses travaux sur les principes suivants :

Principes :

(1) Le topos classifiant d'une théorie incarne le contenu sémantique de cette théorie, c'est-à-dire son contenu mathématique, en faisant abstraction de sa présentation linguistique.

(2) La meilleure manière de comparer deux théories, ou plus généralement deux sites, consiste à comparer leurs topos associés.

(3) En particulier, si les topos classifiants de deux théories sont équivalents (ou tout au moins reliés par un morphisme), on peut les utiliser comme un "pont" permettant le transfert entre elles de concepts, de constructions et de résultats.

(4) En appelant invariants des topos les propriétés ou les constructions sur les topos qui sont invariantes par équivalence, chaque invariant permet de transférer un certain type d'information. Transférer toute l'information sémantique équivaudrait à considérer tous les invariants. Il y a une infinité d'invariants des topos et on peut toujours en introduire de nouveaux, puisque toute proprieté formulée dans le langage des catégories est automatiquement invariante.

(5) Pour une théorie géométrique donnée, une manière particulièrement féconde d'étudier son contenu mathématique consiste à présenter son topos classifiant à partir d'autres sites de définition : cela revient à introduire d'autres théories qui partagent le même contenu sémantique mais dont la syntaxe peut être très différente. Des théories dont les topos classifiants sont équivalents s'éclairent mutuellement par le biais de ce topos commun.

(6) Une même propriété abstraite, qui est un invariant des topos, peut se manifester de manière complètement différente dans des sites de définition différents. Par exemple, Caramello a montré que la propriété catégorique d'amalgamation et la propriété topologique d'être extrêmement disconnecté sont les manifestations d'une même propriété des topos, la propriété de satisfaire la loi de De Morgan. Elle a donné des dizaines d'autres exemples qui montrent que la combinatoire des topos et des sites (avec leurs trois degrés de liberté : sur les objets, les flèches et les cribles couvrants) permet une très grande diversité de manières d'exprimer une propriété donnée.

Concrètement, tous les travaux de Caramello consistent à :

- développer des techniques générales permettant d'établir des équivalences de Morita entre théories,
- développer des techniques générales permettant d'exprimer des invariants des topos en termes de leurs sites de définition,
- tester et appliquer ces techniques dans différents contextes mathématiques et obtenir des résultats proprement mathématiques dans des théories particulières : théorie des modèles, topologie, analyse fonctionnelle, algèbre, ...

Un exemple d'invariant des topos :

L'ensemble ordonné (en fait, la "co-algèbre de Heyting") des sous-topos d'un topos fixé.

Le résultat central concernant cet invariant est le "théorème de dualité" suivant :

Théorème (Caramello) –

Les sous-topos du topos classifiant d'une théorie $\mathbb{T}$ correspondent bijectivement aux théories quotients de $\mathbb{T}$ (c'est-à-dire aux théories obtenues en conservant le même langage et ajoutant des axiomes supplémentaires), modulo équivalence syntactique.

Ce théorème a pour corollaire immédiat :

Corollaire –

L'ensemble des théories quotients d'une théorie donnée $\mathbb{T}$, considérées modulo équivalence syntactique, a une structure d'ensemble ordonné qui en fait une "algèbre de Heyting" au sens que

– *il possède un minimum (la théorie $\mathbb{T}$) et un maximum (la théorie contradictoire),*
– *il possède des* inf *et des* sup *finis,*
– *il vérifie l'axiome supplémentaire suivant :*

$$\forall\, a, b\,, \quad \exists\, (a \Rightarrow b) \text{ tel que, } \forall\, c\,,\ c \leq (a \Rightarrow b) \Leftrightarrow c \wedge a \leq b\,.$$

Les théories galoisiennes admettent dans ce contexte une caractérisation remarquable :

Théorème (Caramello) –

Parmi les théories quotients d'une théorie donnée, les théories galoisiennes sont exactement les théories non contradictoires et maximales qui possèdent un "modèle ultra-homogène".

Remarques :

(i) On ne précise pas ce qu'est un "modèle ultra-homogène". Qu'il suffise de dire que l'hypothèse de posséder un "modèle ultra-homogène" est très souvent vérifiée dans la pratique.
(ii) Ce théorème signifie que :
   – les théories galoisiennes sont les plus complètes de toutes les théories ;
   – on y parvient en partant de n'importe quelle théorie appartenant à une classe extrêment large (qu'il est possible de caractériser) et en la complétant le plus possible par de nouveaux axiomes, en général de plusieurs manières différentes, jusqu'à un point où on est obligé de s'arrêter ;
   – il y a énormément de théories galoisiennes.

Ce théorème pose la question de savoir comment construire concrètement des théories galoisiennes. Une réponse est fournie par le théorème suivant qui constitue une vaste généralisation de la théorie des "catégories galoisiennes" de SGA 1 :

Théorème (Caramello) –

(i) *Soit $\mathcal{C}$ une (petite) catégorie telle que :*
   – *$\mathcal{C}$ vérifie la propriété de plongement conjoint : tous objets a et b s'envoient dans un troisième objet c,*
   – *$\mathcal{C}$ vérifie la propriété d'amalgamation : étant donnés deux morphismes d'un objet a dans deux objets b et c, il existe deux morphismes de b et c dans un quatrième objet d faisant commuter le carré qu'ils forment avec les précédents,*

- *la catégorie* ind($\mathcal{C}$) *des limites inductives d'objets de* $\mathcal{C}$ *possède un "objet ultra-homogène".*

Alors la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$*, munie de la "topologie atomique" (celle pour laquelle tous les cribles non vides sont couvrants), définit un topos galoisien.*

(ii) *Supposons de plus que tout morphisme* $a \to b$ *de* $\mathcal{C}$ *est un "monomorphisme strict" : cela signifie que tout morphisme* $c \to b$*, tel que toutes paire de flèches de* b *vers un objet arbitraire* d *qui coïncident sur* a *coïncident aussi sur* c*, se factorise de manière unique à travers* $a \to b$*.*

Alors $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ *se plonge comme sous-catégorie pleine de la catégorie des "atomes" du topos galoisien associé, en appelant "atomes" les objets qui correspondent à des ensembles discrets non vides munis d'une action continue* transitive *du groupe topologique de structure.*

(iii) *Sous les hypothèses de* (i) *et* (ii)*, la catégorie des "atomes" qui complète naturellement* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ *se décrit en des termes entièrement explicites à partir de* $\mathcal{C}$*.*

Les objets supplémentaires qu'il faut ajouter à ceux de $\mathcal{C}$ *s'appelent les "imaginaires" de la théorie.*

Exemples d'applications :

- la catégorie des groupes finis et de leurs plongements mutuels,
- la catégorie des graphes finis et de leurs plongements,
- la catégorie des algèbres de Boole finies et de leurs plongements, ...

Dans ces exemples, et d'autres que donne Caramello, la possibilité même de développer une théorie de Galois n'avait jamais été soupçonnée jusqu'à présent.

D'autre part, les hypothèses du théorème sont si générales que la liste des exemples semble pouvoir être allongée presque indéfiniment.

Mis en présence d'autant de théories galoisiennes, on se demande comment les étudier :

- comment obtenir des informations sur les topos classifiants de ces théories galoisiennes ?
- comment obtenir des informations sur les groupes topologiques qui servent à les définir ?

Il faut revenir ici aux principes généraux des travaux de Caramello :

(1) La meilleure manière de comparer deux théories, ou plus généralement deux sites, consiste à comparer leurs topos associés.

(2) Pour une théorie géométrique donnée, une manière particulièrement féconde d'étudier son contenu mathématique consiste à présenter son topos classifiant à partir d'autres sites de définition.

(3) Des théories dont les topos classifiants sont équivalents (ou, tout au moins, reliés par un morphisme) s'éclairent mutuellement par le biais de ce topos commun.

Se focalisant sur les théories galoisiennes, ces principes conduisent donc à considérer comme centrale la question de l'existence d'équivalences ou, tout au moins, de relations entre leurs topos classifiants.

En tout cas, les mathématiques contemporaines fournissent un exemple d'équivalence extraordinairement profonde et très étudiée qui, sans avoir jusqu'à présent été formulée comme une équivalence de Morita, semble tout de même très proche du cadre général de la théorie de Caramello : c'est la correspondance de Langlands.

Dans le programme de Langlands, en effet, trois théories a priori très différentes apparaissent comme "de type galoisien", en un sens plus ou moins précis et, sinon équivalentes au sens de Morita, au moins reliées via des "classifiants" plus ou moins bien définis. Ce sont :

(1) La théorie des extensions finies d'un corps global, pour la formalisation de laquelle la théorie de Galois classique et a fortiori la théorie des "catégories galoisiennes" de SGA 1 suffisent.

(2) La théorie des "motifs purs" sur un tel corps global, formalisée grâce à la théorie des "catégories tannakiennes", qui est le pendant linéaire de celle des "catégories galoisiennes".

    Cette théorie est reliée à la précédente via les foncteurs de cohomologie l-adique et les conjectures – telles que celles de Tate – qui devraient permettre de remonter de la cohomologie aux motifs purs.

(3) La théorie des représentations automorphes des groupes linéaires (ou plus généralement des groupes réductifs) sur un tel corps global, dont le groupe classifiant (le mystérieux "groupe de Galois automorphe") est jusqu'à présent mal défini, du fait que les formalismes des "catégories galoisiennes" ou des "catégories tannakiennes" ne s'appliquent pas dans ce cadre.

Première observation :

Il serait souhaitable de pouvoir définir a priori un "topos classifiant" de la théorie des représentations automorphes d'un corps global, avant même d'envisager la question de la nature galoisienne de ce topos puis celle de ses relations avec le classifiant de la théorie des extensions finies du corps global de base ou avec celui de la théorie des motifs purs sur ce corps.

Une difficulté de taille réside dans le fait que la théorie des représentations automorphes n'est a priori pas du premier ordre. Cela rend d'autant plus intrigant le fait que les représentations automorphes semblent se comporter comme si elles étaient les classes d'isomorphismes d'objets d'une catégorie tannakienne, alors qu'elles ne forment même pas une catégorie. Selon Caramello, il faut garder en tête que les sites sont des objets mathématiques d'ordre deux et qu'il arrive souvent que des théories d'ordre deux permettent également de définir des sites ; c'est ainsi que l'exemple de topos sans point donné par Deligne dans SGA 4 est associé à un site défini par la théorie de la mesure.

Quoi qu'il en soit, une tâche tout à fait abordable et très intéressante dans la perspective du programme de Langlands consisterait pour Caramello à développer le pendant linéaire de son travail sur la théorie de Galois, autrement dit à compléter le rectangle suivant :

théorie de Galois de Grothendieck ‖ théorie des "catégories galoisiennes" de SGA 1	——	analogue linéaire ‖ théorie des "catégories tannakiennes"
|		|
théorie de Galois topos-théorique ‖ théorie de Caramello sur les topos galoisiens	——	analogue linéaire ‖ ?

Il serait d'autant plus intéressant que Caramello développe un tel pendant linéaire de son travail sur la théorie de Galois que les conditions d'apparition de topos galoisiens qu'elle a dégagées dans ce travail sont nécessaires et suffisantes.

Seconde observation :

Dans son état actuel de développement, la théorie de Caramello, telle qu'exposée dans ses articles et prépublications (640 pages disponibles sur son site et sur ArXiv) et dans son récent cours à l'Université de Paris 7 (dont les vidéos sont également disponibles à partir de son site) ne va pas jusqu'au programme de Langlands et n'a pas engendré de résultats aussi profonds que la correspondance de Langlands.

Mais :

– Cette théorie offre déjà un très grand nombre d'exemples d'équivalences de Morita et de leurs applications. Ces exemples sont étonnament divers et ils apparaissent presque toujours comme surprenants. Beaucoup d'énoncés auraient été très difficiles à démontrer, et plus encore à imaginer, sans les topos et sans les méthodes de calcul que la théorie des topos classifiants et des équivalences de Morita rend possibles et naturelles. Quand on songe que la correspondance de Langlands ressemble beaucoup à une équivalence de Morita et qu'elle en est peut-être une, on se dit que le champ ouvert à cette théorie est immense.

– La théorie de Caramello ne vise aucune équivalence particulière, fût-elle le programme de Langlands. Elle vise à développer un cadre général dans lequel les équivalences de Morita peuvent être recherchées et étudiées. C'est un cadre nécessairement plus abstrait que les théories mathématiques qui y entrent, et dans lequel ces théories elles-mêmes sont traitées comme des objets topologiques. Il n'est d'ailleurs pas interdit de penser que si le programme de Langlands apparaît aussi difficile, c'est parce que les méthodes employées pour établir les liens entre les théories qu'il met en jeu restent au niveau de ces théories, faute d'un cadre plus abstrait dans lequel ces liens pourraient être pensés naturellement.
– Comme toute théorie, la théorie de Caramello a besoin de temps pour se développer et gagner en sophistication, et ce d'autant plus que Caramello travaille de manière très systématique, en commençant par les bases simples et solides qui sont nécessaires à la poursuite du processus de construction. Or Caramello, qui a seulement 28 ans, a commencé ses travaux de recherche en 2008 et soutenu sa thèse en 2009. Elle a conçu et développé seule sa théorie. Enfin elle a hérité d'une théorie des topos classifiants qui aurait pu être développée depuis plus de 35 ans – et qui aurait mérité sans aucun doute que de nombreux mathématiciens s'y consacrent – mais qui, de fait, a été insuffisamment étudiée.