Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires : Notes de cours*

par Laurent Lafforgue

Dans tout le cours, on considère un groupe réductif connexe quasi-déployé G sur un corps global F, le groupe réductif complexe $\widehat{G}$ dual de G muni de l'action naturelle du groupe de Galois Γ_F de F, et une représentation de transfert continue

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \,.$$

On traite le cas où le corps global F est le corps des fonctions rationnelles d'une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. On note $|F|$ l'ensemble des places de F, F_x le corps localisé de F en chaque place $x \in |F|$, O_x son anneau des entiers, $q_x = q^{\deg(x)}$ le nombre d'éléments de son corps résiduel et

$$| \bullet |_x = q_x^{-v_x(\bullet)} : F_x \to q_x^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

la norme de F_x. On note également

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$$

l'anneau des adèles de F, $\mathbb{A}^\times$ son groupe multiplicatif et

$$| \bullet | = \prod_{x \in |F|} | \bullet |_x : \mathbb{A}^\times \to q^{\mathbb{Z}}$$

la norme globale, qui vérifie la “formule du produit”

$$|\gamma| = 1 \,, \quad \forall \, \gamma \in F^\times \subset \mathbb{A}^\times \,.$$

Comme toutes les constructions et démonstrations ne font appel qu'à de l'analyse harmonique sur les groupes réductifs locaux $G(F_x)$, $x \in |F|$, et adéliques $G(\mathbb{A})$, le cas où le corps global F est un corps de nombres se traiterait de la même façon.

* Je remercie notre secrétaire Cécile Gourgues qui a réalisé la frappe de ces notes à la perfection et avec une incroyable rapidité.

Sommaire

Appendice

I. Notion de noyau du transfert et construction de leur partie principale

Le groupe réductif quasi-déployé G sur F est dit non ramifié en une place $x \in |F|$ si l'action du groupe de Galois local $\Gamma_{F_x} \subset \Gamma_F$ sur la donnée radicielle $(X_T, \Delta_B, X_T^\vee, \Delta_B^\vee)$ ou, ce qui revient au même, sur le groupe dual $\widehat{G}$ se factorise à travers son quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ dont un générateur topologique est l'élément de Frobenius σ_x. Dans ce cas, le groupe réductif G sur F_x se prolonge en un schéma en groupes réductifs lisse sur O_x et on dispose du sous-groupe ouvert compact maximal $G(O_x)$ de $G(F_x)$.

En une telle place x, la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est dite non ramifiée si l'homomorphisme induit $\Gamma_{F_x} \to \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ se factorise à travers le quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} = \langle \sigma_x \rangle$ de Γ_{F_x}. On sait qu'alors ρ induit un homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

de l'algèbre de Hecke sphérique

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r = C_c(\mathrm{GL}_r(O_x)\backslash \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x))$$

de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ vers celle

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = C_c(G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x))$$

de $G(F_x)$. Ces algèbres sont commutatives, et l'homomorphisme ρ_x^* transforme tout caractère $z_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}$ de la seconde en un caractère $(\rho_x)_*(z_x) = z_x \circ \rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathbb{C}$ de la première.

On sait que le groupe réductif quasi-déployé G sur F et la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ sont non ramifiés en toutes les places $x \in |F|$ sauf un ensemble fini que l'on note S_ρ.

Posons :

Définition I.1. –

Soit un sous-ensemble fini S de $|F|$ contenant S_ρ.

(i) *Étant donnée une famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C} \qquad \text{[resp. } z'_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathbb{C}\text{]}$$

indexés par les places $x \in |F| - S$, une fonction automorphe non nulle

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \qquad \text{[resp. } \varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\text{]}$$

est dite vecteur propre de valeurs propres les z_x [resp. z'_x] pour l'action par convolution des algèbres de Hecke sphériques $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ [resp. $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$] si, en toute place $x \in |F| - S$, φ [resp. φ'] est invariante à droite par $G(O_x)$ [resp. $\mathrm{GL}_r(O_x)$] et vérifie

$$\varphi * \varphi_x = z_x(\varphi_x) \cdot \varphi \,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \,,$$

$$\text{[resp. } \varphi' * \varphi'_x = z'_x(\varphi'_x) \cdot \varphi' \,, \quad \forall\, \varphi'_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\text{]}.$$

(ii) *Une fonction automorphe non nulle*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \qquad \textit{[resp. } \varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\textit{]}$$

est dite "S-propre" si elle satisfait les conditions de (i) *relativement à une certaine famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C} \quad \textit{[resp. } z'_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C}\textit{]}, \quad x \in |F| - S\,.$$

(iii) *Une famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C} \quad \textit{[resp. } z'_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C}\textit{]}$$

indexés par les places $x \in |F| - S$ est dite automorphe si elle satisfait les conditions de (i) *relativement à une certaine fonction automorphe "S-propre" $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ [resp. $\varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$].*

□

Le principe de fonctorialité de Langlands peut être formulé de la manière suivante :

Conjecture I.2 (conjecture de transfert par ρ). –

Pour toute partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ, et pour toute famille de caractères $(z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C})_{x\in|F|-S}$ qui est automorphe, sa transformée $(z_x \circ \rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C})_{x\in|F|-S}$ par ρ est encore automorphe.

On introduit la notion de noyau du transfert :

Définition I.3. –

Soit une partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ.

On appelle "noyau" (ou "S-noyau") du transfert automorphe par ρ toute fonction automorphe en 3 variables $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in G(\mathbb{A})$

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

(i) *En toute place $x \in |F| - S$, K est invariante à droite par $G(O_x) \times G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(O_x)$. En notant $*_1, *_2$ et $*_3$ les produits de convolution en les 3 variables $g_1, g_2 \in G(F_x)$ et $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, K est compatible avec $\rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ au sens que*

$$K *_3 \varphi'_x = K *_2 \rho^*_x(\varphi'_x)\,, \quad \forall\, \varphi'_x \in \mathcal{H}^r_{x,\emptyset}\,,$$

et elle est compatible avec l'automorphisme $\varphi_x \mapsto \varphi^\vee_x$ de $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ défini par le changement de variable $g_1 \mapsto g_1^{-1}$ au sens que

$$K *_2 \varphi_x = K *_1 \varphi^\vee_x\,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}\,.$$

(ii) *Pour toute fonction automorphe S-propre*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

l'intégrale

$$(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$$

est absolument convergente quels que soient les éléments $g_2 \in G(\mathbb{A})$, $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et définit une fonction automorphe $(G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$. □

On remarque :

Lemme I.4. –

Pour démontrer la conjecture de transfert I.2 *ci-dessus, il suffit de prouver que, pour toute fonction automorphe S-propre*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

il existe un S-noyau du transfert

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

tel que l'intégrale

$$(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} dg_1 \cdot \varphi_1(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$$

ne soit pas uniformément nulle. □

On choisit une fois pour toutes un caractère additif non trivial

$$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times\,.$$

On sait que les caractères additifs continus $\mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$ sont exactement les

$$\psi_\gamma : u \mapsto \psi(\gamma \cdot u)$$

associés aux éléments $\gamma \in F$.

Notant $N_r \subset \mathrm{GL}_r$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes, on s'intéresse aux caractères de $N_r(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $N_r(F)$. Ce sont exactement les composés

$$\psi_\ell : N_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

de l'homomorphisme de groupes algébriques

$$\begin{array}{rcl} N_r & \to & N_r/[N_r, N_r] = (\mathbb{A}^1)^{r-1} \\ u = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} & \mapsto & (u_{i,i+1})_{1 \leq i < r}\,, \end{array}$$

d'une forme linéaire définie sur F

$$\ell : (\mathbb{A}^1)^{r-1} \to \mathbb{A}^1$$

et du caractère $\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$. Un tel caractère ψ_ℓ est dit régulier lorsque les $r-1$ coordonnées de ℓ sont non nulles, et irrégulier dans le cas contraire. On note $\psi_{(r)}$ le caractère régulier dont les $r-1$ coordonnées valent 1.

Une fonction localement constante

$$W : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \quad [\text{resp. } \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}\,,\ x \in |F|]$$

est dite "de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker" si

$$W(ug) = \psi_{(r)}(u) \cdot W(g)\,, \quad \forall\, g\,, \forall\, u \in N_r(\mathbb{A}) \quad [\text{resp. } N_r(F_x)]\,.$$

Notant

$$Q_r = \mathrm{GL}_{r-1} \cdot N_r = N_r \cdot \mathrm{GL}_{r-1} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \ldots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \ldots & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

le sous-groupe "mirabolique" supérieur, on rappelle le résultat suivant de Shalika :

Proposition I.5. –

(i) *L'opérateur*

$$H \mapsto W^{\psi}_{(r)} H = \left[g \mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} du \cdot \psi^{-1}_{(r)}(u) \cdot H(ug) \right]$$

définit une projection de l'espace des fonctions localement constantes

$$H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sur l'espace des fonctions de $\psi_{(r)}$*-type de Whittaker* $W : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$.

(ii) *Cet opérateur* $W^{\psi}_{(r)}$ *admet pour section, c'est-à-dire pour inverse à droite, l'opérateur*

$$W \mapsto \left[g \mapsto \sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W(\delta g) \right] .$$

(iii) *L'image de cette section est le sous-espace des fonctions* $H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ *qui sont cuspidales au sens que leurs coefficients unipotents*

$$g \mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} du \cdot \psi_{\ell}^{-1}(u) \cdot H(ug)$$

associés aux caractères irréguliers $\psi_\ell : N_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ *sont uniformément nuls.*

Remarque :

Il résulte de cette proposition que toute fonction localement constante

$$H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

s'écrit de manière unique comme la somme

$$H = H^c + H^{nc}$$

d'une fonction $H^c : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ qui est cuspidale et d'une fonction $H^{nc} : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ non cuspidale au sens que

$$W^{\psi}_{(r)} H^{nc} = 0 \, .$$

Cela s'applique en particulier aux fonctions $H : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ mais leurs composantes $H^c, H^{nc} : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ ne sont en général pas invariantes par $\mathrm{GL}_r(F)$.

□

On cherche à construire des noyaux

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)((\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

comme sommes de leur composante cuspidale

$$K^c : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et de leur composante non cuspidale

$$K^{nc} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, .$$

De plus, construire K^c équivaut à construire le $\psi_{(r)}$-coefficient unipotent

$$W_{(r)}^{\psi} K = W_{(r)}^{\psi} K^c : (G \times G \times N_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Étant données une partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ et une fonction automorphe S-propre $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, il suffit que l'intégrale $(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, g)$ ne soit pas uniformément nulle pour qu'il en soit de même de l'intégrale $(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$. Cette condition sera facile à réaliser si, dans le but de construire des noyaux $K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, on commence par construire leur coefficient $W_{(r)}^{\psi} K$ de la manière suivante :

Définition I.6. –

Soit S une partie finie de $|F|$ contenant S_ρ.

On définit les $\psi_{(r)}$-coefficients unipotents

$$W_{(r)}^{\psi} K : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

des noyaux cherchés K comme des sommes localement finies de la forme

$$W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g_1^{-1} \gamma\, g_2, g)\,,$$

où les facteurs locaux

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}\,, \quad x \in |F|\,,$$

sont des fonctions localement constantes

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (g, g') & \mapsto & K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, g') \end{array}$$

telles que

- *en toute place $x \in |F|$, les fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}(\bullet, g')$ sont à support compact dans $G(F_x)$ et les fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, \bullet)$ sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ sont de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker,*
- *en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est un "noyau local" du transfert non ramifié par ρ : cela signifie que $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est invariante à gauche et à droite par $G(O_x)$ en la variable $g \in G(F_x)$, invariante à droite par $\mathrm{GL}_r(O_x)$ en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$ et compatible avec l'homomorphisme*

  $$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

  au sens que

  $$K_{\psi_x}^{G,\rho} *_2 \varphi'_x = K_{\psi_x}^{G,\rho} *_1 \rho_x^*(\varphi'_x)\,, \quad \forall\, \varphi'_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\,.$$

Remarque :

La dernière condition sur $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ équivaut à demander que sa décomposition spectrale sous la double action par convolution à droite de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$ ne fasse apparaître que des paires de caractères ($z_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}$, $z'_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathbb{C}$) reliés par la condition

$$z'_x = z_x \circ \rho_x^* = (\rho_x)_*(z_x)\,.$$

$\square$

Afin de construire des noyaux locaux du transfert non ramifié

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions de la définition I.6 ci-dessus en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, on a besoin de préciser la forme des homomorphismes

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \,, \quad x \in |F| - S_\rho \,,$$

et pour cela de rappeler l'isomorphisme de Satake :

Proposition I.7. –

Soit x une place en laquelle le groupe quasi-déployé G est non ramifié, et soit $\mathfrak{S}_G^x = \{w \in \mathfrak{S}_G \mid \sigma_x(w) = w\}$ le groupe de Weyl F_x-rationnel de G.

Soient T_x^d le plus grand sous-tore de T qui est déployé sur F_x, $\widehat{T}_x^d$ son tore complexe dual muni de l'action de $\mathfrak{S}_G^x$, et $\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d$ le plus grand sous-tore réel compact de $\widehat{T}_x^d$.

Alors :

(i) *Il existe un isomorphisme, appelé isomorphisme de Satake,*

$$S_x^G : \mathcal{H}_x^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$$

si bien que les caractères de l'algèbre commutative $\mathcal{H}_x^G$ sont associés aux éléments de $\widehat{T}_x^d$, modulo l'action du groupe fini $\mathfrak{S}_G^x$.

(ii) *Pour tout élément $\lambda \in \widehat{T}_x^d$, il existe une unique fonction*

$$\varphi_{x,\lambda}^G : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

telle que

$$\varphi_{x,\lambda}^G * \varphi_x = \varphi_x * \varphi_{x,\lambda}^G = S_x^G(\varphi_x)(\lambda) \cdot \varphi_{x,\lambda}^G \,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

et

$$\varphi_{x,\lambda}^G(1) = 1 \,.$$

(iii) *Il existe une unique mesure $d\lambda$ sur $\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d$, appelée la mesure de Plancherel, telle que pour tout $\varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, on ait*

$$\varphi_x(g) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot S_x^G(\varphi_x)(\lambda) \cdot \varphi_{x,\lambda}^G(g) \,, \quad \forall\, g \in G(F_x) \,.$$

□

Si $T_r = \mathbb{G}_m^r$ désigne le tore maximal de GL_r et $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ son tore dual, on dispose de même en toute place $x \in |F|$ de l'isomorphisme de Satake sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$

$$S_x^r : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} \,.$$

Passons maintenant aux homomorphismes ρ_x^* en les places $x \in |F| - S_\rho$:

Lemme I.8. –

Quitte à remplacer la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par une représentation conjuguée, supposons – ce que nous ferons toujours désormais – qu'elle induit un homomorphisme entre tores maximaux

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r \,.$$

En une place non ramifiée arbitraire $x \in |F| - S_\rho$, notons e_x l'ordre de l'élément de Frobenius σ_x agissant sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Alors :

(i) *Le dual* $\widehat{T}_x^d$ *de* T_x^d *s'identifie au quotient de* $\widehat{T}$ *par le sous-tore* $\{\lambda \cdot \sigma_x(\lambda^{-1}) \mid \lambda \in \widehat{T}\}$, *si bien que l'homomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{T} & \to & \widehat{T}_r \\ \lambda & \mapsto & \rho_T(\lambda \cdot \sigma_x(\lambda) \dots \sigma_x^{e_x-1}(\lambda)) \end{array}$$

définit un homomorphisme

$$\rho_{T,x} : \widehat{T}_x^d \to \widehat{T}_r \, .$$

(ii) *Il est possible d'ordonner la famille*

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x^1, \dots, \varepsilon_x^r) \in (\mathbb{C}^\times)^r$$

des r *valeurs propres de* σ_x *agissant sur* $\mathbb{C}^r$, *de telle façon que l'homomorphisme d'algèbres*

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \, ,$$

vu comme un homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$$

vérifie

$$\rho_x^*(p_x)(\lambda^{e_x}) = p_x(\varepsilon_x \cdot \rho_{T,x}(\lambda)) \, , \quad \forall\, \lambda \in \widehat{T}_x^d \, , \quad \forall\, p_x \in \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} \, .$$

□

En toute place $x \in |F|$ et pour tout caractère $\lambda' \in \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$, il existe une unique fonction de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x} : \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}$$

telle que

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x} * \varphi_x' = S_x^r(\varphi_x')(\lambda') \cdot W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x}$$

et

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x}\left(\begin{pmatrix} \gamma_x^{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \gamma_x & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

pour n'importe quel élément $\gamma_x \in F_x^\times$ de valuation $v_x(\gamma_x)$ égale au conducteur N_{ψ_x} de la composante ψ_x de ψ en x.

On a :

Proposition I.9. –

En toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, *les noyaux locaux du transfert non ramifié au sens de la définition* I.6

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}$$

sont exactement les fonctions de la forme

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g,g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda^{e_x} \cdot p_x(\lambda^{e_x}) \cdot \varphi_{x,\lambda^{e_x}}^G(g) \cdot W_{x,\varepsilon_x \cdot \rho_{T,x}(\lambda)}^{r,\psi_x}(g')$$

pour un certain polynôme symétrique $p_x \in \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$.

Remarque :

Pour que le produit infini $\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}$ ait un sens comme fonction sur $(G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$, on demande que $p_x = 1$ en presque toute place $x\in|F|-S$. □

Notons $\mu_G : \mathbb{G}_m \to Z_G \subset G$ le cocaractère central de G bien défini sur F qui correspond au caractère $\widehat{\mu}_G : \widehat{G} \to \mathbb{C}^\times$ composé de $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et du déterminant.

On remarque :

Corollaire I.10. –

Soit

$$\omega_\rho : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

le caractère automorphe d'ordre fini qui correspond, via la théorie du corps de classes, au caractère

$$\Gamma_F \to \mathbb{C}^\times$$

composé de $\Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *et du déterminant.*

Alors, en toute place $x\in|F|-S\subset|F|-S_\rho$*, les noyaux locaux du transfert non ramifié*

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x)\times \mathrm{GL}_r(F_x)\to\mathbb{C}$$

vérifient la condition

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g,z\,g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\,g,g')\cdot\omega_\rho(z)\,,\quad \forall\, z\in F_x^\times\,.$$

Remarque :

Il est naturel de demander à la suite de ce corollaire – et nous le ferons toujours désormais – que, en toutes les places $x\in|F|$ sans exception, les facteurs $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ de la définition I.6 vérifient la même condition

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g,z\,g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\,g,g')\cdot\omega_\rho(z)\,,\quad \forall\, z\in F_x^\times\,.$$

Démonstration du corollaire :

La conclusion résulte de ce que, en toute place $x\in|F|-S_\rho$, le produit $\varepsilon_x^1\ldots\varepsilon_x^r$ des r composantes de $\varepsilon_x=(\varepsilon_x^1,\ldots,\varepsilon_x^r)$ est égal au déterminant de σ_x agissant sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. En effet, $\varepsilon_x=(\varepsilon_x^1,\ldots,\varepsilon_x^r)$ est la famille des r valeurs propres de cette action.

□

Étant donnée une famille de fonctions locales

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x)\times \mathrm{GL}_r(F_x)\to\mathbb{C}\,,\quad x\in|F|\,,$$

vérifiant toutes les conditions que nous avons énoncées, le $\psi_{(r)}$-coefficient unipotent

$$\begin{array}{rcl} W_{(r)}^{\psi}K : G(F)\backslash G(\mathbb{A})\times G(F)\backslash G(\mathbb{A})\times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C} \\ (g_1,g_2,g) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\gamma\in G(F)}\left(\prod_{x\in|F|}K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g_1^{-1}\gamma\,g_2,g) \end{array}$$

correspond à une fonction cuspidale

$$\begin{array}{rcl} K^c = K_\psi^{G,\rho} : (G\times G\times Q_r)(F)\backslash (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C} \\ (g_1,g_2,g) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^\psi K(g_1,g_2,\delta g) \end{array}$$

qui, en toute place $x\in |F|-S\subset |F|-S_\rho$, est compatible avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x\mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$.

Conjecture I.11. –

Si en chaque place $x\in S$, la fonction locale

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x)\times \mathrm{GL}_r(F_x)\to \mathbb{C}$$

vérifient certaines conditions qui dépendent de la restriction de ρ en $\widehat{G}\rtimes \Gamma_{F_x}\to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, il est possible de construire une fonction

$$K^{nc} = K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G\times G\times Q_r)(F)\backslash (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})\to \mathbb{C}$$

qui est non cuspidale au sens que

$$W_{(r)}^\psi K^{nc} = 0\,,$$

est compatible avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x\mapsto\varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x\in |F|-S$, et telle que la somme

$$K^{G,\rho} = K = K^c + K^{nc} = K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho}$$

soit invariante à gauche par $\mathrm{GL}_r(F)$ et définisse un S-noyau du transfert par ρ. □

Dans le but d'essayer de prouver cette conjecture, on introduit comme dans la théorie des "théorèmes réciproques" (voir [Cogdell, Piatetski-Shapiro]) les matrices de permutation en rang r

$$w_r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\,,\ w_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,\ \alpha_r = w_r\,w_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

et le sous-groupe mirabolique inférieur

$$Q_r^{\mathrm{op}} = (\alpha_r^{-1} N_r\,\alpha_r)\cdot \mathrm{GL}_{r-1} = \mathrm{GL}_{r-1}\cdot (\alpha_r^{-1} N_r\,\alpha_r) = \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Remarquant que

$$(\alpha_r^{-1} N_r\,\alpha_r)\cap \mathrm{GL}_{r-1} = N_{r-1}\,,$$

on forme la somme

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g) = \sum_{\delta\in N_{(r-1)}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^\psi K(g_1,g_2,\alpha_r\,\delta g)\,.$$

La fonction ainsi définie sur $(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ est compatible avec $\rho_x^*:\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\to\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x\mapsto\varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x\in|F|-S$, et elle est invariante à gauche par $(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)$.

La conjecture suivante implique la précédente :

Conjecture I.12. –

Sous les hypothèses de la conjecture I.11, *il est possible de construire deux fonctions complémentaires*

$$K_\psi^{\overline{G},\rho}:(G\times G\times Q_r)(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})\to\mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}:(G\times G\times Q_r^{\mathrm{op}})(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})\to\mathbb{C}\,,$$

toutes deux compatibles avec $\rho_x^*:\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\to\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ *et avec l'involution* $\varphi_x\mapsto\varphi_x^\vee$ *de* $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ *en toute place* $x\in|F|-S$, *et telles que* $K_\psi^{\overline{G},\rho}$ *soit non cuspidale, et*

$$K_\psi^{G,\rho}+K_\psi^{\overline{G},\rho}=\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}+\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}\,.$$

Remarque :

L'implication résulte de ce que $\mathrm{GL}_r(F)$ est engendré par ses sous-groupes $Q_r(F)$ et $Q_r^{\mathrm{op}}(F)$. □