Formules de Poisson non linéaires et principe de fonctorialité de Langlands [*]

par Laurent Lafforgue

[*] Ces notes ont servi de base à un double exposé donné au séminaire Takagi, à Tokyo, les 25 et 26 mai 2013, ainsi qu'à un exposé à l'université Tsinghua de Pékin, au titre de "Loo-Keng Hua Distinguished Lecture", le 8 novembre 2013.
L'auteur remercie chaleureusement les organisateurs de ces séminaires qui l'ont invité. Il exprime également sa grande reconnaissance à Cécile Gourgues, qui a réalisé la frappe du manuscrit avec son efficacité et sa disponibilité toujours parfaites, ainsi qu'au traducteur du texte en langue chinoise.

On connaît la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$. Elle définit un automorphisme unitaire de l'espace des fonctions de carré intégrable $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. De plus, cet automorphisme et son inverse respectent le sous-espace des fonctions de Schwartz, c'est-à-dire des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide. Enfin, une telle fonction de Schwartz f et sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ sont reliées par la formule de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,.$$

Étant donné un "corps global" F, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$ ou du corps $\mathbb{F}_q(X)$ des fonctions rationnelles sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, la théorie de l'anneau des adèles $\mathbb{A} = \prod\limits_{x\in|F|} F_x$ de F a permis à Tate, en 1950 dans sa fameuse thèse, de transporter et d'exploiter transformation de Fourier et formule de Poisson dans un cadre arithmétique. Il choisit pour cela un caractère additif continu unitaire non trivial $\psi = \prod\limits_{x\in|F|} \psi_x : \mathbb{A} = \prod\limits_{x\in|F|} F_x \to U(1) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ invariant par le sous-groupe discret F de $\mathbb{A}$.

En toute "place" x de F, c'est-à-dire pour toute complétion F_x de F relativement à une certaine norme, que celle-ci soit "archimédienne" (avec alors $F_x \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ou "ultramétrique" (si bien que F_x est une extension finie d'un corps p-adique $\mathbb{Q}_p$ ou d'un corps $\mathbb{F}_q((X))$ de séries de Laurent), le caractère ψ_x définit un opérateur de transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f_x}$. Cet opérateur est un automorphisme unitaire de l'espace des fonctions de carré intégrable sur F_x.

De plus, cet opérateur et son inverse respectent un certain sous-espace de fonctions de Schwartz qui, lorsque x est une place ultramétrique, est simplement l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur F_x. Le sous-espace des fonctions de Schwartz en les places ultramétriques est stable par translations multiplicatives si bien qu'il admet une caractérisation spectrale. Il s'avère que cette caractérisation peut s'exprimer en termes de certaines fractions rationnelles

$$L_x(\chi, Z)$$

associées aux caractères multiplicatifs $\chi : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$.

D'autre part, la transformation de Fourier est compatible avec les translations multiplicatives, et son action sur l'espace des fonctions de Schwartz admet une caractérisation spectrale. Il s'avère que cette caractérisation peut s'exprimer en termes de certains monômes

$$\varepsilon_x(\chi, Z) = \varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z)$$

également associés aux caractères multiplicatifs $\chi : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$.

En les places archimédiennes, la décomposition spectrale des espaces de fonctions de Schwartz et de leur automorphisme de transformation de Fourier conduit à définir de manière analogue des facteurs

$$L_x(\chi, s) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\chi, s) = \varepsilon_x(\chi, \psi_x, s)$$

associés aux caractères multiplicatifs $\chi : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ et qui sont cette fois des fonctions analytiques de $s \in \mathbb{C}$.

Le produit des opérateurs de transformation de Fourier "locale" sur les F_x associés aux composantes ψ_x de ψ définit un opérateur de transformation de Fourier "globale" sur $\mathbb{A} = \prod\limits_{x \in |F|} F_x$ associé à ψ. Il envoie chaque fonction produit $f = \bigotimes\limits_{x \in |F|} f_x$ sur $\widehat{f} = \bigotimes\limits_{x \in |F|} \widehat{f}_x$. C'est un automorphisme unitaire de l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{A}$. Il préserve le sous-espace des fonctions de Schwartz globales, défini comme sous-espace engendré par les produits de fonctions de Schwartz locales sur les complétions F_x.

Tate a alors démontré que toute fonction de Schwartz globale $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ satisfait la formule de Poisson

$$\sum_{\gamma \in F} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in F} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

Puis, en décomposant spectralement cette identité sous l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{A}^\times$, il en a déduit les propriétés globales des fonctions L

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\chi, s) = \left[\prod_{x \in |F| \text{ ultramétrique}} L_x(\chi_x, q_x^{-s})\right] \cdot \left[\prod_{x \in |F| \text{ archimédienne}} L_x(\chi_x, s)\right]$$

associées aux caractères multiplicatifs

$$\chi = \prod_{x \in |F|} \chi_x : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$$

qui sont "automorphes", c'est-à-dire invariants par le sous-groupe discret $F^\times$ de $\mathbb{A}^\times$. Ces propriétés sont la convergence absolue pour $\mathrm{Re}\,(s)$ assez grande, le prolongement analytique à $\mathbb{C}$ tout entier et l'équation fonctionnelle

$$L(\chi^{-1}, 1-s) = L(\chi, s) \cdot \varepsilon(\chi, s)$$

avec

$$\varepsilon(\chi, s) = \left[\prod_{x \in |F| \text{ ultramétrique}} \varepsilon_x(\chi_x, q_x^{-s})\right] \cdot \left[\prod_{x \in |F| \text{ archimédienne}} \varepsilon_x(\chi, s)\right].$$

Au début des années 1970, Godement et Jacquet ont généralisé la théorie de Tate aux groupes linéaires GL_r de rang arbitraire plongés dans les espaces de matrices M_r.

Ils ont défini une transformation de Fourier et un espace de fonctions de Schwartz sur $M_r(F_x)$ pour toute place x. La décomposition spectrale de ces espaces et de ces opérateurs leur a permis d'associer des facteurs locaux

$$L_x(\pi, \bullet) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\pi, \bullet)$$

à toute représentation irréductible π du groupe $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Puis, en faisant le produit sur toutes les places x de F, ils ont défini une transformation de Fourier globale sur $M_r(\mathbb{A})$, ainsi qu'un espace de fonctions de Schwartz globales $f : M_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ satisfaisant la formule de Poisson

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

La décomposition spectrale de cette identité sous l'action du groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ a permis à Godement et Jacquet d'établir les propriétés globales (convergence absolue dans un demi-plan, prolongement analytique et équation fonctionnelle) des fonctions L globales

$$L(\pi, \bullet) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, \bullet)$$

des représentations irréductibles $\pi = \bigotimes\limits_{x \in |F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = \prod\limits_{x \in |F|} \mathrm{GL}_r(F_x)$ qui sont "automorphes", c'est-à-dire admettent une réalisation dans l'espace des fonctions périodiques

$$\mathrm{GL}_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Si G est un groupe réductif (déployé) sur F, on dispose plus généralement de la notion de représentation irréductible "automorphe" de $G(\mathbb{A}) = \prod\limits_{x \in |F|} G(F_x)$, c'est-à-dire qui admet une réalisation dans l'espace des fonctions périodiques

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Dans le cas général, on ne dispose sur G d'aucune structure linéaire qui permette de reproduire les constructions et les démonstrations de Tate généralisées par Godement et Jacquet.

Cependant, on dispose du "principe de fonctorialité" conjecturé par Langlands en 1967.

Selon Langlands, on doit pouvoir associer à toute représentation

$$\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

du groupe réductif complexe $\widehat{G}$ dual de G, une application

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x \longmapsto \pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x$$

de l'ensemble des représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ vers l'ensemble des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. Cette application doit être essentiellement compatible avec une famille d'applications entre ensembles de représentations irréductibles locales de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$

$$\pi_x \mapsto \pi'_x$$

qui, lorsque les π_x sont “non ramifiées”, sont définies par une règle très simple associée à ρ.

Si ces applications $\pi_x \mapsto \pi'_x$ existent, elles permettent donc d'associer aux représentations irréductibles π_x des $G(F_x)$ des facteurs

$$L_x(\rho, \pi_x, \bullet) = L_x(\pi'_x, \bullet) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho, \pi_x, \bullet) = \varepsilon_x(\pi'_x, \bullet)\,.$$

À toute représentation automorphe $\pi = \bigotimes\limits_x \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$ est alors associée une fonction L globale relative à ρ

$$L(\rho, \pi, \bullet) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, \bullet)$$

qui possède les propriétés globales usuelles des fonctions L si le principe de fonctorialité de Langlands est connu.

Bien sûr, les arguments de Tate, Godement et Jacquet pourraient être reproduits sur $G(\mathbb{A})$, et conduire à une démonstration directe des propriétés globales des fonctions L des représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$, si l'on disposait sur les $G(F_x)$ et sur $G(\mathbb{A})$ de transformations de Fourier naturellement définies à partir de ρ, d'espaces de fonctions de Schwartz respectés par ces transformations et d'une formule de Poisson convenable sur l'espace des fonctions de Schwartz globales. Ce vœu a été exprimé pour la première fois dans la littérature dans un article de Braverman et Kazhdan publié en l'an 2000.

Le but du présent texte d'exposition est d'expliquer qu'il y a en fait équivalence entre le principe de fonctorialité de Langlands et le problème d'associer à toute représentation $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ des opérateurs de transformation de Fourier locaux, des espaces de fonctions de Schwartz locales et une formule de Poisson globale.

Plus précisément, la connaissance de facteurs locaux $L_x(\rho, \pi_x, \bullet)$ permet de construire en chaque place un espace de fonctions de Schwartz. Celle de facteurs locaux $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \bullet)$ permet de définir un opérateur de transformation de Fourier agissant sur cet espace. Enfin, les propriétés globales des fonctions $L(\rho, \pi, \bullet) = \prod\limits_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, \bullet)$ associées aux représentations automorphes $\pi = \bigotimes\limits_{x \in |F|} \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$ permettent de définir sur l'espace des fonctions de Schwartz globales une certaine forme linéaire fixée par la transformation de Fourier.

1 Transformation de Fourier sur $M_r(\mathbb{R})$

Munissons $\mathbb{R}$ d'un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi_\infty : \mathbb{R} \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times \, ,$$

par exemple

$$t \mapsto e^{2\pi i t} \, .$$

Ce choix détermine celui de l'unique mesure invariante de $\mathbb{R}$ qui attribue le volume 1 au quotient compact de $\mathbb{R}$ par son sous-groupe discret $\operatorname{Ker} \psi_\infty$, et donc de la mesure invariante produit de $M_r(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{r^2}$.

On a :

Proposition –

La ψ_∞-transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[m' \mapsto \int_{M_r(\mathbb{R})} dm \cdot f(m) \cdot \psi_\infty(\operatorname{Tr}(mm')) \right]$$

définit un automorphisme de l'espace des fonctions de Schwartz (c'est-à-dire C^∞ à décroissance rapide)

$$f : M_r(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \, .$$

Son automorphisme réciproque est la $\overline{\psi}_\infty = \psi_\infty^{-1}$-transformation de Fourier.

□

Le groupe des éléments $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ agit par translation à droite $f \mapsto f^g = f(\bullet \, g)$ et par translation à gauche $f \mapsto {}^g f = f(g \, \bullet)$ sur l'espace des fonctions de Schwartz. Ces actions sont compatibles avec la transformation de Fourier au sens suivant :

Lemme –

Pour toute fonction de Schwartz

$$f : M_r(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

et pour tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, on a

$$\widehat{f^g} = |\det(g)|^{-r} \cdot \, {}^{g^{-1}}\widehat{f},$$

$$\widehat{{}^g f} = |\det(g)|^{-r} \cdot \widehat{f}^{g^{-1}} \, .$$

□

2 Transformation de Fourier sur $M_r(F_x)$

$\mathbb{R}$ est une complétion de $\mathbb{Q}$. Or $\mathbb{Q}$ possède d'autres complétions : les corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$.

On appelle "corps locaux" F_x les éléments de la liste suivante :

- $\mathbb{R}$ et son unique extension finie $\mathbb{C}$,
- les corps $\mathbb{Q}_p$ et leurs extensions finies,
- les corps de séries de Laurent $\mathbb{F}_{q_x}((X))$ sur un corps fini $\mathbb{F}_{q_x}$.

Tout corps local F_x est muni d'une unique norme $|\bullet|_x$ telle que tout élément $\gamma \in F_x^\times$ agisse sur les mesures additives de F_x par $|\gamma|_x$.

Si $F_x = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, F_x est dit "archimédien".

Sinon, il est dit "ultramétrique" car sa norme $|\bullet|_x$ satisfait l'inégalité

$$|a+b|_x \leq \max\{|a|_x, |b|_x\}, \quad \forall\, a,b \in F_x\,.$$

Dans ce cas, F_x possède le sous-anneau ouvert compact

$$O_x = \{a \in F_x \mid |a|_x \leq 1\}$$

dont le quotient par l'idéal maximal ouvert

$$m_x = \{a \in F_x \mid |a|_x < 1\}$$

est un corps fini $\mathbb{F}_{q_x}$.

Si F_x est un corps local, une fonction de Schwartz $M_r(F_x) \to \mathbb{C}$ est une fonction

- C^∞ à décroissance rapide si F_x est archimédien,
- localement constante à support compact si F_x est ultramétrique.

Choisissant un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi_x : F_x \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

puis une mesure invariante dm_x de $M_r(F_x)$, on a

Proposition –

(i) *La ψ_x-transformation de Fourier*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[m'_x \mapsto \int_{M_r(F_x)} dm_x \cdot f_x(m_x) \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}(m_x m'_x))\right]$$

définit un automorphisme de l'espace des fonctions de Schwartz.

(ii) *Il existe une unique mesure invariante dm_x (dite autoduale) pour laquelle l'automorphisme réciproque est la $\overline{\psi}_x$-transformation de Fourier.*

(iii) *Pour toute fonction de Schwartz $f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$ et tout élément $g_x \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, on a*

$$\begin{aligned}\widehat{f_x^{g_x}} &= |\det(g_x)|_x^{-r} \cdot {}^{g_x^{-1}}\widehat{f_x}\,, \\ \widehat{{}^{g_x}f_x} &= |\det(g_x)|_x^{-r} \cdot \widehat{f}_x^{g_x^{-1}}\,.\end{aligned}$$

□

3 L'espace des représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$

Pour tout corps local F_x, il est naturel de chercher à décomposer l'espace des fonctions de Schwartz sous la double action de $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Dans ce but, il faut d'abord introduire un ensemble de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ assez riche pour permettre une telle décomposition, et montrer que cet ensemble a une structure naturelle.

Traitons le cas où le corps local F_x est ultramétrique.

Définition –

Soit G un groupe linéaire GL_r ou, plus généralement, un groupe réductif sur un corps local ultramétrique F_x.

Une représentation complexe π de $G(F_x)$ est dite "lisse admissible" si

- *pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$,*

$$\pi_K = \{v \in \pi \mid K \cdot v = v\}$$

  est de dimension finie sur $\mathbb{C}$,
- *π est la réunion filtrante de ses sous-espaces π_K.*

□

Le groupe topologique localement compact $G(F_x)$ est unimodulaire et peut être muni d'une mesure bi-invariante dg_x. Soient alors $\mathcal{H}_x^G$ l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact

$$h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

et, pour tout $K \subset G(F_x)$, $\mathcal{H}_{x,K}^G$ sa sous-algèbre des fonctions à support compact

$$K \backslash G(F_x)/K \to \mathbb{C}\,.$$

Pour toute représentation lisse admissible π de $G(F_x)$, chaque π_K est une représentation de dimension finie de $\mathcal{H}_{x,K}^G$ et $\pi = \varinjlim \pi_K$ peut être vue comme une représentation de $\mathcal{H}_x^G = \varinjlim \mathcal{H}_{x,K}^G$.

Notons $\{\pi\}_x^G$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$ et, pour tout $K \subset G(F_x)$, $\{\pi\}_{x,K}^G$ le sous-ensemble des π telles que $\pi_K \neq 0$.

Pour tout $K \subset G(F_x)$, les éléments $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ définissent des fonctions

$$\{\pi\}_{x,K}^G \ni \pi \mapsto \mathrm{Tr}_\pi(h_x)\,,$$

et on peut noter $A_{x,K}^G$ l'algèbre de fonctions

$$\{\pi\}_{x,K}^G \to \mathbb{C}$$

qu'elles engendrent. On a :

Théorème –

Soit toujours un groupe réductif G sur un corps local ultramétrique F_x. Alors :

(i) *Pour tout $K \subset G(O_x)$, l'algèbre $A_{x,K}^G$ est un produit fini d'algèbres de type fini et intègres sur $\mathbb{C}$. Autrement dit,* $\mathrm{Spec}\, A_{x,K}^G$ *est réunion disjointe finie de variétés algébriques affines intègres sur $\mathbb{C}$.*

(ii) *Toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ définit un caractère $A_{x,K}^G \to \mathbb{C}$ de $A_{x,K}^G$ qui le caractérise, si bien que $\{\pi\}_{x,K}^G$ se plonge dans le spectre maximal de $A_{x,K}^G$. C'est un ouvert de Zariski.*

(iii) *La réunion filtrante $\{\pi\}_x^G = \varinjlim \{\pi\}_{x,K}^G$ s'écrit comme une réunion disjointe de variétés algébriques intègres sur $\mathbb{C}$, de telle façon que chaque $\{\pi\}_{x,K}^G$ est une réunion finie de composantes connexes.*

Remarque :

Dans le cas d'un corps local archimédien $F_x = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a un théorème analogue : cette fois, l'ensemble des représentations irréductibles a une structure naturelle de variété analytique complexe.

$\square$

Pour tout $K \subset G(F_x)$, soit $\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G \subset \{\pi\}_{x,K}^G$ le sous-ensemble des représentations unitaires. On a :

Théorème –

Soit toujours un groupe réductif G sur un corps local ultramétrique F_x. Alors, pour tout $K \subset G(F_x)$, on a :

(i) *Le sous-ensemble $\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G$ des représentations unitaires est une sous-variété algébrique réelle de la variété algébrique complexe $\{\pi\}_{x,K}^G$.*

(ii) *Il existe sur $\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G$ une unique mesure $d\pi$, appelée mesure de Plancherel, telle que, pour tout $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$, on ait*

$$h_x(1) = \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot \mathrm{Tr}_\pi(h_x)\,.$$

$\square$

Disons qu'une fonction

$$\{\pi\}_{x,K}^G \to \mathbb{C}$$

est "polynomiale" si elle est élément de l'algèbre $A_{x,K}^G$ engendrée par les fonctions traces

$$\pi \mapsto \mathrm{Tr}_\pi(h_x)\,, \quad h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G\,.$$

En remplaçant les fonctions h_x par leurs translatées h_x^g ou ${}^g h_x$, on déduit du théorème ci-dessus :

Corollaire –

Pour tout $K \subset G(F_x)$ et si $d\pi$ désigne la mesure de Plancherel sur $\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G$, on a :

(i) *Toute fonction $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ s'écrit sous la forme*

$$h_x(g) = \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

où :

- *pour tout $g \in G(F_x)$,*
$$\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$$
est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^G$,
- *pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, la fonction sur $G(F_x)$*
$$g \mapsto h_{x,\pi}(g)$$
est élément de l'espace $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$ engendré par les "coefficients matriciels" $v^\vee \boxtimes v : g \mapsto \langle v^\vee, g \cdot v\rangle = \langle g^{-1} \cdot v^\vee, v\rangle$ associés à un vecteur $v \in \pi_K$ et une forme linéaire $v^\vee : \pi \to \mathbb{C}$ invariante par K.

(ii) *Cette décomposition spectrale de toute fonction $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ est unique, et on a*

$$h_{x,\pi}(g) = \mathrm{Tr}_\pi(h_x^g) = \mathrm{Tr}_\pi({}^g h_x)\,, \quad \forall\,\pi\,, \quad \forall\, g \in G(F_x)\,.$$

□

4 Décomposition spectrale de la transformation de Fourier linéaire

Revenons aux groupes linéaires GL_r sur un corps local ultramétrique F_x.

Comme les fonctions de Schwartz (c'est-à-dire localement constantes à support compact) $M_r(F_x) \to \mathbb{C}$ sont déterminées par leurs restrictions à $\mathrm{GL}_r(F_x)$, et que leur espace est stable par translation à gauche ou à droite, on s'attend à pouvoir caractériser cet espace en termes spectraux. Effectivement, on a :

Théorème –

Pour tout $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$, *il est possible d'associer à toute représentation* $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^{\mathrm{GL_r}} = \{\pi\}_{x,K}^r$ *une fraction rationnelle*

$$L_x(\pi, Z)$$

telle que :

(1) *L'inverse* $L_x(\pi, Z)^{-1}$ *est un polynôme en* $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$ *et* Z *qui vaut* 1 *pour* $Z = 0$.

(2) *On a*

$$L_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|^s, Z) = L_x(\pi, q_x^{-s} \cdot Z)\,, \quad \forall\, \pi\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\,.$$

(3) *Une fonction*

$$f_x : K \backslash \mathrm{GL}_r(F_x)/K \to \mathbb{C}$$

se prolonge en une fonction de Schwartz sur $M_r(F_x)$ *si et seulement si ses restrictions aux fibres de l'homomorphisme*

$$|\det(\bullet)|_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \to q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qu'elle se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où

- *pour tout* $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$

  $$\pi \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

  est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^r$,
- *pour toute* $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$, *la fonction sur* $\mathrm{GL}_r(F_x)$

  $$g \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

  est élément de l'espace $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$,
- $\pi^\vee = \varinjlim \pi_K^\vee$ *désigne la représentation contragrédiente de toute* $\pi \in \{\pi\}_x^r$.

$\square$

Comme la transformation de Fourier est compatible avec les translations à gauche et à droite, on obtient :

Corollaire –

Le caractère non trivial $\psi_x : F_x \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$ étant choisi, il est possible d'associer à toute représentation $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$ un monôme (c'est-à-dire un polynôme inversible) en π et $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|^s, q_x^s \cdot Z)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\,,$$

tel que, pour toute fonction de Schwartz sur $M_r(F_x)$

$$f_x : K \backslash \mathrm{GL}_r(F_x)/K \to \mathbb{C}$$

décomposée spectralement sous la forme du théorème

$$f_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall\, g\,,$$

sa ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{f_x}$ soit donnée par la décomposition spectrale

$$\widehat{f_x}(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g^{-1}) \cdot L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \ \ \forall\, g\,.$$

Remarque :

On utilise le fait que si $\varphi_\pi : \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ est élément de l'espace $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$ des coefficients matriciels de π_K, alors $g \mapsto \varphi_\pi(g^{-1})$ est élément de l'espace $\pi_K \boxtimes \pi_K^\vee$ des coefficients matriciels de $\pi_K^\vee$.

$\square$

Le calcul des facteurs L_x et ε_x des représentations $\pi \in \{\pi\}_x^r$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ se ramène à celui des facteurs correspondants des caractères $\chi \in \{\pi\}_x^1$ de $F_x^\times$ dans au moins deux cas extrêmes :

- le cas des représentations non ramifiées, c'est-à-dire des $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^r = \{\pi\}_{x,K}^r$ où $K = \mathrm{GL}_r(O_x)$,
- le cas des représentations de la forme

  $$\pi \cdot \omega = \pi \otimes (\omega \circ \det(\bullet))$$

  où $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$ pour un certain $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\omega : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère assez ramifié en fonction de K.

Les représentations non ramifiées sont connues grâce au théorème suivant :

Théorème (Satake) –

Si $K = \mathrm{GL}_r(O_x)$, l'algèbre de convolution "non ramifiée"

$$\mathcal{H}^r_{x,\emptyset} = \mathcal{H}^{\mathrm{GL}_r}_{x,K} = C_c(\mathrm{GL}_r(O_x)\backslash \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x))$$

est commutative et canoniquement isomorphe à

$$(\mathcal{H}^{T_r}_{x,\emptyset})^{\mathfrak{S}_r} = C_c(T_r(F_x)/T_r(O_x))^{\mathfrak{S}_r} = \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r}$$

où $T_r = \mathbb{G}^r_m$ désigne le tore diagonal de GL_r et $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ son tore complexe dual.

Remarque :

Comme $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$ est commutative, elle s'identifie aussi à l'algèbre $A^r_{x,\emptyset} = A^{\mathrm{GL}_r}_{x,\mathrm{GL}_r(O_x)}$.

□

Il résulte de ce théorème que se donner une représentation non ramifiée $\pi \in \{\pi\}^r_{x,\emptyset}$ équivaut à se donner une famille de r caractères non ramifiés

$$\chi^1_\pi, \ldots, \chi^r_\pi : F^\times_x/O^\times_x \to \mathbb{C}^\times$$

bien définie à l'ordre près.

On a :

Théorème –

(i) (Godement, Jacquet) *Pour toute représentation non ramifiée $\pi \in \{\pi\}^r_{x,\emptyset}$, on a*

$$L_x(\pi, Z) = \prod_{1\leq i\leq r} L_x(\chi^i_\pi, Z)$$

et

$$\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z) = \prod_{1\leq i\leq r} \varepsilon_x(\chi^i_\pi, \psi_x, Z)\,.$$

(ii) (Jacquet, Shalika) *Si $\pi \in \{\pi\}^r_{x,K}$ pour un certain $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\omega : F^\times_x \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère assez ramifié en fonction de K, on a*

$$L_x(\pi\cdot\omega, Z) = 1$$

et

$$\varepsilon_x(\pi\cdot\omega, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_\pi\cdot\omega, \psi_x, Z)\cdot\varepsilon_x(\omega, \psi_x, Z)^{r-1}$$

où $\chi_\pi : F^\times_x \to \mathbb{C}^\times$ désigne le caractère central de π.

□

En dehors de ces cas, les facteurs L_x et surtout ε_x des représentations $\pi \in \{\pi\}^r_x$ sont beaucoup plus complexes et ne peuvent en général être ramenés au cas du rang $r = 1$.

5 Transformations de Fourier sur $G(F_x)$

La décomposition spectrale sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ de la ψ_x-transformation de Fourier sur $M_r(F_x)$ amène à poser la définition suivante :

Définition –

Soit F_x un corps local ultramétrique.

Soit G un groupe réductif sur F_x muni d'un caractère non trivial

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m \,.$$

Soit ρ la donnée d'un caractère

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$$

et d'une manière d'associer à toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$ une fraction rationnelle en Z

$$L_x(\rho,\pi,Z) = L_x(\rho, \pi \otimes |\det_G(\bullet)|_x^s, q_x^s \cdot Z)\,, \quad \forall\, s\,,$$

et un monôme en $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\rho,\pi,Z) = \varepsilon_x(\rho, \pi \otimes |\det_G(\bullet)|_x^s, q_x^s \cdot Z)\,, \quad \forall\, s\,,$$

tels que :

- *l'inverse $L_x(\rho,\pi,Z)^{-1}$ est un polynôme en Z et π sur chaque $\{\pi\}_{x,K}^G$ qui vaut 1 pour $Z=0$,*
- *le monôme $\varepsilon_x(\rho,\pi,Z)$ est un polynôme inversible en Z et π sur chaque $\{\pi\}_{x,K}^G$.*

Alors :

(i) *On appelle ρ-fonctions sur $G(F_x)$ les fonctions*

$$f_x : K\backslash G(F_x)/K \to \mathbb{C}$$

dont les restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \to q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qui se décomposent spectralement sous la forme

$$f_x(g) = |\det_\rho(g)|_x^{-\frac12} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_K^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac12}\right)$$

où

- *pour tout $g \in G(F_x)$,*
$$\pi \mapsto f_{x,\pi}(g)$$
est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^G$,

- *pour toute* $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^{G}$, *la fonction sur* $G(F_x)$

$$g \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

est élément de l'espace $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$,

- $\pi^\vee = \varinjlim \pi_K^\vee$ *désigne la représentation contragrédiente de chaque* $\pi \in \{\pi\}_x^G$.

(ii) *On appelle* ρ*-transformation de Fourier l'opérateur qui associe à toute* ρ*-fonction* f_x *décomposée spectralement comme ci-dessus la fonction*

$$\widehat{f_x}(g) = |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g^{-1}) \cdot L\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) .$$

Remarque :

Il résulte de la définition que l'espace des ρ-fonctions f_x est invariant par translation à gauche ou à droite par les éléments $g \in G(F_x)$ et que

$$\widehat{f_x^g} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \ {}^{g^{-1}}\widehat{f_x} \,,$$

$$\widehat{{}^g f_x} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f_x}^{g^{-1}} .$$

□

Si $G = T$ est un tore déployé (c'est-à-dire isomorphe à une puissance de $\mathbb{G}_m$) sur F_x, on note $\widehat{T}$ le tore complexe “dual” de T défini en échangeant les réseaux de caractères et de cocaractères

$$X_{\widehat{T}} = X_T^\vee \,, \quad X_{\widehat{T}}^\vee = X_T \,.$$

Voici une manière naturelle de définir sur un tel $G = T$ une donnée ρ comme ci-dessus :

Proposition –

Soit $G = T$ *un tore déployé sur* F_x *muni d'un caractère*

$$\det_G = \det_T : T \to \mathbb{G}_m \,.$$

Soit

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_r$$

une collection de caractères de $\widehat{T}$ *telle que :*

- ρ_T *est injectif, si bien que l'homomorphisme dual*

$$\rho_T^\vee = (\rho_T^{1\vee}, \ldots, \rho_T^{r\vee}) : T_r = \mathbb{G}_m^r \to T$$

est surjectif,

- *pour* $1 \leq i \leq r$, *le composé du caractère* $\rho_T^i : \widehat{T} \to \mathbb{C}^\times$ *et du cocaractère* $\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T}$ *dual de* $\det_T$ *est l'identité de* $\mathbb{C}^\times$.

Posons

$$\det_{\rho_T} = \det_T$$

et, pour tout caractère $\chi \in \{\pi\}_x^T$ *de* $T(F_x)$,

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x(\chi \circ \rho_T^{i\vee}, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T^{i\vee}, \psi_x, Z)\,.$$

Alors :

(i) *Les* ρ_T*-fonctions sur* $T(F_x)$ *sont exactement les fonctions déduites des fonctions localement constantes à support compact*

$$F_x^r \to \mathbb{C}$$

par intégration le long des fibres de l'homomorphisme surjectif

$$\rho_T^\vee : (F_x^\times)^r \to T(F_x)\,.$$

(ii) *La* ρ_T*-transformation de Fourier sur* $T(F_x)$ *est induite par la* ψ_x*-transformation de Fourier sur* F_x^r *via* $\rho_T^\vee$.

□

Si G est un groupe réductif déployé sur F_x, il possède un tore maximal T déployé sur F_x, muni d'une action du groupe de Weyl W_G. Si de plus $\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to (\mathbb{C}^\times)^r$ est une famille de caractères de $\widehat{T}$ comme ci-dessus, stable par l'action de W_G, les facteurs

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z)$$

des caractères $\chi \in \{\pi\}_x^T$ sont invariants par l'action induite de W_G sur $\{\pi\}_x^T$.

Or on a :

Théorème –

Soit G *un groupe réductif déployé sur* F_x, *de tore maximal* T.

Alors :

(i) G *a une structure* O_x*-rationnelle naturelle, et* $G(O_x)$ *est un sous-groupe ouvert compact de* $G(F_x)$.

(ii) *Si* $K = G(O_x)$, *l'algèbre de convolution "non ramifiée"*

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \mathcal{H}_{x,K}^G = C_c(G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x))$$

est commutative et canoniquement isomorphe à

$$(\mathcal{H}_{x,\emptyset}^T)^{W_G} = C_c(T(F_x)/T(O_x))^{W_G} = \mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{W_G}\,.$$

□

Il résulte de ce théorème que se donner une représentation non ramifiée $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G = \{\pi\}_{x,G(O_x)}^G$ équivaut à se donner un caractère

$$z_\pi : T(F_x)/T(O_x) \to \mathbb{C}^\times$$

bien défini modulo l'action de W_G.

Si donc la famille $\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r)$ de caractères ρ_T^i, $1 \leq i \leq r$, de $\widehat{T}$ est stable par l'action de W_G, on peut poser

$$\begin{aligned} L_x(\rho, \pi, Z) &= L_x(\rho_T, z_\pi, Z) \\ \varepsilon_x(\rho, \pi, Z) &= \varepsilon_x(\rho_T, z_\pi, Z) \end{aligned}$$

pour toute représentation non ramifiée $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$.

Sous la même hypothèse, le caractère

$$\widehat{\mu}_G = \prod_{1 \leq i \leq r} \rho_T^i : \widehat{T} \to \mathbb{C}^\times$$

est fixé par l'action de W_G, et il lui correspond un cocaractère central

$$\mu_G : \mathbb{G}_m \to G\,.$$

Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, $F_x^\times$ agit sur π via μ_G par un caractère $\chi_\pi : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ que l'on peut appeler le caractère central de π.

Pour tout $K \subset G(F_x)$, toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ et tout caractère $\omega : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$, notons

$$\pi \cdot \omega = \pi \otimes (\omega \circ \det_G(\bullet))\,.$$

Si ω est assez ramifié en fonction de K, il est naturel de poser

$$\begin{aligned} L_x(\rho, \pi \cdot \omega, Z) &= 1\,, \\ \varepsilon_x(\rho, \pi \cdot \omega, Z) &= \varepsilon_x(\chi_\pi\, \omega, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega, \psi_x, Z)^{r-1}\,. \end{aligned}$$

Restent, bien sûr, bien d'autres représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ pour lesquelles on ne saurait définir naturellement des facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

à partir d'une donnée

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to (\mathbb{C}^\times)^r$$

stable par W_G comme ci-dessus.

6 Formule de Poisson sur $M_r(\mathbb{R})$ puis $M_r(\mathbb{A})$

Revenons au corps $\mathbb{R}$ muni du caractère

$$\psi_\infty : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{2\pi i t}$$

et aux opérateurs de ψ_∞-transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[m' \mapsto \int_{M_r(\mathbb{R})} dm \cdot f(m) \cdot \psi_\infty(\mathrm{Tr}(mm')) \right]$$

des espaces de fonctions de Schwartz $f : M_r(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$.

Le groupe additif localement compact $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Z}$ comme sous-groupe discret. Le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact et de volume 1 pour la mesure autoduale. Les caractères de $\mathbb{R}$ triviaux sur $\mathbb{Z}$ sont exactement les

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \psi_\infty(n \cdot t)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

d'où l'on déduit la formule de Poisson :

Théorème –

Pour toute fonction de Schwartz

$$f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a

$$\sum_{\gamma \in M_n(\mathbb{Z})} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_n(\mathbb{Z})} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

□

Nous allons rappeler la généralisation arithmétique de cette formule démontrée par Tate dans le cadre de la théorie des adèles.

Considérons pour cela un "corps global" F, c'est-à-dire

- $\mathbb{Q}$ ou une extension finie de $\mathbb{Q}$, appelée "corps de nombres",
- $\mathbb{F}_q(X)$ ou une extension finie de $\mathbb{F}_q(X)$, appelée "corps de fonctions".

Notons $|F|$ l'ensemble des corps locaux $(F_x, |\bullet|_x)$ qui s'obtiennent en complétant F par une norme $|\bullet|_x$. Cet ensemble est toujours dénombrable ; ses éléments x s'appellent les places. Si F est un corps de fonctions, toutes ses places sont ultramétriques. Si F est un corps de nombres, il a un nombre fini de places archimédiennes – telles que $F_x \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ – et les autres sont ultramétriques.

L'anneau topologique des "adèles" de F est défini comme le sous-anneau

$$\mathbb{A}_F \subset \prod_{x \in |F|} F_x$$

constitué des familles $(a_x \in F_x)_{x\in|F|}$ telles que

$$a_x \in O_x \,, \quad \text{soit } |a_x|_x \leq 1 \,,$$

en “presque toute” place $x \in |F|$ (ce qui signifie “toute place sauf un ensemble fini”).

Le sous-groupe diagonal $F \hookrightarrow \prod\limits_{x\in|F|} F_x$ est contenu dans $\mathbb{A}$, ce qui signifie que pour tout $\gamma \in F^\times$, on a

$$|\gamma|_x = 1 \text{ en presque toute place } x \in |F| \,.$$

On a :

Proposition –

(i) (“Formule du produit”) *Pour tout $\gamma \in F^\times$, on a*

$$\prod_{x\in|F|} |\gamma|_x = 1 \,.$$

(ii) *F est un sous-groupe discret du groupe topologique localement compact $\mathbb{A}$.*

(iii) *Le quotient $\mathbb{A}/F$ est compact.*

□

Choisissons une fois pour toutes un caractère additif continu non trivial

$$\psi = \prod_{x\in|F|} \psi_x : \mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$$

qui est trivial sur le sous-groupe discret cocompact F. Ce caractère est nécessairement unitaire, ainsi que ses composantes

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times \,.$$

En toute place $x \in |F|$, munissons F_x et $M_r(F_x)$ de la mesure additive “autoduale” pour laquelle l’automorphisme réciproque de la ψ_x-transformation de Fourier des fonctions de Schwartz

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[m' \mapsto \int_{M_r(F_x)} dm \cdot f_x(m) \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}(mm')) \right]$$

est la $\overline{\psi}_x = \psi_x^{-1}$-transformation de Fourier.

Munissons $\mathbb{A}$ et $M_r(\mathbb{A})$ de la mesure produit, et appelons fonctions de Schwartz sur $M_r(\mathbb{A})$ les combinaisons linéaires de produits

$$f = \bigotimes_{x\in|F|} f_x$$

de fonctions de Schwartz $f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$ égales à la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{M_r(O_x)}$ en presque toute place ultramétrique x.

La ψ-transformation de Fourier globale

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[m' \mapsto \int_{M_r(\mathbb{A})} dm \cdot f(m) \cdot \psi(\mathrm{Tr}(mm')) \right]$$

envoie chaque $\bigotimes\limits_{x \in |F|} f_x$ sur $\bigotimes\limits_{x \in |F|} \widehat{f_x}$.

On montre que les caractères

$$\mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$$

sont exactement les

$$\mathbb{A} \ni a \mapsto \psi(\gamma \cdot a)\,, \quad \gamma \in F\,,$$

et que le volume du quotient compact $\mathbb{A}/F$ est 1.

On en déduit la formule de Poisson adélique de Tate :

Théorème –

Pour toute fonction de Schwartz

$$f : M_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

□

7 Nouvelle expression de la formule de Poisson sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$

De la même façon que nous avons ramené les transformations de Fourier des $M_r(F_x)$ aux $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et, à partir de là, proposé une forme très générale de transformation de Fourier sur les groupes réductifs locaux $G(F_x)$, nous voudrions ramener les formules de Poisson des $M_r(\mathbb{A})$ aux $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ afin de proposer une forme plus générale de formule de Poisson sur les groupes réductifs adéliques $G(\mathbb{A})$.

Toute la difficulté réside dans la contribution des matrices non-inversibles $\gamma \in M_r(F) - \mathrm{GL}_r(F)$ à la fonctionnelle de Poisson $f \mapsto \sum\limits_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)$.

Voici une manière simple de faire disparaître les termes de bord associés à ces matrices dans le cas d'une fonction de Schwartz $f = \bigotimes\limits_{x \in |F|} f_x$ très ramifiée en au moins une place :

Proposition –

Soit $f = \bigotimes\limits_{x \in |F|} f_x : M_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ *une fonction de Schwartz telle que, en au moins une place ultramétrique* x_0*, le facteur* f_{x_0} *est le produit*

$$f_{x_0} = f'_{x_0} \cdot \omega_{x_0} \circ \det(\bullet)$$

d'une fonction f'_{x_0} *invariante par un certain sous-groupe ouvert compact* $K \subset \mathrm{GL}_r(F_{x_0})$ *et d'un caractère* $\omega_{x_0} : F_{x_0}^\times \to \mathbb{C}^\times$ *très ramifié en fonction de* K*.*

Alors le support de f_{x_0} *est une partie compacte de* $\mathrm{GL}_r(F_{x_0})$*, de même que celui de* $\widehat{f}_{x_0}$*, et on a*

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) \, .$$

$\square$

Dans le cas général d'une fonction de Schwartz arbitraire

$$f : M_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, ,$$

on a besoin de la définition suivante :

Définition –

Soit x_0 *une place ultramétrique de* F*.*

Soit $f_{x_0} : M_r(F_{x_0}) \to \mathbb{C}$ *une fonction de Schwartz qui est non-ramifiée, c'est-à-dire invariante à gauche et à droite par* $\mathrm{GL}_r(O_{x_0})$*, et dont la décomposition spectrale a la forme*

$$f_{x_0}(g) = |\det(g)|_{x_0}^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^r} d\pi \cdot f_{x_0,\pi}(g) \cdot L_{x_0}\left(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \, , \quad \forall\, g \, .$$

Alors, pour tous $N, N' \in \mathbb{N}$*, on note*

$$f_{x_0}^{N,N'} : M_r(F_{x_0}) \to \mathbb{C}$$

la fonction de Schwartz définie par l'expression spectrale

$$\begin{aligned} f_{x_0}^{N,N'}(g) \quad &= \quad |\det(g)|_{x_0}^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^r} d\pi \\ &\cdot \; f_{x_0,\pi}(g) \cdot L_{x_0}\left(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

où $I_{x_0}^N(\pi, Z)$ *désigne le polynôme en* Z *et* π *produit de*

$$L_{x_0}(\pi, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N en Z qui apparaît dans le développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_{x_0}(\pi, Z)\,.$$

Remarque :

On remarque que chaque fonction $f_{x_0}^{N,N'}$ et sa transformée de Fourier $\widehat{f_{x_0}^{N,N'}}$ sont à support compact dans $\mathrm{GL}_r(F_{x_0})$.

D'autre part, on a dans l'anneau des séries formelles en Z l'égalité

$$\sum_{N\in\mathbb{N}} I_{x_0}^N(\pi, Z) = 1$$

d'où l'on déduit

$$\sum_{N,N'\in\mathbb{N}} f_{x_0}^{N,N'}(g) = f_{x_0}(g)\,, \quad \forall\, g \in \mathrm{GL}_r(F_{x_0})\,.$$

$\square$

Cette définition permet de formuler le théorème suivant qui ramène l'expression de la formule de Poisson de $M_r(\mathbb{A})$ à $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$:

Théorème –

Soit $f = \bigotimes_{x\in|F|} f_x : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ *une fonction de l'espace de Schwartz de* $M_r(\mathbb{A})$.

Soit $x_0 \in |F|$ *une place ultramétrique en laquelle le facteur* f_{x_0} *de* f *est non ramifié.*

Alors :

(i) *La série formelle*

$$\sum_{N,N'\in\mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma\in\mathrm{GL}_r(F)} \left(f_{x_0}^{N,N'} \otimes \left(\bigotimes_{x\neq x_0} f_x \right) \right)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z.

(ii) *Sa "valeur régularisée" en* $Z = 1$ *(définie en soustrayant l'unique expression de la forme* $\sum_{1\leq i\leq k} a_i \cdot (Z-1)^{-i}$ *qui fait disparaître l'éventuel pôle en* $Z = 1$*), notée* $S(f)$*, ne dépend pas du choix de la place* x_0.

(iii) *On a*

$$\sum_{\gamma\in M_r(F)} f(\gamma) = \left(\sum_{\gamma\in\mathrm{GL}_r(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma\in\mathrm{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f)\,.$$

Remarque :

La démonstration de ce théorème utilise :

– le théorème de décomposition spectrale de Langlands,

– les propriétés globales des fonctions L démontrées par Godement et Jacquet.

$\square$

8 Forme cherchée de formules de Poisson sur $G(\mathbb{A})$

Considérons maintenant un groupe réductif G sur un corps global F, muni d'un caractère non trivial

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m \,.$$

Soit ρ la donnée de :

- un caractère $\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$,
- en toute place ultramétrique $x \in |F|$, une manière d'associer à toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$ une fraction rationnelle en Z

$$L_x(\rho,\pi,Z) = L_x(\rho,\pi\otimes|\det_G(\bullet)|_x^s, q_x^s\cdot Z)\,,\quad \forall\, s\,,$$

  et un monôme en $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\rho,\pi,Z) = \varepsilon_x(\rho,\pi\otimes|\det_G(\bullet)|_x^s, q_x^s\cdot Z)\,,\quad \forall\, s\,,$$

  vérifiant les propriétés du paragraphe 5,
- en toute place archimédienne $x \in |F|$, des facteurs spectraux analogues.

Comme on a vu, ρ permet de définir en toute place ultramétrique x de F l'espace des ρ-fonctions

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}}\cdot\int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi\cdot f_{x,\pi}(\bullet)\cdot L_x\left(\rho,\pi^\vee,q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

puis la ρ-transformation de Fourier de ces fonctions

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}}\cdot\int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi\cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1})\cdot L_x\left(\rho,\pi,q_x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\varepsilon_x\left(\rho,\pi,q_x^{-\frac{1}{2}}\right)\,.$$

Et de même en les places archimédiennes de F.

En presque toute place ultramétrique x de F, le groupe réductif G est “non ramifié”, donc admet une structure O_x-rationnelle, et le groupe $G(F_x)$ contient le sous-groupe ouvert compact $G(O_x)$. En une telle place, on appelle “ρ-fonction standard” l'unique ρ-fonction non-ramifiée

$$f_x : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

dont les raies spectrales $f_{x,\pi}$, $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G = \{\pi\}_{x,G(O_x)}^G$ vérifient

$$f_{x,\pi}(1) = 1\,, \quad \forall\,\pi\,.$$

On appelle ρ-fonction globale

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

les combinaisons linéaires de produits

$$\bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

de ρ-fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

presque toutes égales aux ρ-fonctions standard.

Par analogie avec le cas de GL_r, posons :

Définition –

Soit x_0 une place ultramétrique de F en laquelle le groupe réductif G est non ramifié.

Soit $f_{x_0} : G(F_{x_0}) \to \mathbb{C}$ une ρ-fonction non ramifiée, c'est-à-dire invariante à gauche et à droite par $G(O_x)$, et dont la décomposition spectrale a la forme

$$f_{x_0}(\bullet) = |\det{}_\rho(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x_0,\pi}(\bullet) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)\,.$$

Alors, pour tous $N, N' \in \mathbb{N}$, on note

$$f_{x_0}^{N,N'} : G(F_{x_0}) \to \mathbb{C}$$

la ρ-fonction définie par l'expression spectrale

$$\begin{aligned} f_{x_0}^{N,N'}(\bullet) \quad &= \quad |\det{}_\rho(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \\ &\qquad \cdot\ f_{x_0,\pi}(\bullet) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

où $I_{x_0}^N(\rho,\pi,Z)$ désigne le polynôme en Z et π produit de

$$L_{x_0}(\rho,\pi,Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N en Z qui apparaît dans le développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_{x_0}(\rho,\pi,Z)\,.$$

Remarque :

Comme dans le cas linéaire, on remarque que chaque fonction $f_{x_0}^{N,N'}$ et sa ρ-transformée de Fourier $\widehat{f_{x_0}^{N,N'}}$ sont à support compact dans $G(F_{x_0})$.

D'autre part, on a dans l'anneau des séries formelles en Z l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_{x_0}^N(\rho, \pi, Z) = 1$$

d'où l'on déduit

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N,N'}(g) = f_{x_0}(g)\,, \quad \forall\, g \in G(F_{x_0})\,.$$

□

Le cas de GL_r et de la transformation de Fourier linéaire sur $M_r(\mathbb{A})$ amène à envisager la forme générale suivante pour d'éventuelles autres formules de Poisson :

Définition –

Soit G un groupe réductif sur un corps global F, muni d'un caractère non trivial $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$.

Soit ρ une donnée globale comme ci-dessus.

(i) *On dira que ρ satisfait la formule de Poisson restreinte si, pour toute ρ-fonction*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont le facteur f_{x_0} en au moins une place ultramétrique x_0 est le produit

$$f_{x_0} : f'_{x_0} \cdot \omega \circ \det_G(\bullet)$$

d'une fonction f'_{x_0} invariante par un certain sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_{x_0})$ et d'un caractère $\omega_{x_0} : F_{x_0}^\times \to \mathbb{C}^\times$ très ramifié en fonction de K, on a

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

(ii) *On dira que ρ satisfait la formule de Poisson générale si, pour toute ρ-fonction*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et pour toute place ultramétrique $x_0 \in |F|$ en laquelle G et f_{x_0} sont non-ramifiés, la série formelle

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N,N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z et que sa "valeur régularisée" en $Z = 1$, notée $S(f)$, ne dépend pas du choix de x_0 et vérifie

$$S(f) = S(\widehat{f})\,.$$

Les propriétés connues des facteurs L_x et ε_x linéaires amènent à supposer :

Conjecture –

Soit toujours G un groupe réductif sur F, muni d'un caractère non trivial $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$.

Si ρ est une donnée globale qui satisfait la formule de Poisson (générale ou seulement restreinte), elle est uniquement déterminée par la connaissance des facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \qquad \textit{et} \qquad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

des représentations non ramifiées $\pi \in \{\pi\}^G_{x,\emptyset}$ en presque toute place ultramétrique x de F où G est non ramifié.

□

9 Le cas des tores déployés

On se place toujours sur un corps global F.

On considère le cas où $G = T$ est un tore déployé sur F, muni d'un caractère non trivial

$$\det_T : T \to \mathbb{G}_m\,.$$

On rappelle que $\widehat{T}$ désigne le tore complexe dual de T.

Comme au paragraphe 5, on considère une famille de caractères de $\widehat{T}$

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_r$$

telle que :

- ρ_T est injectif, si bien que l'homomorphisme dual

$$\rho_T^\vee = (\rho_T^{1\vee}, \ldots, \rho_T^{r\vee}) : T_r = \mathbb{G}_m^r \to T$$

  et surjectif,
- pour $1 \leq i \leq r$, le composé du caractère $\rho_T^i : \widehat{T} \to \mathbb{C}^\times$ et du cocaractère $\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T}$ dual de $\det_T$ est l'identité de $\mathbb{C}^\times$.

On pose

$$\det_{\rho_T} = \det_T\,.$$

Comme on a vu, ρ_T permet de définir en toute place ultramétrique x de F des facteurs

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x(\chi \circ \rho_T^{i\vee}, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T^{i\vee}, \psi_x, Z)$$

des caractères $\chi \in \{\pi\}_x^T$ et donc un espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ ainsi qu'un opérateur de ρ_T-transformation de Fourier de ces fonctions.

Et de même en les places archimédiennes de F.

D'où une notion de ρ_T-fonctions sur $T(\mathbb{A})$ et un opérateur de ρ_T-transformation de Fourier de ces fonctions globales.

On a :

Théorème –

Dans les conditions ci-dessus, la donnée ρ_T satisfait la formule de Poisson (restreinte ou générale) au sens du paragraphe précédent.

Principe de démonstration :

C'est déjà connu si $T = \mathbb{G}_m$ est muni de la ψ-transformation de Fourier linéaire de $\mathbb{A}$ et donc, plus généralement, si

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

est un isomorphisme.

Dans le cas général, la ρ_T-formule de Poisson sur $T(\mathbb{A})$ se déduit de la formule de Poisson standard sur $(\mathbb{A}^\times)^r$ par intégration le long des fibres de l'homomorphisme surjectif

$$\rho_T^\vee : (\mathbb{A}^\times)^r / (F^\times)^r \to T(\mathbb{A})/T(F) .$$

□

10 Le cas des groupes réductifs déployés

On considère maintenant un groupe réductif G déployé sur un corps global F. Il possède un tore maximal T défini et déployé sur F.

En toute place ultramétrique x de F, le groupe réductif déployé G est non ramifié sur F_x, donc muni d'une structure O_x-rationnelle naturelle et d'un sous-groupe ouvert compact $G(O_x)$ de $G(F_x)$.

On suppose G muni d'un caractère non trivial

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m$$

dont la restriction à T est notée $\det_T$.

Enfin, on considère une famille de caractères

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_r$$

qui vérifie les mêmes propriétés qu'au paragraphe précédent.

Supposons de plus que cette famille de caractères ρ_T^i, $1 \leq i \leq r$, est stable par l'action naturelle du groupe de Weyl W_G de G sur le tore T et son dual $\widehat{T}$.

Comme on a vu au paragraphe 5, il en résulte que, en toute place ultramétrique x de F, les facteurs

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z)$$

des caractères $\chi \in \{\pi\}_x^T$ sont invariants par l'action de W_G.

Or, en toute telle place x, les représentations non ramifiées de $G(F_x)$

$$\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$$

sont paramétrées par des caractères non ramifiés

$$z_\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^T$$

bien définis modulo l'action de W_G, et on peut poser

$$L_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho_T, z_\pi, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, z_\pi, Z)\,.$$

La conjecture de transfert automorphe de Langlands des groupes réductifs déployés sur F vers les groupes linéaires est équivalente à l'énoncé suivant :

Conjecture –

Dans la situation ci-dessus, la famille des facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \qquad \textit{et} \qquad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

des représentations non ramifiées $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ *en les places ultramétriques* x *de* F *peut être complétée (de façon nécessairement unique) en une donnée globale* ρ *qui satisfasse la formule de Poisson (restreinte ou générale) si et seulement si la famille de caractères stable par* W_G

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_r$$

provient d'une représentation algébrique

$$\widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

du groupe réductif complexe $\widehat{G}$ *dual de* G.

Remarque :

On rappelle que le groupe réductif $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C}$ dual de G est déduit de G par une construction purement combinatoire : On demande que sa donnée radicielle $(X_{\widehat{G}}, \Delta_{\widehat{G}}, X_{\widehat{G}}^\vee, \Delta_{\widehat{G}}^\vee)$ s'identifie à la duale $(X_G^\vee, \Delta_G^\vee, X_G, \Delta_G)$ de la donnée radicielle $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$ de G.

Il admet pour tore maximal le dual $\widehat{T}$ du tore maximal T de G.

$\square$

Bibliographie

• A. Braverman et D. Kazhdan, "γ-functions of representations and lifting". With an appendix by V. Vologodsky, in "GAFA 2000, Visions in Mathematics", Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, Birkhäuser Verlag, 2000, p. 237-278.

• R. Godement et H. Jacquet, "Zeta functions of simple algebras", LNM 260, Springer-Verlag, 1972.

• L. Lafforgue, "Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires", Japan J. Math. 9, p. 1-68, 2014.

• L. Lafforgue, "Du transfert automorphe de Langlands aux formules de Poisson non linéaires", prépublication de l'IHES numéro M/14/05, 2014.
(http ://preprints.ihes.fr/2014/M/M-14-05.pdf)

• J. Tate, "Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions", Ph. D. Thesis, Princeton Univ. 1950, in : "Algebraic Number Theory" (éditeurs : J. Cassels et A. Fröhlich), Academic Press, 1967, p. 305-347.