

On dispose d'un échantillon aléatoire de 200 copies d'examen (épreuve de mathématiques de juin 2006). Il s'agit d'étudiants en fin de première année universitaire (section "Biologie-Physique-Chimie"), titulaires en quasi-totalité du Baccalauréat S. L'épreuve dure 2 heures et comprend 5 petits exercices indépendants (voir ci-dessous).

1 Exercice N°I

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \quad (1)$$

1. Vérifier que la fonction $f(x)$ est impaire.
2. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x). \quad (2)$$

3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$.
4. Calculer la dérivée de $f(x)$.
5. Etudier la variation de $f(x)$ et tracer son graphe.

Le bilan est le suivant :

Question	Nombre d'étudiants (sur 200) ayant échoué	% d'échecs	Remarques
1	33	16.5	
2	130	65	a
3	159	79.5	b
4	105	52.5	
5	165	82.5	

Remarque a : 32.5% des étudiants n'ont rien su faire, et 32.5% d'entre eux ont traité la moitié de la question (i.e., ils ont déterminé une seule limite).

Remarque b : 47.5% des étudiants n'ont rien su faire et 32% d'entre eux ont traité un tiers de la question environ.

2 Exercice N°II

Soit la matrice suivante :

$$M(\theta, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

1. Déterminer $M(\theta, \varphi, \psi)$ dans le cas où $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$ et $\psi = 0$.
2. Calculer le déterminant de $M(\theta, \varphi, \psi)$ quels que soient θ , φ et ψ .

Le bilan est le suivant :

Question	Nombre d'étudiants (sur 200) ayant échoué	% d'échecs	Remarques
1	75	37.5	a
2	156	78	

Remarque a : parmi les 37.5% d'étudiants n'ayant pas su traiter la question, au moins 80% ont fait l'erreur suivante : $\cos \psi = 0$ pour $\psi = 0$.

3 Exercice N°III

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z &= 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}z &= 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

1. Ecrire le système d'équations sous la forme $\mathcal{M}\mathbf{u}=\mathbf{v}$, où \mathcal{M} est une matrice et \mathbf{u} et \mathbf{v} sont des vecteurs.
2. Calculer le déterminant de la matrice \mathcal{M} .
3. Résoudre le système d'équations.

Le bilan est le suivant :

Question	Nombre d'étudiants (sur 200) ayant échoué	% d'échecs	Remarques
1	62	31	a
2	91	45.5	
3	139	69.5	

Remarque a : Exemples d'erreurs trouvées :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x & \frac{\sqrt{3}}{4}y & \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x & \frac{3}{4}y & -\frac{1}{2}z \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x & \frac{1}{2}y & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 Exercice N°IV

Soit la fonction $c(t)$ définie par :

$$c(t) = c^+(t) + c^-(t) \tag{5}$$

où

$$\frac{dc^+}{dt} = I, \quad \frac{dc^-}{dt} = -kc(t), \tag{6}$$

k et I étant deux constantes réelles positives.

1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $c(t)$.
2. Soit $k = 0$ et $I \neq 0$. Calculer $c(t)$, $\forall t \geq 0$.
3. Soit $I = 0$ et $k \neq 0$. Calculer $c(t)$, $\forall t \geq 0$.
4. Soient $k \neq 0$ et $I \neq 0$. Calculer $c(t)$, $\forall t \geq 0$.

Le bilan est le suivant :

Question	Nombre d'étudiants (sur 200) ayant échoué	% d'échecs	Remarques
1	89	44.5	
2	166	83	
3	164	82	
4	188	94	

5 Exercice N°V

Soit z le nombre complexe :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (7)$$

1. Calculer le module et l'argument de z et exprimer z sous la forme d'une exponentielle complexe.
2. En déduire les nombres complexes Z tels que $Z^4 = z$.

Le bilan est le suivant :

Question	Nombre d'étudiants (sur 200) ayant échoué	% d'échecs	Remarques
1	41	20.5	a
2	163	81.5	

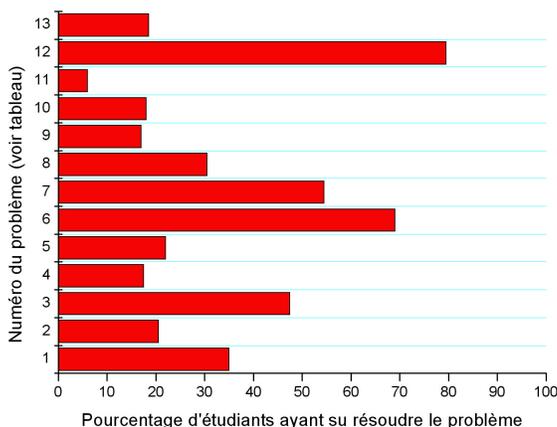
Remarque a : les 79.5% d'étudiants qui ont "répondu" à la question se partagent de la façon suivante : 68% (resp., 11.5%) ont trouvé que $z = e^{i\pi/4}$ (resp., $z = e^{i\pi/4+i2\pi n}$).

6 Synthèse

On peut présenter la synthèse des différents bilans établis ci-dessus sous la forme d'un graphe montrant le pourcentage d'étudiants ayant su répondre de façon exacte à un problème donné.

Les "problèmes" sont définis à partir des questions des exercices et sont numérotés de 1 à 13 :

N° du problème	Intitulé du problème	Question correspondante
1	Calcul des limites d'une fonction simple	I-2
2	Calcul du développement limité d'une fonction simple à l'ordre 3	I-3
3	Calcul de la dérivée d'une fonction simple	I-4
4	Variation et graphe d'une fonction simple	I-5
5	Calcul trigonométrique simple	II-2
6	Définition d'une matrice et d'un vecteur	III-1
7	Calcul du déterminant d'une matrice 3×3 à coefficients constants	III-2
8	Résolution d'un système de trois équations linéaires à coefficients constants	III-3
9	Résolution de l'équation différentielle $\frac{df(t)}{dt} = I$, où I est une constante	IV-2
10	Résolution de $\frac{df(t)}{dt} + kf(t) = 0$, où k est une constante	IV-3
11	Résolution de $\frac{df(t)}{dt} + kf(t) = I$, où k et I sont des constantes	IV-4
12	Calcul du module et de l'argument d'un nombre complexe $z = a + ib$	V-1
13	Racines d'un nombre complexe	V-2



7 Informations sur les étudiants

7.1 Années de naissance

L'année de naissance d'un étudiant n'ayant pas de retard scolaire est 1987 (Bac obtenu en 2005).

Année de naissance	% d'étudiants	Année de naissance	% d'étudiants
≤ 1981	2.8	1986	27.8
$1982 \leq X \leq 1984$	13.9	1987	39.4
1985	13.9	1988	2.2

Pourcentage d'étudiants ayant l'âge normal ou moins : 41.6%

Pourcentage d'étudiants ayant un an de retard : 27.8%

Pourcentage d'étudiants ayant plus d'un an de retard : 30.6%

7.2 Lieux de naissance

Pourcentage d'étudiants nés en France : 90%.

La moitié environ des étudiants nés hors de France (10%) proviennent d'un pays francophone.